北京市高等教育精品教材立项项目

陆启韶　主编

陆启韶　周　梦　高宗升
郭定辉　陈迪荣　孙海燕　编著

高等学校研究生教材

现代数学基础（第二版）

北京航空航天大学出版社

GAODENG XUEXIAO
YANJIUSHENG
JIAOCAI

责任编辑：赵延永

书籍装帧：彩多设计 MULTI COLOUR

ISBN 7-81077-663-0

9 787810 776639 >

ISBN 7-81077-663-0
定价：30.00元

北京市高等教育精品教材建设立项项目

现代数学基础

（第二版）

陆启韶　主编

陆启韶　周　梦　高宗升　郭定辉　陈迪荣　孙海燕　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是一本概论性的现代数学教材，重点介绍与科学技术密切相关的一些重要的现代基础数学与应用数学分支的基本概念和方法，为进一步深入学习和运用现代数学知识打下基础，主要包括近世代数和拓扑、泛函分析、微分流形、偏微分方程的现代理论、小波分析和随机微分方程等6个方面的内容。前3章分别从代数、几何和分析的角度介绍了现代基础数学的基本内容；后3章介绍与现代科技密切相关的一些现代应用数学内容。这些内容不但在数学科学中占有重要地位，而且在不同的科学技术领域中都有广泛应用。

本书取材广泛，重视基础，结构合理，深入浅出，实用性强，可作为理工科大学研究生（尤其是工科博士生）的现代数学教材或参考书，也可供高年级大学生、教师及科学技术人员自学和参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学基础/陆启韶主编. —北京：北京航空航天大学出版社，2005.9

ISBN 7-81077-663-0

Ⅰ.现… Ⅱ.陆… Ⅲ.数学—教材 Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 044276 号

现代数学基础

（第二版）

陆启韶 主编

责任编辑 赵延永

责任校对 陈 坤

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(100083) 发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印制 各地书店经销

*

开本:787×1092 1/16 印张:21.75 字数:557千字

2005年9月第2版 2005年9月第1次印刷 印数:3 000册

ISBN 7-81077-663-0 定价:30.00元

序 言

数学科学是科学技术中一门重要的基础性学科。在长期的发展过程中，它不仅形成了自身完美严密的理论体系，而且成为一切科学技术必需的研究手段和工具。数学的发展关系到整个科学技术的进步。综观人类社会和科学技术的发展史，科学技术领域的每一次历史性重大变革都与数学科学的突破性进展紧密联系。今天，无论基础数学、应用数学，还是计算数学、实验数学，都取得了空前的巨大进展。随着计算机和高新科学技术的进步，现代数学在科技领域和国民经济中发挥着越来越重要的作用。

研究生教育是高等教育的一个重要层次。为了提高研究生的培养质量，增强科研创新能力，以适应现代科学技术发展的需要，必须进一步深化课程改革，完善课程体系，优化知识结构。在博士生课程设置上，更要拓宽基础，追踪前沿，重视不同学科的相互交叉和渗透。针对当前我国一般理工科博士生的现状，有必要设立一些介绍现代数学内容的基础课程，以提高现代数学素质和培养创新思维方法，增强他们运用数学知识去分析和解决问题的能力。因此，我校对全体博士生开设了"现代数学基础"系列公共学位课程，本书就是在这些课程基础上编写的一本现代数学概论性教材，可作为理工科大学研究生（尤其是工科博士生）的教学用书或参考书，也可供高年级大学生、教师和科学技术人员自学参考之用。

本书初步地介绍与科学技术密切相关的一些主要的现代数学分支的基本概念、方法和应用。根据现代数学的发展现状、现代科学技术的需要以及理工科专业设置的特点，选取了6个方面的题材：近世代数与拓扑、泛函分析、微分流形及其应用、偏微分方程的现代理论、小波分析及其应用、随机过程与随机微分方程。前3章分别从代数、几何和分析的角度去介绍现代基础数学的基本内容；后3章介绍与现代科技密切相关的一些应用数学内容，这些内容对于理工科博士生掌握和运用现代数学方法来说是基本和必要的。它们不但在现代数学中占有重要地位，而且在不同的科学技术领域中都有广泛的应用。

本书是按照理工科大学研究生的数学基础和学习特点进行编写的，力求深浅适度，重点突出。在编写中注重基本概念的引进及其内在联系，尽量避免繁琐论证，运用较多实例加以说明，并给出基本理论的一些重要应用。本书各章的内容相对独立，可在研究生教学中单独使用，也便于读者选学。每章后面分别配有习题和主要参考文献，书末还有中英文对照的名词索引。

本书于1997年首次出版后，得到广大读者，特别是理工科大学教师和研究生的欢迎和好评。此次，我们根据近年来在该课程系列中的教学改革经验，以及读者在使用中的反馈意见，对本书进行了全面的补充和修订。在新版中，增加了绪论中关于现代数学的介绍和第6章中随机微分方程的内容；重写了第2章，其中同时包含了线性和非线性泛函分析的基本内容；其他各章亦作了较大的改动，着重加强了应用性内容。

本书的各章依次分别由周梦、高宗升、陆启韶、郭定辉、陈迪荣和孙海燕负责执笔，最后由陆启韶整理定稿。新版书稿承蒙柳重堪教授详细审阅并提出建设性意见，北京大学李忠教授、北京理工大学史荣昌教授，以及许多读者对本书初版提出许多宝贵建议，在此谨致衷心的

谢意。本书得到北京市高等教育精品教材建设项目的资助，对于北京航空航天大学研究生院、教材科和北京航空航天大学出版社对本书出版的关心和支持，一并表示感谢。由于作者的水平所限，本书在内容选取、表述和编排等方面难免存在不足之处，敬请读者和同行批评指正。

主编　陆启韶

2005 年 5 月于北京航空航天大学

目 录

绪 论

数学是一门十分古老而又飞速进步的基础科学。由于数学自身的内在矛盾和科学技术的外在需求的推动，数学理论体系不断发展和完善，其内容、方法和应用都在日益扩展。数学科学的发展大致可划分为经典数学和现代数学两个主要阶段，它们通常以 19 世纪后期康托(Cantor)创立"集合论"作为分界线。特别是进入 20 世纪以来，数学的面貌及其在科学技术中的地位发生了根本性的变化，从而跨进了现代数学的新阶段。因此，深刻认识现代数学的特点、发展趋势，以及其在现代科学技术中的作用，对于学习和运用现代数学知识具有重要的意义。

一、现代数学内容的抽象化和体系的统一化

客观事物是通过"数"和"形"描述的。数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学。在从经典数学向现代数学发展的进程中，"数"和"形"的概念和范畴不断扩展，已经远远超出人们日常的直观理解，可以包括客观现实中任何关系和形式。例如，"数"的概念已由自然数、实数、复数、向量、张量扩展到抽象集合的元素；"形"的对象也由低维向量空间的直观几何图形性质转移到高维向量空间、无穷维函数空间、拓扑空间和概率空间的结构特性。总的来说，按照集合论的思想和观点，经典数学主要针对有限维向量空间的集合和映射(尤其是函数和几何变换)，而现代数学主要处理抽象空间的一般集合和映射。因此，现代数学是经典数学的抽象化结果。数学的抽象化可以把客观世界的不同事物按其共性进行本质上的概括综合，并将它们在更高层次上统一地进行研究，揭示它们的共同规律，从而形成现代数学的公理化和结构化的理论体系。

数学的抽象化和统一化是相辅相成的，这个过程正以越来越快的趋势向更高级的阶段推进。例如，算术和初等几何经历了数千年，直到 19 世纪才建立比较完整的高等代数和高等几何的体系；又过了上百年，才进入以公理化体系的统一观点描述的近世代数和近代微分几何。又如，从牛顿-莱布尼兹的初等微积分体系发展到柯西-维尔斯特拉斯的高等微积分体系，人们用了 200 多年的时间，然而在其后的数十年时间里，就相继出现了泛函分析、微分流形等近代分析理论。上述情况表明，抽象化和统一化是现代数学发展的必然趋势。

我们还注意到，现代数学呈现的高度抽象性和统一性是数学科学自身矛盾发展的结果。从表面上看，这似乎使数学越来越远离现实世界，但是实际上这样使得数学理论体系日臻完美，研究内容扩大，观点方法更新，研究对象和应用范围更加广泛，从而能在更大的广度和深度上认识客观世界，更有效地处理和解决不同领域的实际问题。因此，正确对待现代数学的抽象性、统一性和客观世界的现实性、特殊性的关系是十分必要的。

二、现代数学学科的广泛交叉渗透和研究方法的综合运用

著名数学家希尔伯特曾经说过："数学是一个不可分割的整体，它的生命力正是在于各部分之间的联系。"如同经典数学以高等几何、高等代数和微积分作为主要基础学科一样，拓扑

学、近世代数和泛函分析、大范围分析成为现代数学的支柱。然而，在现代数学阶段里，数学内部的各个分支学科的相互交叉和渗透显著加强，原有的学科界限逐渐模糊淡化，涌现大量新的跨学科研究领域，例如代数几何、代数拓扑、微分拓扑、泛函微分方程和随机微分方程等，它们已成为数学新的生长点。在数学研究方法方面，代数、几何、拓扑、分析，以至随机的方法相互交融，综合运用，产生了许多崭新的理论和方法，解决了重大的古老难题和现代课题，大大拓宽了数学研究思路，在数学理论和应用研究中显出强大的生命力。

另外，现代数学与科学技术的广泛深入结合，也造就了许多新的应用数学和其他交缘科学分支，例如非线性科学、信息数学、生物数学和金融数学等。现代应用数学大大扩展了数学的研究领域，与现代纯粹数学紧密联系而又互有特色，共同组成一个不可分割的整体。

总之，现代数学的学科交叉和方法综合的发展趋势从一定角度反映了数学本身和外部世界中的多样性与统一性之间的关系，体现了学科变革的活力，有力地推动了数学科学的整体进步。

三、现代数学与计算机的密切关系

计算机是人类在20世纪里最伟大的科学成就之一，对社会进步和科技发展起着十分重要的作用。计算机与现代数学有着很密切的关系。一方面，无论是计算机的原理、计算技术，还是它的应用，都是以数学(尤其是现代数学)作为基础的；另一方面，计算机的出现剧烈地改变了数学的学科面貌。

首先，计算机具有空前强大的计算能力和效率，使得利用数学的思想和方法去解决大规模的科学和工程问题成为可能。数值计算和仿真已成为现代科学和工程技术的关键性手段，由此促成了计算数学各个分支的繁荣发展，成为现代数学的重要组成部分。其次，计算机使得人们从事数学研究时不再单纯依靠"一张纸，一支笔"的个人脑力活动的传统方式，还添加了借助计算机去证明定理、验证理论结果和发现新现象、开拓新思路的新方法。例如"四色定理"的证明、几何学定理的机械化证明、数学公式的符号运算推导、混沌、分形、孤立子等重要非线性现象的发现，无一不是依靠计算机才能完成的。因此，计算机开辟了数学定理的机器证明和实验数学的新领域，这也是现代数学的重要组成部分。另外，计算机和信息技术的发展为数学研究信息化和资源管理智能化奠定了坚实基础。我们完全可以认为，计算机正在开辟数学研究的一条新路。

四、现代数学在科学技术进步中的重要作用

著名科学家钱学森指出："一切科学技术都用数学"，"数学的发展关系到整个科学技术的发展"。数学不仅是自然科学的基础，而且是一切重大技术革命的基础。20世纪科学技术的巨大成就都是与在此期间现代数学的迅速发展分不开的。在20世纪前期，黎曼几何和泛函分析分别为相对论和量子力学的诞生提供了坚实的理论基础，从而使世界步入了原子能的新时代。微分方程研究促进了流体力学、固体力学和控制理论的发展，也为人类开创了航空航天的伟大事业。在20世纪后期，现代数学在科学技术中的重要应用成果更是比比皆是。例如，变分原理与有限元法、偏微分方程现代理论与高速流动计算和天气预报、快速傅氏分析和小波分析与信号处理、数论与密码学、人工神经网络与智能技术、纤维丛与规范场论以及微分流形和动力系统与非线性科学等。即使一些以往与数学几乎无缘的学科领域，如生物学、心理学、经

济学、管理学，甚至语言学、考古学等，今天都已成为数学大显身手的场所。可以预期在21世纪，现代数学将在科学技术领域，特别是非线性科学、信息科学、生命科学、材料科学和金融、管理科学中发挥越来越重要的作用。

回顾数学的发展历程，可以清楚地看到一条由初级到高级、由简单到复杂、由具体到抽象、由孤立到统一的漫长而曲折的道路。展望数学的未来趋势，正在呈现由低维到高维、由连续到离散、由线性到非线性、由局部到整体、由光滑到非光滑、由确定性到随机性的发展前景，现代数学的思想、理论和方法必将有更大的进展和更辉煌的成就。

在当今科学技术突飞猛进的时代，高素质创新型人才应当重视现代数学的基础。在学好现代数学知识的同时，更应把提高数学素养作为出发点和落实处。为此，一方面要注意培养创造性思维能力和方法，增强运用数学的原理和方法解决实际问题的能力；另一方面还要培养对数学的学习兴趣和动力，领悟数学内在的逻辑美和结构美，提高持续的自我接纳和更新数学知识的能力。愿现代数学在我们的学习、工作和生活中发挥更大的作用，成为每个人的得力助手和终身朋友。

第一章　近世代数与拓扑

本章扼要论述现代数学的基础性分支——近世代数与点集拓扑的基本内容。它们不仅在数学的其他分支中已成为必不可少的基本工具，而且在计算机科学、数字通信、近代物理、系统工程等领域也有广泛而重要的应用，是现代科学技术的基础之一。近年来，其本身亦获得了迅猛的发展，模论、同调论以至范畴论的语言、方法已广泛渗入到经典理论之中。由于这一原因，我们在论述基本内容的同时，将尽量反映数学中比较现代的思想观点：现代数学最基本的着眼点不在于元素，而在于结构及结构之间的联系；许多重要而深刻的概念，本质上是某种泛映射性质。本章对于群、环、域、拓扑空间等基本的经典内容的论述采用了现代的方式；一些在现代数学中已广泛使用的概念和方法，如同态序列、模、范畴等在其中得到了体现。此外，为了给出抽象化的具体背景，本章较详尽地论述了许多具体的代数结构和大量实际应用中的代数构造、拓扑构造的例子。

1.1　代数基本概念

1.1.1　逻辑与集合

现代数学的重要发展趋势是公理化和结构化。公理化就是遵循严格的逻辑演绎规则，从最少的不加证明的公理出发推演出整个体系。结构化就是认为数学研究的对象本质上是结构及结构间的联系。我们先对需用的基本逻辑规则和逻辑术语作一简述。

任何一个叙述或论断称为一个命题。我们约定命题只取“真”值或“假”值中的一个。即任一命题或者是真命题，或者是假命题，而不能是又真又假的命题。命题包含条件和结论两个部分，其一般形式为“若 A，则 B”。任何一个命题有与其相联系的逆命题、否命题、逆否命题。如果原命题为“若 A，则 B”，逆命题就是“若 B，则 A”，否命题是“若非 A，则非 B”，逆否命题是“若非 B，则非 A”。

例 1.1.1　古希腊哲学家柏拉图曾给人下过一个定义：两足行走、没有羽毛的动物。这实际上是给出了一个命题：“若一动物是两足行走且没有羽毛的，则它是人。”与这一原命题相联系的逆命题、否命题、逆否命题分别为：

逆命题：若一动物是人，则它是两足行走且没有羽毛的。

否命题：若一动物不是两足行走且没有羽毛的，则该动物不是人。

逆否命题：若一动物不是人，则它必不是两足行走且没有羽毛的。

如果一个命题 P 真时，另一个命题 Q 必真，则称 P 蕴涵 Q。记为 $P\Rightarrow Q$，有时也称为 P 推出 Q。如果 P 与 Q 互相蕴涵，则称 P 与 Q 等价，记为 $P\Leftrightarrow Q$，有时把它读作“P 当且仅当 Q”。等价的命题必同时为真或同时为假。原命题与逆否命题是等价的。逆命题与否命题是等价的。常用的“反证法”就是通过证明逆否命题来使原命题获得证明。

下面简述关于集合的基本内容。

集合是数学中最基本的概念，以 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，以 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素。$a\in A$ 表示元素 a 属于集合 A。$a\notin A$ 表示元素 a 不属于 A。人们一度认为集合的概念是无需定义的，只要描述性地说明任何一些对象(元素)均可组成集合就可以了。然而很快发现这会引起一些困难的悖论。

例 1.1.2(理发师悖论)　在一个小岛上有惟一的一位理发师。他宣称：我为岛上所有不为自己理发的人理发，而不给那些为自己理发的人理发。现在要问，按他的规则，他本人的头发该由谁来理？他实际上把岛上居民分成了两类，A 类是为自己理发的那部分居民，B 类则由不属于 A 类的人组成。在他的理发规则下，他不能为自己理发，也不能不为自己理发。即他不能属于 A 类，也不能不属于 A 类。这虽然是一个以文字游戏形式表现的悖论，但已包含了集合论悖论的基本要素。

例 1.1.3　考虑集合 $M=\{A|A$ 是集合且 A 不是 A 的元素$\}$。这样的 M 不是空集。但 M 是不是 M 的元素？如果是，那么根据 M 中元素的定义，M 不是 M 的元素！如果不是，那么 M 适合 M 中元素的定义，又得 M 是 M 的元素！总之，这是一个悖论：$M\in M$ 同时又 $M\notin M$!

在处理有限对象时，诸如此类的矛盾并不表现出来，然而一进入无穷世界，这种矛盾就不可避免。现代数学与古典数学相区别的一个主要特征就是处理的对象的无穷性(无论是无穷大还是无穷小)，因而对集合论进行严格处理是必要的。

现代集合论已经非常严密和精确地公理化了。在集合论的公理化形式下，类、成员、相等是不加定义的原始术语。所有公理均由这些原始术语和一阶谓词推演来叙述。集合概念被叙述为：一个类 A 称为一个集合当且仅当存在另一个类 B，使得 A 是 B 的成员。用符号表述就是：类 A 是一个集合$\Leftrightarrow\exists$类 $B:A\in B$。不是集合的类称为本性类。例 1.1.3 中的 M 是一个本性类而不是一个集合。

以下复习一些关于集合运算的内容。这些内容基本上是大家熟悉的。在集合论公理体系中，存在着充分多的公理，保证这些运算在集合上能够施行。

A 称为 B 的子集合，若对 A 中每一个元素 x，皆有 x 属于 B。用符号表述为："$A\subseteq B$"$\Leftrightarrow$"$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$"(读作：$A$ 含于 B 当且仅当对每个 x 属于 A 必有 x 属于 B)。

集合 A 与集合 B 称为相等，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。记为："$A=B$"$\Leftrightarrow$"$(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$"(读作：$A$ 等于 B 当且仅当 A 含于 B 且 B 含于 A)。

不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。$\varnothing\Leftrightarrow\forall x:x\notin\varnothing$(读作：空集当且仅当对任何一个 x 有：x 不属于它)。空集$\varnothing$是任何一个集合 A 的子集。当 $A\subseteq B$ 且 $A\neq\varnothing$、$A\neq B$ 时，称 A 是 B 的真子集。

由集合 A 的所有子集合作为元素构成的集合称为 A 的幂集合，记为 2^A。若 A 含有限个元素，设为 n 个，则 A 的幂集合 2^A 含 2^n 个元素。在讨论以集合为元素的集合时，我们有时为了表明这点而称这种集合为**集簇**。

例 1.1.4　$A=\{1,2,3\}$，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$。

例 1.1.5　$A=\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots\}$是全体自然数组成的集合，则 $2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\cdots,\{1,2\},\{1,3\}\cdots,\{2,3\},\{2,4\},\cdots,\{1,2,3\},\{1,2,4\},\cdots,\cdots\}$，即在 A 中随意取出任意多个数组成的集合都是 2^A 的一个元素。

一些集合 $A_i,i\in I$ 的**并**和**交**分别是指

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I:x\in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的并当且仅当存在 i 属于 I 使 x 属于 A_i）

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I: x \in A_i\}$$

（读作：x 属于 A_i 的交当且仅当对每个 i 属于 I 有 x 属于 A_i）
其中指标集 I 可以是有限的，也可以是无限的。

集合 A 与 B 的**差集**记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$[①]，它由属于 A 但不属于 B 的元素组成：$A-B=\{x|x\in A, x\notin B\}$。当所讨论的所有集合均含在某个固定集合 U 中时，记 $U-A$ 为 A'，称之为 A 的**补集**。

对集合的交、并、补运算，不难验证以下算律：

$$A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

$$A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i', (\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i'$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

1.1.2 映射、积与关系

集合之间的联系是通过映射来实现的。映射概念在数学中是基本的。我们简述映射的基本内容，并通过映射概念定义积与关系。

定义 1.1.1 设 A,B 是两个给定的集合。如果通过某种对应法则 f 使 A 中的每一个元素 a 对应于 B 中某个惟一的元素 b，则称 f 为一个从 A 到 B 的**映射**。记为 $f:A\to B$。b 称为 a 在 f 下的**像**，记为 $b=f(a)$。

两个映射 f_1, f_2 称为相等的，如果它们都是 A 到 B 的映射，且对每个 $a\in A$ 有 $f_1(a)=f_2(a)$。一个映射 f 称为**单射**，如果 $\forall a,a'\in A, a\neq a' \Rightarrow f(a)\neq f(a')$。一个映射 f 称为**满射**，如果 $\forall b\in B$，皆存在 $a\in A$ 使 $b=f(a)$。若 f 既是单射又是满射，则称 f 为一个**一一对应**。

对映射 $f: A\to B$，集合 $f_{\text{Im}}=\{b\in B \mid \exists a\in A: f(a)=b\}$ 称为 f 的**像集**。$f^{-1}(B)=\{a\in A \mid f(a)\in B\}$ 称为 f 的**原像集**。

例 1.1.6 设 A,B 都是含 5 个点的集合，图 1.1 给出 A 到 B 的对应法则 f_1, f_2, f_3, f_4，判断它们是否映射、单射、满射、一一对应。

解 f_1, f_2 不是映射。f_3 是映射但既不是单射也不是满射。f_4 是单射又是满射，从而是一一对应。

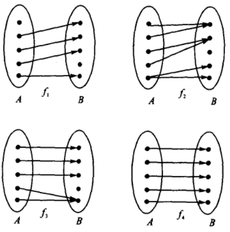


图 1.1 映射示意图

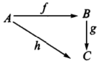
若 $f:A\to B$ 为映射，且 $S\subseteq A$，那么把 S 中的元素按法则 f 对应到 B 中元素，就得到一个 $S\to B$ 的映射 f_1，当然 f_1 在 S 上的作用

① 国标 GB3102.11—1993 规定差集用 $A\backslash B$，不用 $A-B$。考虑到作者和读者的使用习惯，本书没有取消 $A-B$ 的表达方式。

与 f 是一样的。我们称 f_1 为 f 在 S 上的限制，记为 $f|S:S\to B$。若 f 是 $A\to A$ 的映射且 $f(a)=a$，$\forall a\in A$，则称 f 为恒等映射，记为 $1_A:A\to A$。当 $S\subseteq A$ 时，$1_A|S:S\to A$ 称为 S 到 A 的包含映射。

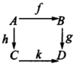
若 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 为映射，则由法则 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 给出的 A 到 C 的映射称为 f 与 g 的合成映射，记为 $gf:A\to C$，$gf(a)=g(f(a))$，$\forall a\in A$。

定义 1.1.2　由映射 f，g 和 h 构成的一个图



如果适合 $gf=h$，即 A 通过 f 映到 B 再通过 g 映到 C 的效果与 A 通过 h 映到 C 的效果是一样的，就称此图为一个交换的映射图。

类似地，若图



满足 $gf=kh$，也称为一个交换的映射图。

定理 1.1.1　设 $f:A\to B$ 为一个映射，且 $A\neq\varnothing$，则

(1) f 为单射$\Leftrightarrow$存在映射 $g:B\to A$，使 $gf=1_A$；

(2) f 为满射$\Leftrightarrow$存在映射 $h:B\to A$，使 $fh=1_B$；

(3) f 为一一对应$\Leftrightarrow$存在映射 $f^{-1}:B\to A$，使 $ff^{-1}=f^{-1}f=1$。

证　首先易知，gf 为单射$\Rightarrow f$ 为单射，gf 为满射$\Rightarrow g$ 为满射，从而(1)，(2)，(3)的"$\Leftarrow$"部分立刻得证。现若 f 为单射，则对每个 $b\in f(A)$ 均有惟一的 $a\in A$ 使 $f(a)=b$。取定一个 $a_0\in A$，作

$$g:B\to A, g(b)=\begin{cases}a, & 若\ b\in f(A)\ 且\ f(a)=b\\ a_0, & 若\ b\notin f(A)\end{cases}$$

可验证 $gf=1_A$。若 f 为满射，则对每个 $b\in f(A)$，$f^{-1}(b)\neq\varnothing$。取一个 $a_b\in f^{-1}(b)$，作

$$h:B\to A,\quad h(b)=a_b$$

可验证 $fh=1_B$。当 f 为一一对应时，f^{-1} 的作法更是显然的。证毕。

定义 1.1.3　设 $\{A_i|i\in I\}$ 是一族集合，I 是它的(非空)下标集合。则集合

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f\mid f\ 是\ I\ 到\ \bigcup_{i\in I}A_i\ 的映射，使对每个\ i\ 有\ f(i)\in A_i\}$$

称为集合族 $\{A_i|i\in I\}$ 的**笛卡儿积**。$\Pi_k:\prod_{i\in I}A_i\to A_k, f\to f(k)$ 称为此笛卡儿积在它的第 k 分量上的**射影**。

例 1.1.7　当指标集 I 是有限集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 时，我们把笛卡儿积 $\prod_{i\in I}A_i=\prod_{i=1}^{n}A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的每个元素 f 写成 n 元组 $(f(1),f(2),\cdots,f(n))$ 的形式，其中每个 $f(i)\in A_i$。特别，$I=\{1,2\}$ 时，笛卡儿积 $A_1\times A_2=\{(f(1),f(2))\mid f(1)\in A_1,f(2)\in A_2\}=\{(a,b)\mid a\in A_1,$

$b\in A_2\}$。而 $A_1\times A_2$ 到 A_1,A_2 的射影分别为 $\Pi_1:(a,b)\to a$ 和 $\Pi_2:(a,b)\to b$。

定义 1.1.4 设 A,B 为集合，$A\times B$ 为 A,B 的笛卡儿积。$A\times B$ 的任何一个子集 R 称为 $A\times B$ 上的**一个关系**。若 $(a,b)\in R$，称 a 与 b 是 **R 相关的**，记为 aRb。

例 1.1.8 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，则 $A\times B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$。取 $A\times B$ 的子集 $R=\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$，则这一关系表示 A 中元素 1 与 B 中的元素 1,2,3 皆 R 相关，而 A 中元素 2 与 B 中元素皆不是 R 相关的。A,B 中元素的 R 相关关系是：$1R1,1R2,1R3$。

定义 1.1.5 设 R 是 $A\times A$ 上的关系，且满足

(1) 自反性：$\forall a\in A,(a,a,)\in R$，

(2) 对称性：$(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R$，

(3) 传递性：$(a,b)\in R,(b,c)\in R\Rightarrow(a,c)\in R$，

则称 R 为一个 A 上的等价关系。$(a,b)\in R$ 时称 a 与 b 在 R 之下等价，记为 aRb。

对每个 $a\in A$，所有与 a 等价的元素组成的集称为 a 的等价类，记为 $\bar{a}\circ\bar{a}=\{b\mid b\in A,bRa\}$。由所有等价类为元素组成的集合称为 A 对于关系 R 的**商集**，记为 A/R。

例 1.1.9 $A=\{1,2,3,4,5\}$。取 $A\times A$ 的子集 $R=\{(1,2),(2,1),(3,5),(5,3),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$，易见 R 是等价关系。等价类 $\bar{1}=\{1,2\}$，$\bar{2}=\{1,2\}=\bar{1}$，$\bar{3}=\{3,5\}$，$\bar{4}=\{4\}$，$\bar{5}=\{3,5\}=\bar{3}$。可见共有 3 个不同的等价类：$\{1,2\},\{3,5\},\{4\}$。从而商集 $A/R=\{\{1,2\},\{3,5\},\{4\}\}$。

定理 1.1.2 集合 A 上的等价关系给出了 A 的一个划分。反之，A 的任一个划分给出了一个 A 上的等价关系。（所谓划分是指 A 分为一些互不相交的非空子集之并：$\bigcup_{i\in I}A_i=A$，而当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$。）

证 若 R 是 A 上的等价关系，则所有不同的等价类 $\{\bar{a}\mid a\in A\}$ 就给出了一个 A 的划分。因为 $\bigcup_{a\in A}\bar{a}=A$ 是显然的，而当 $a\neq b$ 时，易知 $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow aRb$，从而或者 $\bar{a}\cap\bar{b}=\varnothing$，或者 $\bar{a}=\bar{b}$。反之，若 $\{A_i\mid i\in I\}$ 是 A 的一个划分，定义关系 $R:aRb\Leftrightarrow a,b$ 属于同一个 A_i，则易验证 R 是一个等价关系。证毕。

1.1.3 超穷数、势

在数学中遇到的集合（可能带有代数构造或拓扑构造）往往是无穷集。我们简述一下现代数学处理无穷集的思路和方法。

仔细考虑一下，当我们在说“一个集合含有 n 个元素”时是什么意思。它实际上是把集合的元素与集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的数字一一对应起来（设想一个孩子计数他的糖果的情形）。由此，我们得出一个无穷集合含元素“多少”的衡量方法。

定义 1.1.6 两个集合 A,B 之间如果存在一个一一对应的映射 $f:A\to B$，则称 A 与 B 是**等势的集合**，记为 $|A|=|B|$，其中 $|A|,|B|$ 分别表示 A,B 的**势**。设 $|A|=\alpha$，$|B|=\beta$，若 A 与 B 的一个子集等势，称 $\alpha\leqslant\beta$。若 $\alpha\leqslant\beta$ 且 $\alpha\neq\beta$，称 $\alpha<\beta$。

易见等势是一个等价关系。若记 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$，则集合 A 与 I_n 等势 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个元素 $(|A|=n)$。我们把这种与某个 I_n 等势的集合称为有限集合，否则就称为无限集合。人们曾经对无限集合的元素多少不加区分，认为无限都是相等的；而实际上无限数也有不相等的，而

且不相等的无限数比起不相等的有限数来，要多得无可比拟！我们把不是有限数的势称为**超穷数**。下列定理是超穷势大小比较的基础。

定理 1.1.3(Bernstein 定理)　设 A,B 为集合，若 $|A|\leqslant|B|$ 且 $|B|\leqslant|A|$，则 $|A|=|B|$。

证　由条件有 $f:A\to B$ 和 $g:B\to A$ 均为单射。现任取一个 $a\in A$，则 a 在 B 中关于 g 的原像可能不存在(此时称 a 是无前辈的)，也可能有惟一的一个 b 使 $g^{-1}(a)=b$(此时称 b 为 a 的前辈)。同样考虑每个 $b\in B$ 在 A 中关于 f 的原像 $f^{-1}(b)$，它或者不存在(b 无前辈)，或者有一个 $a'\in A$ 使 $f^{-1}(b)=a'$(a'是 b 的前辈)。对 A 中元素 a 用这种方法追寻它的各代前辈，则或者到某个 A 中无前辈的元 a_0 处停止(此时称 a_0 为 a 的祖宗)，或者到 B 中某个无前辈的元 b_0 处停止(b_0 为 a 的祖宗)，或者无休止地追寻下去没有尽头(无祖宗)。依此定义下列集合：

$A_1=\{a|a\in A$ 且在 A 中有祖宗$\}$，

$A_2=\{a|a\in A$ 且在 B 中有祖宗$\}$，

$A_3=\{a|a\in A$ 且无祖宗$\}$，

$B_1=\{b|b\in B$ 且在 A 中有祖宗$\}$，

$B_2=\{b|b\in B$ 且在 B 中有祖宗$\}$，

$B_3=\{b|b\in B$ 且无祖宗$\}$，

则这些集合互不相交，且 $f|A_1$，$f|A_3$ 和 $g|B_2$ 分别是 $A_1\to B_1$，$A_3\to B_3$，$B_2\to A_2$ 的一一对应。定义 $h:A\to B$，

$$h(a)=\begin{cases}f(a), & a\in A_1\cup A_3\\ g^{-1}(a), & a\in A_2\end{cases}$$

则 h 是一一对应，即得 $|A|=|B|$。证毕。

自然数集合 $\mathbf{N}$ 的势记为 $\aleph_0$(读作：阿列夫零)，它不是一个有限势，因为任何一个有限集都不可能与 $\mathbf{N}$ 之间有元素的一一对应。与 $\mathbf{N}$ 等势的集合称为可数集合。全体正偶数$\{2,4,8,\cdots\}$的集合与 $\mathbf{N}$ 是等势的。也就是说，把 $\mathbf{N}$ 中元素去掉一半所得的集合还与 $\mathbf{N}$ 中元素一样多(超穷领域的奇妙现象：一半等于全体！)。当然把 $\mathbf{N}$ 中元素加上一倍所得集合仍与 $\mathbf{N}$ 等势，即 $2\aleph_0=\aleph_0$。更一般，$n\aleph_0=\aleph_0$，$\aleph_0\aleph_0=\aleph_0^2=\aleph_0$，$\aleph_0^n=\aleph_0$。看来不会有比 $\aleph_0$ 更大的无穷数了。然而，下面就是一个。

例 1.1.10　实数集合 $\mathbf{R}$ 的势 $|\mathbf{R}|>\aleph_0$。我们来证明这一事实。假设有从 $\mathbf{N}$ 到$[0,1]$区间的一一对应 f，在$[0,1]$区间中取$[a_1,b_1]\subseteq[0,1]$使 $f(1)\notin[a_1,b_1]$且 $|b_1-a_1|=1/3$。再取$[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$使 $f(2)\notin[a_2,b_2]$且 $|b_2-a_2|=1/3^2$，如此继续下去，由实数的区间套定理知，存在 $a_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subseteq[0,1]$，但 a_0 在 $\mathbf{N}$ 中没有关于 f 的原像。这一矛盾说明 $|\mathbf{N}|\neq|[0,1]|$，从而 $|\mathbf{N}|<|[0,1]|\leqslant|\mathbf{R}|$。再由 Bernstein 定理得到 $|\mathbf{R}|>\aleph_0$。我们记 $|\mathbf{R}|=\aleph_1$。还可证明，$\aleph_1$ 是 $\mathbf{N}$ 的幂集合 $2^{\mathbf{N}}$ 的势。

那么是否有比 $\aleph_1$ 更大的超穷势呢？下列定理给出了回答。

定理 1.1.4　设 A 为集合，2^A 为 A 的幂集合，则 $|A|<|2^A|$。

证　由于 $g:A\to 2^A$，$a\to\{a\}$是一个单射，故 $|A|\leqslant|2^A|$。假如有一一对应 $f:A\to 2^A$。取 A 的子集 $B=\{a|a\in A,a\notin f(a)\}$，则存在 $a_0\in A$ 使 $f(a_0)=B$。但这时 $a_0\in B$ 与 $a_0\notin B$ 都不能成立。这一矛盾说明不可能存在 A 到 2^A 的一一对应，从而 $|A|<|2^A|$。证毕。

由此我们知道，互不相等的超穷数是非常多的。若记$\aleph_1=2^{\aleph_0}$，$\aleph_2=2^{\aleph_1}$，…则$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，…，$\aleph_n$，…直到$\aleph_{\aleph_0}$都是不相等的超穷数，然后还有$\aleph_{\aleph_1}$，$\aleph_{\aleph_2}$，…。

是否存在势β使$\aleph_0<\beta<\aleph_1$，即在$\aleph_0$和$\aleph_1$之间是否还有超穷势存在？著名的连续统假设(Hilbert 第一问题)表明，这样的β不存在。已经证明，这一假设与集合论公理系统中的基本公理是独立的。

1.1.4 代数运算，同态与同构

我们已经有了关于集合、集合的映射、集合的势的基本知识。现在考虑带有运算的集合。

定义 1.1.7 设A,B和C是集合。一个从$A\times B$到C的映射$f:A\times B\to C$称为一个$A\times B$到C的代数运算，记为$(a,b)\to c$或$c=a\circ b$。$A\times A$到A的代数运算称为A上的代数运算或二元运算。

形象地说，一个$A\times B$到C的代数运算就是对A的任一元a和B的任一元b，通过某法则得到C的一个元c。而一个A上的二元运算就是对A的任意两元a,b，有A的另一元c与之对应。

例 1.1.11 取$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$，$C=\mathbf{Q}$，定义$f:A\times B\to C$，$(a,b)\to\frac{a}{b}$，或记为$a\circ b=\frac{a}{b}$，则它是一个$A\times B$到$C$的代数运算(即普通除法运算)。若取$A=\mathbf{R}$，定义$A$上二元运算$f:A\times A\to A$，$(a,b)\to ab$，则它即是$\mathbf{R}$上普通乘法运算。

当A,B为有限集合时，通常用运算表来给出一个代数运算。设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$C=\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$，则下列运算表明确形象地给出了一个$A\times B$到C的代数运算。

$\circ$	b_1	b_2	$\cdots$	b_m
a_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1m}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a_n	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nm}

在考虑代数运算时，意义较大的是A上的二元运算。以下我们考虑A上的二元运算，并以“$\circ$”来表示它。

定义 1.1.8 设$\circ$是集合A上的二元运算。若$\forall a,b,c\in A$，总有$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$，称这个代数运算适合结合律；若$\forall a,b\in A$，总有$a\circ b=b\circ a$，称这个代数运算适合交换律；若$\oplus$是$A$上另一个代数运算，$\forall a,b,c\in A$，总有$a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c)$，则称代数运算$\circ$满足对代数运算$\oplus$的分配律。

例 1.1.12 实数集$\mathbf{R}$上的加法“$+$”，乘法“$\times$”皆是满足结合律、交换律的代数运算，并且乘法满足对加法的分配律(但加法不满足对乘法的分配律！)。n阶实矩阵上的矩阵乘法则是不满足交换律的二元运算。

在考察带有代数运算的集合时，集合之间的映射与这些代数运算的关系就引导出重要的同态、同构概念。

定义 1.1.9 设A,B是两个分别带有代数运算$\circ_A$和$\circ_B$的集合。为简略计，我们以a_1a_2表示$a_1\circ_A a_2$，以b_1b_2表示$b_1\circ_B b_2$而省去运算符号$\circ$。若$f:A\to B$是映射，且$\forall a_1,a_2\in A$，

$f(a_1a_2)=f(a_1)f(a_2)$，则称 f 是 A 到 B 的**代数同态**。f 为单、满射时分别称为单同态、满同态。f 为一一对应时称 f 为 A 到 B 的**代数同构**。这时也称 A 与 B 是代数同构的集合。从 A 到 A 的代数同构称为自同构。

从抽象观点看，代数同构的集合在代数构造上没有什么区别。它们具有同样的关于代数运算的性质。

例 1.1.13　设 $A=\mathbf{Z}$，带有普通加法运算"$+$"。$B=\{0,1,2\}$，B 上的加法运算"$\oplus$"由下表给出：

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

定义 $f:A\to B$，$f(a)=\{a$ 用 3 除所得的余数$\}$。易验证 $f(a_1+a_2)=f(a_1)\oplus f(a_2)$，从而 f 是 A 到 B 的代数满同态。

1.2　群

群结构是一种最基本的代数结构。许多种类的群已被有效地应用到其他数学领域或物理、化学和工程领域。历史上利用群论已解决了许多著名的困难问题，例如项链问题、分子结构计数问题、正多面体着色问题、开关线路计数问题、图的计数问题、数字通信可靠性问题以及几何作图、代数方程求根的问题等。本节叙述群的基本概念、基本的结构定理，并介绍几种有实际背景的群。

1.2.1　半群、群、子群与同态

定义 1.2.1　设 G 是一个非空集合，其上有一个满足结合律的二元运算，则称 G 连同这个二元运算为一个**半群**，记为 $(G,\circ)$，在不会引起混淆时简记为 G。G 中两个元素的乘积 $a\circ b$ 简记为 ab。

若半群 G 还满足：

(1) $\exists e\in G: ae=ea=a$ 对一切 $a\in G$ 成立（e 称为单位元素），

(2) $\forall a\in G, \exists a^{-1}\in G: aa^{-1}=a^{-1}a=e$（$a^{-1}$ 称为 a 的逆元素），

则称 G 为一个**群**。

若群 G 中的二元运算还满足交换律，则称 G 为**交换群**或 **Abel 群**。

简言之，半群就是带有一个满足结合律的二元运算的集合。群就是有单位元且每元有逆元的半群。整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于普通加法成为一个 Abel 群。自然数集合 $\mathbf{N}$ 对于普通乘法是一个半群而不是群。整数集合 $\mathbf{Z}$ 对于普通除法则不构成半群（除法不构成 $\mathbf{Z}$ 上的二元运算）。

群 G 作为集合的势 $|G|$ 称为群 G 的阶。$|G|$ 有限或无限时 G 分别称为有限群或无限群。当 G 是交换群时，其上的二元运算通常用"$+$"表示，单位元素用"0"表示，a 的逆元素用"$-a$"表示。

下面的定理对于群的元素性质有基本的重要性，它是进一步探讨群性质的基础。

定理 1.2.1　设 G 是群，则

(1) 单位元素 e 是惟一的；

(2) $aa=a\Rightarrow a=e$；

(3) $\forall a,b,c\in G, ab=ac\Rightarrow b=c$；同样 $ba=ca\Rightarrow b=c$；(左、右消去律)

(4) $\forall a\in G, a^{-1}$是惟一的；

(5) $\forall a\in G, (a^{-1})^{-1}=a$；

(6) $\forall a,b\in G, (ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$；

(7) $\forall a,b\in G$，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 在 G 中有惟一解 $x=a^{-1}b, y=ba^{-1}$。

证 (1) 若 e' 也是单位元，则 $ee'=e, ee'=e'$，即 $e=e'$。故单位元是惟一的。

(2) $aa=a\Rightarrow a^{-1}(aa)=a^{-1}a=e\Rightarrow a=e$。

(3) $ab=ac\Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)\Rightarrow b=c$。类似地有 $ba=ca\Rightarrow b=c$。

(4) 若 a' 也是 a 的逆元素，则 $aa'=e=aa^{-1}$，由消去律(3)得 $a'=a^{-1}$。

(5) 因为 $a^{-1}(a^{-1})^{-1}=e=a^{-1}a$，由消去律得 $(a^{-1})^{-1}=a$。

(6) 因为 $(ab)(ab)^{-1}=e=(ab)(b^{-1}a^{-1})$，由消去律得 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$。

(7) 因 $a(a^{-1}b)=b=ax$，故由消去律得 $x=a^{-1}b$。同理 $y=ba^{-1}$。证毕。

设 G 是群，$a\in G$，元素 $a^n\in G$ 定义为 n 个 a 的乘积 $\prod_{i=1}^{n}a_i$，其中 $a_i=a(1\leqslant i\leqslant n)$。$a^0$ 定义为单位元 e。a^{-n} 定义为 $(a^{-1})^n$。当 G 是 Abel 群时，以 na 代替 a^n。由归纳法可得：$\forall a\in G, m, n\in\mathbf{Z}$有 $a^m a^n=a^{m+n}, (a^m)^n=a^{mn}$。

例 1.2.1 $Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{m-1}\}$，其中 $\overline{p}$ 表示 p 被正整数 m 除所得的余数。定义其上的运算 $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$。易验证 Z_m 成为 Abel 群，称为模 m 同余类加群。

群理论中对子群的探讨占有重要地位。下面给出子群的定义。

定义 1.2.2 设 G 是群，H 是它的非空子集合且对于 G 的二元运算是封闭的。若 H 对于 G 的这个二元运算是群，则称 H 为 G 的**子群**，记为 $H<G$。

显见群 G 自身及仅由单位元构成的群$\{e\}$都是 G 的子群。这两个子群均称为 G 的平凡子群。当 G 的子群不是平凡子群时，称为 G 的真子群。

定理 1.2.2 设 H 是群 G 的非空子集，则 H 是 G 的子群的充要条件是：$\forall a,b\in H$，有 $ab^{-1}\in H$。

证 必要性是显然的，只证充分性。由于 H 非空，必存在 $a\in H$，于是 $aa^{-1}=e\in H$。对任何 $b\in H$，有 $b^{-1}=eb^{-1}\in H$。故 $\forall a,b\in H$，有 $b^{-1}\in H$，且 $ab=a(b^{-1})^{-1}\in H$，即 H 对二元运算封闭。运算满足结合律是显然的，即得 H 是子群。证毕。

推论 若 G 是群而$\{H_i\mid i\in I\}$是 G 的一族非空子群，则 $\bigcap_{i\in I}H_i$ 是 G 的子群。

G 的任一个子集合 X 不一定是子群。但 G 中必有包含 X 的子群。所有包含 X 的子群之交记为$\langle X\rangle$。由定理 1.2.2 的推论知，$\langle X\rangle$是 G 的子群，称为 X 生成的子群。X 中的元素称为生成元。显见$\langle X\rangle=\{a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_t^{n_t}\mid a_i\in X, n_i\in\mathbf{Z}, t\in\mathbf{Z}\}$。特别地，由一个元素 a 生成的子群$\langle a\rangle=\{a^n\mid n\in\mathbf{Z}\}$。可由一个元素生成的群称为循环群。

下一个重要的基本概念是群同态和群同构。

定义 1.2.3 设 G,H 为两个群。映射 $f:G\to H$，如果对于 G,H 的群运算是代数同态，则称 f 为 G 到 H 的**群同态**。当 f 是代数同构时，称 G 与 H 是**同构的群**，记为 $G\cong H$。同态 $f:G\to G$称为 G 的自同态。同构 $f:G\to G$ 称为 G 的自同构。集合$\{a\in G\mid f(a)=e\in H\}$称为同

态 f 的核，记为 $\mathrm{Ker}f$。集合 $\{b\in H \mid \exists a\in G$ 使 $b=f(a)\}$ 称为同态 f 的像，记为 f_{Im}。

定理 1.2.3 设 $f:G\to H$ 是群同态，则

(1) $f(e_G)=e_H$，其中 e_G, e_H 分别是 G, H 的单位元；

(2) $\forall a\in G, f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}$；

(3) f 为单同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}f=\{e\}$；

(4) f 为同构 $\Leftrightarrow$ 存在逆同态 $f^{-1}: H\to G$ 使 $f\circ f^{-1}=1_H, f^{-1}$。$f=1_G$，其中 $1_H, 1_G$ 分别指 H, G 的恒等同态。

证 (1) $f(e_G)\cdot f(e_G)=f(e_G\cdot e_G)=f(e_G)$，由定理 1.2.1 的(2)得 $f(e_G)=e_H$。

(2) $[f(a)]^{-1}[f(a)]=e_H=f(e_G)=f(a^{-1}a)=f(a^{-1})\cdot f(a)$，由消去律得 $[f(a)]^{-1}=f(a^{-1})$。

(3) 若 f 为单同态，则 $\forall a\in \mathrm{Ker}f$ 有 $f(a)=e_H=f(e)$，从而 $a=e$，即 $\mathrm{Ker}f=\{e\}$。反之，若 $\mathrm{Ker}f=\{e\}$，则当 $f(a)=f(b)$ 时有 $e_H=f(a)[f(b)]^{-1}=f(a)f(b^{-1})=f(ab^{-1})$，从而 $ab^{-1}\in \mathrm{Ker}f$，得 $ab^{-1}=e$，这即是 $a=b$。故 f 为单同态。

(4) 由定理 1.1 知所需的 f^{-1} 存在，易验证 f^{-1} 是群同态。证毕。

1.2.2 变换群、置换群与循环群

我们已经知道了群的抽象定义和最浅显的例子。下面来看几类有实际背景的群，它们同时也说明群这个概念所包含对象的广泛性。

例 1.2.2 考虑中心在 xy 平面的原点，而且边平行于坐标轴的正方形，其顶点依次标记为 1,2,3,4。以 R 表示该正方形绕中心反时针旋转 90°，R^2 表示反时针旋转 180°，R^3 表示反时针旋转 270°，I 表示反时针旋转 360°(相当于旋转 0°)，T_x 表示对 x 轴的反射，$T_{1,3}$ 表示对于过 1,3 的对角线的反射，T_y 和 $T_{2,4}$ 的意义类似于 T_x 和 $T_{1,3}$。令集合 $D=\{R,R^2,R^3,I,T_x,T_y,T_{1,3},T_{2,4}\}$，则 D 中每个元素均是把该正方形变到自身的“变换”。定义其中二元运算为变换的合成：对 $U,V\in D$，$U\circ V$ 是先作变换 V 再接着作变换 U 所得的总变换。这样，D 就成为一个 8 阶的群(它不是 Abel 群)，如图 1.2 所示。

由于每个变换由它在 4 个顶点上的作用完全决定，我们可给出 D 中元素的乘积规则：

$T_x\circ R=T_{1,3}, T_y\circ R=T_{2,4}, T_{1,3}\circ R=T_y, T_{2,4}\circ R=T_x$。由于 $R\circ T_x=T_{2,4}$，而 $T_x\circ R=T_{1,3}$，故 D 不是 Abel 群。

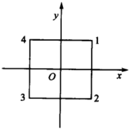


图 1.2 四边形变换群

由上例我们引出一般变换群的概念。

定义 1.2.4 设 A 是一个非空集合(有限或无限)，$G=\{f \mid f$ 是一些 A 到 A 的一一对应映射$\}$，G 中元素 f 称为一一变换。G 中二元运算由映射的合成定义(参见 1.1.2)。若 G 成为一个群，则称 G 为 A 的一个**变换群**。

定理 1.2.4 集合 A 上所有一一变换作成一个变换群 G。

证 由于 A 到 A 的一一对应映射的合成仍为一一对应，从而 G 中二元运算封闭。映射合成的结合律是显然的。单位元素是恒等映射。每个一一对应皆有逆映射作为其逆元素(参见定理 1.1.1)。故 G 成为一个群。证毕。

除了集合 A 上全体一一变换组成的群，还可以有由一些变换组成的群。

例 1.2.3 设 A 是平面上所有点所成集合。G 是 A 上全体一一变换组成的群。G_1 是 A 绕原点的所有旋转组成的集合，G_2 是 A 的所有平移组成的集合，则 G_1，G_2 都成为群，分别称为平面旋转群和平移群，它们都是 G 的子群。

更一般地，n 维线性空间的所有可逆线性变换组成一个群，称为 n 阶线性群。由线性代数知识知，这个群是所有 n 阶可逆矩阵按矩阵乘法所成的群。

可以证明，任何一个群都与某个集合上的变换群同构。这就是说，任意一个抽象群都能在变换群里找到具体的表现。然而变换群的队伍是异常庞大的（只要想想集合的队伍有多大！）。对于有限集合上的变换群，我们称之为**置换群**。置换群在有限群理论中起着重要的作用。

定义 1.2.5 设 A 为含有 n 个元的集合，其上的全体一一变换组成的群称为 **n 次对称群**，记为 S_n。

由于 S_n 中元素 σ 是有限集合 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一一对应映射，它可以写成形如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

的形式，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in A$，且互不相同。显见 $|S_n|=n!$

例 1.2.4 3 次对称群 S_3 可表示如下：

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$$

记 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$，$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$，则

$$\sigma\circ\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\tau\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

可见 $\sigma\circ\tau\neq\tau\circ\sigma$。这表明 S_3 不是 Abel 群。

显然变换群和置换群比较具体，但并不意味着对它的研究就会容易一些。能够比较清楚地予以刻画的第一种抽象群是循环群。我们知道循环群是由一个元素生成的群，它具有形式

$$G=\{a^n\mid n\in\mathbf{Z}\}=\langle a\rangle$$

定理 1.2.5 加法群 $\mathbf{Z}$ 的每个子群 H 都是循环群。$H=\langle 0\rangle$ 或 $H=\langle m\rangle$，其中 m 是 H 中最小正整数。如果 $H\neq\langle 0\rangle$，则 H 是无限群。

证 若 $H=\langle 0\rangle=\{0\}$，则当然是循环群。若 $H\neq\{0\}$，则 H 中必有一个最小的正整数 m，有 $\langle m\rangle=\{km\mid k\in\mathbf{Z}\}\subseteq H$。若 $h\in H$，有除式 $h=qm+r$，其中 $0\leqslant r<m$，这样 $r=h-qm\in H$，由于 m 是 H 中最小正整数，故 $r=0$，得 $h=qm$，因此 $H\subseteq\langle m\rangle$。这就证明了 $H=\langle m\rangle$。显然它是无限群。证毕。

定理 1.2.6 每个无限循环群均同构于加法群 $\mathbf{Z}$。每个 m 阶有限循环群均同构于加法群 Z_m。

证 设 $G=\langle a\rangle$ 是循环群。若 G 是无限循环群，则当 $r\neq s$ 时 $a^r\neq a^s$。我们可定义一个 $\mathbf{Z}$ 到 G 的同构 $\alpha:k\to a^k$，即得 $\mathbf{Z}\cong G$。若 G 是有限循环群，则必存在一个最小的正整数 m 使 $a^m=e$。我们定义一个 Z_m 到 G 的同构 $\beta:\bar{k}\to a^k$，即得 $Z_m\cong G$。证毕。

由此，我们弄清楚了循环群的构造。下一定理将进一步说明循环群的特性。

定义 1.2.6　设 G 为群，$a\in G$，由 a 生成的循环子群 $\langle a\rangle$ 的阶称为 a 的阶，记为 $|a|$。

定理 1.2.7　(1) 循环群必是 Abel 群。

(2) 循环群的同态像和子群都是循环群。

(3) 若 G 为群，$a\in G$，a 的阶为无限，则它生成的循环群 $\langle a\rangle$ 中元素 a^k 是两两不同的。若 a 的阶为有限数 $m>0$，则它生成的循环群 $\langle a\rangle$ 由 m 个不同元素 $a,a^2,\cdots,a^m=e$ 组成，且 $a^{mr}=e$ 对一切 $r\in\mathbf{Z}$ 成立。

证　(1) 由定理 1.2.6 即知。

(2) 设 $G=\langle a\rangle$ 而 $f:G\to K$ 为群同态，则同态像 $f_{\mathrm{Im}}=\langle f(a)\rangle$。由定理 1.2.6 即得循环群的子群仍为循环群。

(3) 显然。证毕。

我们对循环群可以简单清楚地予以刻画。然而不幸的是，即使只由两个元生成的群，其结构就会变得非常复杂。例如它们不一定是 Abel 群了。下面给出进一步研究所需的一些基本工具。

1.2.3　陪集、不变子群与商群

定义 1.2.7　设 H 是群 G 的子群。$\forall a\in G$，集合 $Ha=\{ha|h\in H\}$ 称为 H 在 G 中的一个**右陪集**。集合 $aH=\{ah|h\in H\}$ 称为 H 在 G 中的一个**左陪集**。

一般来说，右陪集 Ha 与左陪集 aH 并不一定相等。如果我们规定 G 上的关系 R：$\forall a,b\in G$，$aRb\Leftrightarrow a$ 与 b 在同一个右陪集中，则有下列结论：

定理 1.2.8　设 G 为群，H 为 G 的子群。

(1) $\forall a,b\in G$，a 与 b 在同一个 H 的右陪集中 $\Leftrightarrow Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H$。$a$ 与 b 在 H 的同一个左陪集中 $\Leftrightarrow aH=bH\Leftrightarrow ba^{-1}\in H$。

(2) 关系"R"是 G 上的等价关系。$\forall a\in G$，a 的等价类就是 Ha。

(3) H 在 G 中全体右陪集之并为 G。任两个右陪集或者相等，或者交为空集。

(4) $\forall a\in G$，$|Ha|=|H|=|aH|$。

(5) 全体右陪集所成集合 R 与全体左陪集所成集合 L 等势，即 $|R|=|L|$。

证　(1) $\forall a,b\in G$，$b\in Ha\Leftrightarrow\exists h\in H:b=ha\Leftrightarrow a=h^{-1}b\Leftrightarrow a\in Hb$。故而 a 与 b 属于同一个右陪集当且仅当 $Ha=Hb$。此外，$ab^{-1}\in H\Leftrightarrow\exists h\in H:ab^{-1}=h\Leftrightarrow\exists h\in H:a=hb\Leftrightarrow a\in Hb\Leftrightarrow Ha=Hb$。关于左陪集的结论可类似证明。

(2) 直接验证可知"R"是等价关系，而由(1)即知 a 的等价类就是 Ha。

(3) 由定理 1.1.2 即得。

(4) 直接验证可知映射 $f:Ha\to H,ha\to h$ 是一一对应，从而 $|Ha|=|H|$。左陪集结论可类似证明。

(5) 映射 $g:R\to L,Ha\to a^{-1}H$ 是一一对应。这是因为 $Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H\Leftrightarrow(a^{-1})^{-1}b^{-1}\in H\Leftrightarrow a^{-1}H=b^{-1}H$，从而 g 是单射。而 g 显然是满射，从而 g 是一一对应，得到 $|R|=|L|$。证毕。

由以上定理，H 在 G 中不同右陪集所成集合的势与不同左陪集所成集合的势是相等的。

定义 1.2.8　设 H 是群 G 的子群，则称 H 在 G 中不同右陪集(或左陪集)所成集合的势为 H 在 G 中的指数，记为 $[G:H]$。

下面我们可以利用右陪集来得到群性质的第一个重要定理。

定理 1.2.9 若 H 是群 G 的子群，则 $|G|=[G:H]\cdot|H|$。特别若 G 是有限群，则 G 中任一元 a 的阶 $|a|$ 必整除 G 的阶 $|G|$。

证 由定理 1.2.8 的(4)知，每个右陪集 Ha 与 H 等势。由定理 1.2.8 的(3)知，$G=\bigcup_{a\in G}Ha$ 且各个 Ha 彼此之交为空集，故 $|G|=[G:H]\cdot|H|$。当 G 是有限群时，a 的阶就是子群 $H=\langle a\rangle$ 的阶，故 $|a|$ 整数 $|G|$。证毕。

由此定理可以知道一个群 G 大致上有一些什么样的子群。尤其对于有限群情形，可以利用它来决定出 G 的子群构造。比如我们可以立刻知道素数阶的群是没有真子群的。

例 1.2.5 素数阶群必是循环群。

事实上，若 $|G|=p$ 为素数，任取 G 中一个元素 $a\neq e$，则 a 生成的循环群 $\langle a\rangle$ 的阶 $|\langle a\rangle|$ 必整除 p，但 p 没有真因子，从而 $|\langle a\rangle|=p$，这意味着 $\langle a\rangle=G$。

下面我们进一步讨论一种特殊的子群。

定义 1.2.9 设 N 为 G 的子群。如果 $\forall a\in G$，有 $Na=aN$，称 N 为 G 的**不变子群**。

不变子群就是使得它的每个右陪集和相应左陪集相等的子群。它的右(左)陪集就称为陪集。不变子群又称为正规子群。

例 1.2.6 群 G 的平凡子群是不变子群。Abel 群的每个子群是不变子群。群 G 中每个指数为 2 的子群 N 都是不变子群，因为此时 N 的右陪集和左陪集都只有两个：右陪集 Ne 与 $Na(a\notin N)$，左陪集 eN 与 $bN(b\notin N)$。而 $Ne=eN$，故 $bN=Na$。

定理 1.2.10 设 N 为群 G 的子群，则 N 是 G 的不变子群 $\Leftrightarrow\forall a\in G, aNa^{-1}=\{ana^{-1}\mid n\in N\}\subseteq N\Leftrightarrow\forall a\in G, aNa^{-1}=N$。

证 N 是 G 的不变子群 $\Leftrightarrow\forall a\in G, Na=aN\Leftrightarrow\forall a\in G, n\in N, \exists n_1\in N: an=n_1a\Leftrightarrow\forall a\in G, n\in N$，有 $ana^{-1}=n_1\in N\Leftrightarrow\forall a\in G, aNa^{-1}\subseteq N$。

为证第二个等价式，设 $n\in N$，则由 $a^{-1}na\in N$ 得 $a(a^{-1}na)a^{-1}\in aNa^{-1}$，此即 $n\in aNa^{-1}$，故 $N\subseteq aNa^{-1}$。它与已证的 $aNa^{-1}\subseteq N$ 合起来即为 $aNa^{-1}=N$。证毕。

不变子群的重要性在于它与群同态有密切关系。群同态的核必是不变子群。反之，不变子群必是一个群同态的核。

定理 1.2.11 (1) 设 N 是 G 的不变子群，并以 G/N 表示 N 在 G 中的全体陪集所成集合，定义其上二元运算为 $(Na)\circ(Nb)=N(ab)$，则 G/N 成为 $[G:N]$ 阶群。

(2) 若 $f:G\to H$ 是群同态，则 $\mathrm{Ker}f$ 是 G 的不变子群。反之，若 N 是 G 的不变子群，则 $\Pi:G\to G/N, \Pi(a)=aN$ 是一个群的满同态，且 $\mathrm{Ker}\Pi=N$。

证 (1) 只要证明定义的二元运算是有意义的：若 $a_1\in Na, b_1\in Nb$，则 $a_1b_1\in N(ab)$。事实上，由 $a_1\in Na, b_1\in Nb$ 有 $a_1a^{-1}=n_1\in N, b_1b^{-1}=n_2\in N$，从而 $(a_1b_1)(ab)^{-1}=a_1b_1b^{-1}a^{-1}=a_1n_2a^{-1}$，而由 N 为不变子群，有 $a_1N=Na_1$，这就导致 $a_1n_2=n_3a_1$，其中 $n_3\in N$。这样得到 $(a_1b_1)(ab)^{-1}=a_1n_2a^{-1}=n_3a_1a^{-1}=n_3n_1\in N$，故 $a_1b_1\in N(ab)$。这证明了所定义的二元运算是有意义的。结合律是显然的。单位元是 Ne。Na 的逆元是 Na^{-1}。故 G/N 成为 $[G:N]$ 阶群。

(2) 若 $x\in\mathrm{Ker}f, a\in G$，则 $f(axa^{-1})=f(a)f(x)f(a^{-1})=f(a)ef(a)^{-1}=e$，从而 $axa^{-1}\in\mathrm{Ker}f$。因此 $a(\mathrm{Ker}f)a^{-1}\subseteq\mathrm{Ker}f$，由定理 1.2.10 知，$\mathrm{Ker}f$ 是 G 的不变子群。反之，若 N 是 G 的不变子群，则 $\Pi:G\to G/N, \Pi(a)=aN$ 显然是满射。易验证 Π 是同态。$\mathrm{Ker}\Pi=$

$\{a\in G|\Pi(a)=N\}=\{a\in G|aN=N\}=\{a\in G|a\in N\}=N$。证毕。

上面定理中的 G/N 称为 G 对于 N 的商群。映射 $\Pi:G\to G/N$ 称为正则满同态或正则射影。

定理 1.2.12(第一同构定理) 若 $f:G\to H$ 是群的满同态，$N=\mathrm{Ker}f$，则 $G/N\cong H$。

证 由定理 1.2.11 知，N 是 G 的不变子群，从而 G/N 是群。定义映射 $\bar{f}:G/N\to H$，$\bar{f}(Na)=f(a)$，则 $\bar{f}(Na\circ Nb)=\bar{f}(N(ab))=f(ab)=f(a)f(b)=\bar{f}(Na)\circ\bar{f}(Nb)$，故 $\bar{f}$ 是同态。显见 $\bar{f}_{\mathrm{Im}}=f_{\mathrm{Im}}$，因而 $\bar{f}$ 是满的。又有 $Na\in\mathrm{Ker}\bar{f}\Leftrightarrow f(a)=e\Leftrightarrow a\in\mathrm{Ker}f=N\rightleftharpoons Ne\Leftrightarrow Na=Ne$，故 $\bar{f}$ 是单同态，得 $\bar{f}$ 是同构。证毕。

这一定理告诉我们，一个群的同态像在抽象意义上只能是它的商群。换言之，群 G 的所有不变子群和商群决定了它的所有群同态。

1.2.4　对称群、交错群与正多边形群

我们来稍详细地考察一下对称群 S_n 和它的某些子群。我们已经知道 S_n 是 I_n 上的全体一一对应构成的群，其中 $I_n=\{1,2,\cdots,n\}$。S_n 中的元素叫作**置换**。

定义 1.2.10 设 $i_1,i_2,\cdots,i_r(r\leqslant n)$ 是 I_n 中的不同元素。如果一个置换把 i_1 映到 i_2，i_2 映到 i_3，$\cdots$，i_{r-1} 映到 i_r，i_r 映到 i_1，而 I_n 中其余元素均映到自身，则称这个置换为一个长度为 r 的轮换，简称为 **r-轮换**，记为 $(i_1i_2i_3\cdots i_r)$。长度为 2 的轮换称为**对换**。

易见，1-轮换 (k) 是恒等置换，即 S_n 中单位元素。r-轮换是 S_n 中 r 阶元素。$(i_1i_2\cdots i_r)$ 的逆元素是 $(i_ri_{r-1}\cdots i_2i_1)$。

例 1.2.7 S_5 中元素 $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&3&5\end{pmatrix}$ 是一个 4-轮换：$\tau=(1\ 4\ 3\ 2)=(4\ 3\ 2\ 1)=(3\ 2\ 1\ 4)=(2\ 1\ 4\ 3)$。若 σ 是一个 3-轮换 $(1\ 2\ 5)$，则 $\sigma\tau=(1\ 2\ 5)(1\ 4\ 3\ 2)=(1\ 4\ 3\ 5)$，$\tau\sigma=(1\ 4\ 3\ 2)(1\ 2\ 5)=(2\ 5\ 4\ 3)$，从而 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$。

如果两个轮换 σ,τ 在其轮换表示式 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_r)$ 和 $\tau=(j_1j_2\cdots j_s)$ 中没有共同数字，即任何一个 i_k 都不与任何一个 j_l 相同，称 σ 与 τ 是不相交的轮换。若干个轮换 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 称为不相交的，是指它们中任何两个都不相交。不难看出，σ 与 τ 不相交时 $\sigma\tau=\tau\sigma$。

定理 1.2.13 S_n 中每个置换都可表示为不相交的轮换之积。

证 设 $\sigma\in S_n$，我们对使得 $\sigma(r)\neq r$ 的元素个数用归纳法。若 σ 是恒等置换，即使得 $\sigma(r)\neq r$ 的元素个数为 0 时结论显然成立。现设对于有 $k-1$ 个使得 $\sigma(r)\neq r$ 的置换结论成立，来看 σ 有 k 个使得 $\sigma(r)\neq r$ 的元素时的情形。任取一个 r_1 使 $\sigma(r_1)\neq r_1$，记 $r_2=\sigma(r_1)$，再找 $\sigma(r_2)=r_3$，如此继续：$r_1\to r_2\to r_3\to\cdots\to r_s$，由于 I_n 中元素有限，必存在一个 r_s 使 $\sigma(r_s)$ 是 $r_1,r_2,\cdots,r_{s-1}$ 中的某一个。而此时必有 $\sigma(r_s)=r_1$，因为 $r_2,r_3,\cdots,r_{s-1}$ 皆已有别的原像了。显然 $s\leqslant k$。如果 $s=k$，则 σ 就已是一个轮换；如果 $s<k$，则 $\sigma=(r_1r_2\cdots r_k)\sigma_1$，而 σ_1 使得 $\sigma_1(r)\neq r$ 的元素个数为 $s-k$，按归纳假设 σ_1 可表为不相交轮换之积。这样 σ 就表成了不相交轮换之积。证毕。

推论 S_n 中每个置换均可写为对换之积。

证 由本定理知，只需证明每个轮换是对换之积，而这是易得的：$(r_1)=(r_1\ r_2)(r_2\ r_1)$，$(r_1\ r_2\cdots\ r_s)=(r_1\ r_s)(r_1\ r_{s-1})\cdots(r_1\ r_3)(r_1\ r_2)$。证毕。

置换 $\sigma\in S_n$ 若可写成偶数个对换之积，则称 σ 为**偶置换**。若可写成奇数个对换之积，则称

之为**奇置换**。可以证明，一个置换不能同时为偶置换和奇置换。S_n 中全体偶置换所成集合记为 A_n，它成为 S_n 的子群，称为 n 次交错群。

定义 1.2.11 若群 G 没有真不变子群，则称 G 为单群。

下一定理是交错群的一个重要性质，但证明较繁，此处从略。

定理 1.2.14 $n\neq 4$ 时交换群 A_n 是单群。

例 1.2.8 S_4 的全体元素用轮换表示为 $S_4=\{(1),(1\ 2),(3\ 4),(1\ 3),(2\ 4),(1\ 4),(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3),(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$，共有 24 个元。$A_4=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\}$，共有 12 个元。其中 $N=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$ 是 A_4 的一个真不变子群。

例 1.2.9 设 $n\geqslant 3$。P_n 表示正 n 边形。$P_n\to P_n$ 的一一对应若使距离不变，且把相邻顶点变到相邻顶点，则称为一个对称。易知每个对称由顶点的一一对应完全决定。把 P_n 的顶点加以标号(如图 1.3 所示)，则每个对称成为 S_n 的一个元素。P_n 上全体对称按映射合成组成一个群，它是 S_n 的子群，称为正 n 边形群，记为 D_n。

现以 f 表示 P_n 绕中心旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 弧度，以 g 表示对经过中心和顶点 1 的直径所作反射，则 D_n 是由 f 和 g 生成的。$f=(1\ 2\ 3\ 4\ \cdots\ n)$，$g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2\end{pmatrix}$，且 $f^n=(1)$，$g^2=(1)$。由此可知 $D_n=(f,f^2,\cdots,f^n,fg,f^2g,\cdots,f^ng)$，即 D_n 为 $2n$ 阶群。

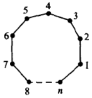


图 1.3 正 n 边形群

1.2.5 群论的一些应用实例

为使读者对群论在近代物理、化学、计算机科学、数字通信和系统工程等领域的应用有所了解，本小节介绍群论应用的几类实例。

首先，引入群论中的一个概念，即群在集合上的作用。

定义 1.2.12 设 G 是一个群，Ω 是一个集合。若对任意 $g\in G$，g 作用于 Ω 的每个元素 x 得到 $g(x)\in\Omega$，且满足：(1) $e(x)=x$，$\forall x\in\Omega$ 成立，此处 e 为群 G 的单位元，(2) $g_1g_2(x)=g_1(g_2(x))$，$\forall x\in\Omega$，$g_1,g_2\in G$ 成立，则称群 G 作用在集合 Ω 上。$g(x)$ 称为 **g 对 x 的作用**。

定义 1.2.13 设群 G 作用在集合 Ω 上。取定 $a\in\Omega$，记 $\Omega_a=\{g(a)\mid g\in G\}$，则称 Ω_a 为 Ω 在 G 作用下的一个轨道，a 称为此轨道的**代表元**。

若定义 Ω 中元素之间的关系"$\sim$"为 $a\sim b\Leftrightarrow$ 存在 $g\in G$ 使 $g(a)=b$，则 $\sim$ 是 Ω 上一个等价关系。轨道 Ω_a 就是等价类 $\bar{a}$，从而 Ω 在 G 作用下划分为轨道的并。

设 $g\in G$，$a\in\Omega$，若 $g(a)=a$，称 a 为 g 的一个不动点。记 $G_a=\{g\mid g\in G,g(a)=a\}\subseteq G$，则称 G_a 为 a 的**固定子群**(或**迷向子群**)。易证 G_a 是 G 的子群。

定理 1.2.15 设群 G 作用于集合 Ω，则有

(1) $|\Omega_a|=[G:G_a]$，$\forall a\in\Omega$ 成立；

(2) $|G|=|\Omega_a||G_a|$，$\forall a\in\Omega$ 成立；$|\Omega|=\sum\limits_{a\in\Omega}[G:G_a]$，其中和式对不同轨道的代表元求和。

证 (1) 设 $S=\{gG_a \mid g\in G\}$，由 $\Omega_a=\{g(a)\mid g\in G\}$，可作映射 $\varphi:\Omega_a\to S, g(a)=gG_a$，且 $g_1(a)=g_2(a)\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2(a)=a\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2\in G_a\Leftrightarrow g_1G_a=g_2G_a$，从而 φ 是有定义的映射且为单射。又 φ 显然为满射，即得 $|\Omega_a|=|S|=[G:G_a]$。

(2) 由定理 1.2.2 及本定理的(1)即得。证毕。

定理 1.2.16 设有限群 G 作用于有限集 X 上，则 X 的轨道数目为

$$N=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x(g)$$

其中 $x(g)$ 为元素 g 在 X 上不动点数目，和式对 G 中每个元素求和。

证 令

$$E_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ g_i(a_j)=a_j\\ 0, & 当\ g_i(a_j)\neq a_j\end{cases}$$

则 $\sum\limits_{j}E_{ij}=|G_{a_j}|$，$\sum\limits_{i}E_{ij}=x(g_i)$，从而

$$\sum_{a\in X}|G_a|=\sum_i\sum_j E_{ij}=\sum_j\sum_i E_{ij}=\sum_{g\in G}x(g)$$

设 X 在 G 作用下的轨道为 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_N$，则有

$$\sum_{a\in X}|G_a|=\sum_{k=1}^{N}\sum_{a\in\Omega_k}|G_a|$$

再由 $G_{g(a)}=gG_ag^{-1}$ 得 $|G_{g(a)}|=|G_a|$，故有

$$\sum_{a\in\Omega_k}|G_a|=|\Omega_k||G_a|=|G|$$

得到

$$\sum_{a\in X}|G_a|=\sum_{k=1}^{N}|G|=N|G|=\sum_{g\in G}x(g)$$

最后即得

$$N=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x(g)$$

证毕。

现在我们可以给出一些实际问题的解法了。

1. 项链问题

项链问题的一般提法为：设有 n 种颜色的珠子，要制成有 m 颗珠子的项链，问可制成多少种不同种类的项链？

这里所说不同种类的项链，指两个项链无论怎样旋转与翻转都不能重合。当 n 与 m 较小时，可用枚举法解决。例如，用黑白两种颜色的珠子制成有 5 颗珠子的项链，其有 8 种不同类型。

当 n 与 m 很大时，用枚举法就很难解决了，因而必须寻找更有效的可解决任意正整数 n 与 m 的情形的方法。采用群论方法可完全解决此问题，且至今尚未发现其他更简单和更有效的方法。

设 $X=\{1,2,\cdots,m\}$ 代表 m 颗珠子的集合。把它们顺序排列组成一个项链。由于每颗珠子标有号码，我们称这种项链为有标号的项链。$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 为 n 种颜色的集合。则每个映射 $f:X\to A$ 代表一个有标号的有颜色项链。令 $\Omega=\{f\mid f:X\to A\}=A^X$，它是所有有标号有颜色项链的集合，显然 $|\Omega|=|A|^{|X|}=n^m$ 是全部这种项链的个数。

现在考虑多边形群 D_m 对集合 Ω 的作用。设

$$g=\begin{pmatrix}1\ 2\ \cdots\ k\ \cdots\ m\\ i_1\ i_2\ \cdots i_k\ \cdots\ i_m\end{pmatrix}\in D_m,\quad f=\begin{pmatrix}1\ 2\ \cdots\ k\ \cdots\ m\\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_k\ \cdots c_m\end{pmatrix}\in\Omega$$

其中 $c_k\in A$。定义 g 对 f 的作用为

$$g(f)=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & \cdots & g(m)\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_1\ i_2\ \cdots\ i_m\\ c_1\ c_2\ \cdots\ c_m\end{pmatrix}=fg^{-1}$$

则 $e(f)=f$，$g_1g_2(f)=f(g_1g_2)^{-1}=fg_2^{-1}g_1^{-1}$，$g_1(g_2(f))=g_1(fg_2^{-1})=fg_2^{-1}g_1^{-1}$，所以 $g_1g_2(f)=g_1(g_2(f))$，因此是一个群对集合的作用。其直观意义是，$g\in D_m$ 对 f 的作用就是对项链的点号作一个旋转变换或翻转变换，因而有

$$g\in D_m \text{ 使 } g(f_1)=f_2\Leftrightarrow f_1 \text{ 与 } f_2 \text{ 是同一类型的}\Leftrightarrow f_1 \text{ 与 } f_2 \text{ 属于同一轨道}$$

因此，每一类型的项链对应一个轨道，不同类型项链数目就是 Ω 在 D_m 作用下的轨道数目，可用定理 1.2.16 求解。

下一个关键问题是：$\forall g\in D_m$ 如何求 g 在 Ω 上的不动点数 $\chi(g)$，这与 g 的置换类型有关。设 g 是一个 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots m^{\lambda_m}$ 型置换。g 的轮换分解式可表为

$$g=\underbrace{(*)\cdots(*)}_{\lambda_1\text{个}}\underbrace{(*\ *)\cdots(*\ *)}_{\lambda_2\text{个}}\cdots$$

可以证明

$$g(f)=f\Leftrightarrow \text{对应上式中同一轮换中的珠子有相同的颜色}$$

例如，设 $g=(12)(36)(45)\in D_6$，$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}$，则

$$g(f_1)=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6)\\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3\\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}=f_1$$

故 f_1 是 g 的一个不动点。反之，若对应 g 的轮换分解式中某个轮换中号码的珠子有不同的颜色，例如 $f_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}$，则

$$g(f_2)=\begin{pmatrix}g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6)\\ a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ a_2 & a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_2\end{pmatrix}\neq f_2$$

所以 f_2 不是 g 的不动点。不难对上述论断作一般的证明，此处不再赘述。

下面我们来进一步计算 $\chi(g)$。$\chi(g)=|\{f\mid f\in\Omega,g(f)=f\}|$，而满足 $g(f)=f$ 的 f，对应于 g 的同一轮换中的珠子的颜色必须相同，因而每一个轮换中的珠子颜色共有 n 种选择。而 g 所含的轮换个数为 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m$，所以满足条件 $g(f)=f$ 的项链颜色有 $n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}$ 种选择，故

$$\chi(g)=n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}$$

应用定理 1.2.15 就得项链的种类数为

$$N=\frac{1}{|D_m|}\sum_{g\in D_m}n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}\qquad (g\text{ 为 }1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots m^{\lambda_m}\text{ 型})$$

其中，和式是对 D_m 中每一个置换求和。上式可进一步表为

$$N=\frac{1}{|D_m|}\sum_{[1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots m^{\lambda_m}]}c(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)n^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m}$$

其中，$c(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$为同一类型的群元素个数，和式是对所有可能的不同置换类型求和。

例 1.2.10　用 3 种颜色制成有 6 颗珠子的项链，可制成多少种？

解　由上面的分析，只需按类型计算每一个群元素的不动点数。$m=6$，群为 D_6，$|\Omega|=3^6$。

1^6 型置换有 1 个，每一个元素的不动点数为 $\chi(g)=3^6$。$1^2 2^2$ 型置换有 3 个，每一个元素的不动点数为 $\chi(g)=3^4$。2^3 型置换有 4 个，每一个元素的不动点数为 $\chi(g)=3^3$。3^2 型置换有 2 个，每一个元素的不动点数为 $\chi(g)=3^2$。6^1 型置换有 2 个，每一个元素的不动点数为 $\chi(g)=3$。所以

$$N=\frac{1}{12}(3^6+3\times 3^4+4\times 3^3+2\times 3^2+2\times 3)=92$$

例 1.2.11　用 3 颗红珠和 6 颗白珠制成一个项链，问可以制成多少种不同的项链？

解　这个问题与项链问题的一般提法稍有不同，但可用同样方法来分析。

设 Y 是所有带标号的由 3 颗红珠和 6 颗白珠做成的项链的集合，可算出 $|Y|=\binom{9}{3}=84$。群 D_9 作用于集合 Y 上，不同的轨道数目就是所要求的项链的种类数。

为计算 D_9 中每一个元素在集合 Y 中的不动点数，可列出表 1.1。

表 1.1

群元素类型	同一类群元素个数	$\chi(g)$	$\sum\chi(g)$
1^9 型	1	84	84
$1^1 2^4$ 型	9	4	36
3^3 型	2	3	6
9^1 型	6	0	0
$\sum$	18		$\sum\chi(g)=126$

所以 $N=\frac{126}{18}=7$。这 7 种不同的项链如图 1.4 所示。

在上面的计算过程中，关键是计算每一个群元素的不动点数，例如对于 3^3 型元素，它的不动点共有 3 个，如图 1.5 所示。

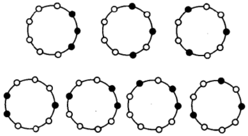


图 1.4　不同的项链

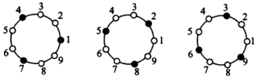
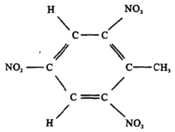


图 1.5　不动点计数

2. 分子结构计数问题

设在苯环上结合 H，或 CH_3，或 NO_2，问可形成多少种不同的化合物？



(TNT)

图 1.6 分子结构图

这个问题可分两种情况来考虑。第一种情况，如果把苯环中各连接键看作是等同的，则分子结构问题就是 3 种颜色的 6 颗珠子的项链问题。第二种情况，如果把苯环中的连接键看作不同，单键与双键交替时（图 1.6），则需另外考虑。

例 1.2.12 设苯环上碳原子之间是由单键与双键交替连接的，在每一个碳原子上结合 H，或 CH_3，或 NO_2，问可形成多少种不同的物质（其中有一种化合物为图 1.6 所示的 TNT 的分子结构）？

这个问题与项链问题的不同之处在于旋转群 G。由于两个分子重合时，必须经过旋转后单键与单键重合，双键与双键重合，故

$$G=\{(1),(135)(246),(153)(264),(12)(36)(45),(14)(23)(56),(16)(25)(34)\}\subsetneqq D_3$$

全部有标号的分子数为 3^6。G 作用于有标号的分子结构上的不动点数计算见表 1.2。所以

$$N=\frac{1}{6}\times 3^2\times 92=138$$

即共可形成 138 种不同的物质。此数比把各键看作等同时要大，因为不对称性增加了。

表 1.2

群元素类型	同一类型群元素个数	$\chi(g)$	$\Sigma\chi(g)$
1^6 型	1	3^6	3^6
3^2 型	2	3^2	2×3^2
2^3 型	3	3^3	3^4
Σ	6		$3^2\times 92$

3. 开关线路的计数问题

一个具有两种状态的电子元件称为一个开关。它可以是一个普通开关或联动开关。每一个开关的状态由一个开关变量来表示。例如用 A 表示一个开关变量，用 0，1 表示一个开关的两个状态，则开关变量 A 的取值是 0 或 1。

由若干个开关 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 组成的一个线路称为开关线路，一个开关线路也有两个状态，接通用 1 表示，断开用 0 表示，它的状态由各个开关 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的状态决定，因而可用一个函数 $f(A_1,A_2,\cdots,A_k)$ 来表示，f 的取值是 0 或 1，称 f 为开关函数，每一个开关线路对应一个开关函数。

设 $S=\{0,1\}$，则开关函数 $f(A_1,A_2,\cdots,A_k)$ 是 $S\times S\times\cdots\times S$ 到 S 的一个映射。不难得出，k 个开关变量的开关函数共有 2^{2^k} 个。例如当 $k=2$ 时共有 16 个开关函数，见表 1.3。

但是不同的开关函数可能对应于相同的开关线路，例如图 1.7 中的两个开关线路对应两个开关函数，但这两个开关线路本质上是相同的。因此，我们的问题是由 n 个开关可组成多少种本质上不同的开关线路？

表 1.3　$k=2$ 的开关函数

A B	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

(表头 $f_1,\cdots,f_{16}$ 上方合并标注为 $f(A,B)$)

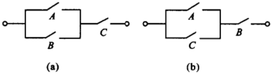


图 1.7　开关线路

设 $X=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$G=S_n$ 是 X 上的对称群。令 $\Omega=\{f_1,f_2,\cdots,f_m\}$，$m=2^{2^n}$ 是 X 上的所有开关函数的集合。定义 $\sigma\in G$ 对 $f\in\Omega$ 的作用为 $\sigma(f)=f\sigma$，对任何 $A_i\in X$ 有 $\sigma(f)(A_i)=f(\sigma(A_i))$，则由 $\sigma(f_1)=\sigma(f_2)$ 可得 $f_1=f_2$，故 G 是作用 Ω 上的置换群。f_1 和 f_2 对应于本质上相同的开关线路的充要条件是它们在 G 的作用下在同一轨道上，因而有

$$\text{本质上不同的开关线路的数目} = \Omega \text{ 在 } G \text{ 作用下的轨道数}$$

故可用定理 1.2.16 解决此问题。

例 1.2.13　求 $k=3$ 的开关线路的数目。

解　$G=S_3$。首先，我们来看如何计算 G 中元素 g 的不动点数 $\chi(g)$。例如，要求 $g_1=(12)$ 的不动点数 $\chi(g_1)$，即满足 $g_1(f)=f$ 的开关函数数目，这时要对 f 附加以下条件

$$f(0,1,A_3)=f(1,0,A_3)$$

有 6 个函数值 $f(0,0,0)$，$f(0,0,1)$，$f(0,1,0)$，$f(0,1,1)$，$f(1,1,0)$，$f(1,1,1)$ 可任意取值，因而共有 2^6 个函数在 g_1 的作用下不动，所以 $\chi(g_1)=2^6$，类似可求得其他元素的不动点数，见表 1.4。所以

$$N=\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\chi(g)=\frac{480}{6}=80$$

即共有 80 种开关线路。

表 1.4　S_3 作用在 Ω 上不动点数

群元素类型	$\chi(g)$	此类群元素个数	每类群元素的不动点数之和
1^3 型	$2^{2^3}=256$	1	256
$1^1 2^1$ 型	2^6	3	192
3^1 型	2^4	2	32
		$\lvert G\rvert=6$	$\sum\chi(g)=480$

4. 图的计数问题

首先给出两个图的同构的概念。设 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$ 为两个图，若存在双射 σ：$V_1\to V_2$ 满足

$$(v_i,v_j)\in E_1\Leftrightarrow(\sigma(v_i),\sigma(v_j))\in E_2$$

则称 G_1 与 G_2 同构。

直观上看，两个同构的图除点号有区别外是相同的。下面讨论如何计算不同构的图的数目。为此，我们要进一步描述此问题。

设 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 为 n 个点的集合，$Y=\{\{i,j\}\mid i,j\in V,i\neq j\}$ 是 V 的二元子集的集合，$A=\{0,1\}$，则每一个映射 $g:Y\to A$，对应一个图 $G=(V,E)$，其中 $E=\{\{v_i,v_j\}\mid\{v_i,v_j\}\in Y$ 且 $g(\{v_i,v_j\})=1\}$，全部 Y 到 A 的映射的集合 $\Omega=\{g\mid g:Y\to A\}=A^Y$。我们用 Ω 同时表示 n 个点上的全部图的集合，则 $|\Omega|=|A|^{|Y|}=2^{\binom{n}{2}}$，$\Omega$ 中的图的点都是有标号的。

下面考虑不同构的图的数目。设 S_n 是 n 次对称群，定义 S_n 对 Ω 的作用为：$\forall\sigma\in S_n$，$\forall G=(V,E)\in\Omega$，σ 对 G 的作用为 $\sigma(G)=(V,\sigma(E))$，其中 $\sigma(E)=\{\{\sigma(i),\sigma(j)\}\mid\{i,j\}\in E\}$。显然 $\sigma(G)$ 与 G 是同构的，它们在同一轨道上。因而不同构的图的数目，就是 S_n 作用于 Ω 上的轨道数，可用定理 1.2.16 求得。下面的关键问题是求每一个元素 $\sigma\in S_n$ 在 Ω 上的不动点数，我们用一个具体例子来说明计算方法。

例 1.2.14 求 4 个点的不同构的图的个数。

解 设 $\Omega=\{(V,E)\mid|V|=4\}$，考虑 S_4 对 Ω 的作用，计算 S_n 中每一个元素的不动点数。

对元素 e。$\chi(e)=|\Omega|=2^{\binom{4}{2}}=2^6=64$。

对 $1^2 2^1$ 型元素。例如 $\sigma=(12)(3)(4)$，若 G 是 σ 的不动点 $\sigma(G)=G$，则 G 所对应的映射 $g:Y\to A$ 应有以下限制

$$g(\{1,3\})=g(\{2,3\}),\quad g(\{1,4\})=g(\{2,4\})$$

因而 Y 中的元素可自由选择函数值的个数为 4，即为 $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}$，所以 $\chi(\sigma)=2^4$。

对 $1^1 3^1$ 型元素。例如 $\tau=(123)(4)$，若 G 满足 $\tau(G)=G$，则 G 所对应的映射 $g:Y\to A$ 必须满足

$$g(\{1,2\})=g(\{2,3\})=g(\{3,1\}),\quad g(\{1,4\})=g(\{2,4\})=g(\{3,4\})$$

故 Y 中的元素的像可自由选择的元素个数只有 2 个，所以 $\chi(\tau)=2^2$。

对 2^2 型元素。例如 $\alpha=(12)(34)$，类似的分析可得 $\chi(\alpha)=2^4$。

对 4^1 型元素。例如 $\beta=(1234)$，类似的分析可得 $\chi(\beta)=2^2$。

由定理 1.2.16 得

$$\begin{aligned}N=&\frac{1}{24}(2^6+6\times2^4+8\times2^2+3\times2^4+6\times2^2)=\\&\frac{2^3}{24}(2^3+6\times2+4+3\times2+3)=\\&11\end{aligned}$$

5. 多项式编码方法及其实现

数字通讯在现代科学技术中起着十分重要的作用，在许多场合下希望传递的数字不出任何误差。例如地面与空间运载工具之间的通讯，即使一位数字误差都可能出大事故。在计算机之间的数字传递，也希望没有任何误差。我们都有这样的经验：在输入程序时，哪怕是错一个标点，这个程序便运转不起来或出错。然而另一方面由于设备、天气、操作等方面的原因，

在传送信息过程中难免出现误差，如何解决这一矛盾呢？解决这一问题的第一个方法是设法判断所接收到的信息是否有错误，如有错误要求发送者重发这一信息。为了便于接收者检验错误，可对原信息进行适当的加工，为了说明这个问题我们要引进一些概念。

设用一个 k 位的二进制数码表示一个信息，称为一个 k 位信息码。对每个信息码附加 $n-k$ 位用于检错的数字构成一个 n 位数码，称为一个码词。这种码称为 (n,k)-码。由信息码得到码词的过程称为**编码**(encoding)。接收者收到码词经过检错后取出信息，此过程称为**译码**(decoding)。

最简单的检错码是奇偶性检错码。例如我们要发送两位二进制的信息码，可在第一个信息码上加一位检验数字使各位数之和是偶数

信息码		检验数字
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

每个码词由三位数字组成。当接收者收到码词后，首先检验各位数字之和是否是偶数；若和为奇数，则此信息必有错，应重发。

第二种方法是设计一种所谓"纠错码"，使接收者能按一定规则纠正收到的信息中可能出现的错误。最简单的纠错码是重复码，在发送时将每一位数字重复 3 遍以上，例如

信息码	码词
0	0 0 0
1	1 1 1

接收者收到码词后只需检查三位数字是否相同，如果是两个 0 一个 1，则认为这一信息是 0，反之，两个 1 一个 0，则认为这一信息是 1。用重复码所需发送的码词的长度是信息码的至少三倍。

纠错码是编码理论的一个重要内容。已有很多设计纠错码的方法。用群论方法得到的编码称为群码。下面我们简略介绍一种多项式编码。

设信息码的长度为 k，码词长度为 n，我们要设计一种 (n,k)-码。

设要传送的信息码为 $b_0b_1b_2\cdots b_{k-1}$，令

$$m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{k-1}x^{k-1} \in Z_2[x]$$

称为信息码多项式。

又设码词为 $a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}$，令

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in Z_2[x]$$

称为码词多项式。

下面给出一种方法，将每一个信息码多项式按一定规则得到对应的码词多项式，从而把每一个信息码变为码词。

首先任选一个 $n-k$ 次多项式 $p(x) \in Z_2[x]$ 作为生成多项式。设 $m(x)$ 是信息码多项式，用 $p(x)$ 除 $x^{n-k}m(x)$ 所得的余式为 $r(x)$，即

$$x^{n-k}m(x) = q(x)p(x) + r(x), r(x) = 0$$

或

$$\deg(r(x)) < n-k$$

然后令 $$v(x)=r(x)+x^{n-k}m(x)$$
则 $p(x)\mid v(x)$，$v(x)$就作为码词多项式，它的系数就是码词。这样，把每一个信息码通过以上的多项式运算变为码词。其过程可用例子简述如下。

设我们要设计一种(7,3)检错码。选定一个 $n-k=4$ 次多项式作为生成多项式。例如，生成多项式 $p(x)=1+x^2+x^3+x^4$

信息码$=101$

信息码多项式 $m(x)$ $=1+x^2$

$x^4m(x)$ $=x^4+x^6$

$r(x)$ $=1+x$

码词多项式 $v(x)$ $=1+x+x^4+x^6$

码词 $=\underbrace{1100}_{\text{检验数字}}\quad\underbrace{101}_{\text{信息}}$

对每一个信息码都可作以上计算求得对应的码词。接收者收到码词后，先写出收到的码词多项式 $u(x)$，然后检验 $p(x)$能否整除 $u(x)$，若 $p(x)\mid u(x)$，则此信息无错。否则信息有错。

例 1.2.15 设生成多项式 $p(x)=1+x^2+x^3+x^4$。检验以下两个码词是否有错？(1) 1011011；(2) 1100101。

解 只需作多项式除法

$$\begin{array}{r|l} & x^2+1 \\ \hline x^4+x^3+x^2+1 & x^6+x^5+\qquad x^3+x^2+1 \\ & x^6+x^5+x^4\qquad +x^2 \\ \hline & \qquad x^4+x^3\qquad +1 \\ & \qquad x^4+x^3+x^2+1 \\ \hline & \qquad\qquad x^2 \end{array}$$

故码词(1)有错。类似可知码词(2)无错。

例 1.2.16 设生成多项式 $p(x)=1+x+x^3$，编出所有的(6,3)码。

解 用上述方法可求出所有的(6,3)-码，如表 1.5 所示。

需要指出的是，当收到的码词多项式$u(x)$不能被 $p(x)$整除时，则此码词必有错。但若有 $p(x)\mid u(x)$，这时收到的码词并非一定无错，也有可能错误位数多而检查不了。例如在 1.2.16 的(6,3)-码中，如在传送时同时产生三位误差，则可能由这一个码词变成另一个码词，但这种发生多位错误的概率很小。

表 1.5

信息	码词	
	检验数字	信息码
0 0 0	0 0 0	0 0 0
1 0 0	1 1 0	1 0 0
0 1 0	0 1 1	0 1 0
0 0 1	1 1 1	0 0 1
1 1 0	1 0 1	1 1 0
1 0 1	0 0 1	1 0 1
0 1 1	1 0 0	0 1 1
1 1 1	0 1 0	1 1 1

读者可能会想，用这种编码方法所需的计算工作量和操作工作量会大大增加，实在太不方便了。幸运的是，可设计一种专门的线路，无

需作任何多项式的运算，操作员发报时也只需打信息码就可以了，线路会自动转换成由 $p(x)$ 生成的码词。接收时也有专门线路自动检验是否有错。下面举例说明。

设 $p(x)=1+x+x^3$，可设计一个发送线路如图 1.8 所示。其中，符号⊕为模 2 加法器；X^i 为单位延时器，将输入的信息延迟一个单位时间再输出；或门，$0+0=0, 0+1=1, 1+1=1$。

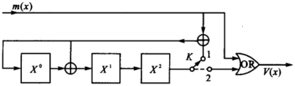


图 1.8 $p(x)=1+x+x^3$ 的编码线路

操作步骤：(1) 开关 K 接通 1，并打入信息码。(2) 输完信息码后将 K 拨向 2。对于此例，详细步骤如表 1.6 所示。

表 1.6 编码过程

步 骤	待输入的信息码	寄存器状态 $X^0X^1X^2$	输出的码词
0	0 1 1	0 0 0	0
1	0 1	1 1 0	1
2	0	1 0 1	1 1
3		1 0 0	0 1 1
4	K 倒向 2	0 1 0	0 0 1 1
5		0 0 1	0 0 0 1 1
6		0 0 0	1 0 0 0 1 1（检验数字 1 0 0；信息码 0 1 1）

我们可设计一个接收时的检错线路。设接收到的信息为 100110。检错过程如表 1.7 所示。

表 1.7 检错过程

步 骤	接收到的等待检错的码词 $u(x)$	寄存器内容 $X^0X^1X^2$
0	1 0 0 1 1 0	0 0 0
1	1 0 0 1 1	0 0 0
2	1 0 0 1	1 0 0
3	1 0 0	1 1 0
4	1 0	0 1 1
5	1	1 1 1
6		0 0 1

由于最后信息接收完后寄存器内的数码不全为 0，故 $p(x)\nmid u(x)$，所以可断定传输过程中发生了错误。

1.3 环、域与代数

除了群之外，另一个基本代数对象是环。本节引入环、域与代数的基本概念，并讨论它们的若干最基本性质。同时还将介绍几种重要的环与域。学习本节要克服的主要困难是，需要在短时间内熟悉大量术语。

1.3.1 环、子环、除环与域

定义 1.3.1 设 R 是一个非空集合。若 R 上有两个二元运算（通常表示为加法"+"和乘法"·"），使得

(1) $(R,+)$ 是 Abel 群，

(2) $(R,\cdot)$ 是半群，

(3) $\forall a,b,c\in R, a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc$（乘对加的左、右分配律），

则称 R 为一个**环**。

如果 R 对乘法还适合交换律则称为交换环。如果 R 中有乘法单位元，则称为含单位元的环。环的乘法单位元以 1 表示。环的加法单位元称为环的**零元素**，以 0 表示。当 $n\in\mathbf{Z}, a\in R$ 时，na 表示 $a+a+\cdots+a$（n 个 a 相加）。

定义 1.3.2 环 R 的一个非空子集 S，如果本身对于 R 的两种运算 +，· 作成一个环，则称 S 为 R 的一个**子环**。

环 R 的非空子集 S 成为子环的充要条件是：$\forall a,b\in S$，有 $a-b\in S$ 和 $ab\in S$。

下一定理给出了环的最初步性质。它表明通常加法和乘法的许多规则在环中是适用的（但要注意并非所有的都适用！）。

定理 1.3.1 设 R 是环，则

(1) $\forall a\in R, 0a=a0=0$；

(2) $\forall a,b\in R, (-a)b=a(-b)=-(ab)$；

(3) $\forall a,b\in R, (-a)(-b)=ab$；

(4) $\forall n\in\mathbf{Z}, a,b\in R, (na)b=a(nb)=n(ab)$；

(5) $\forall a_i,b_j\in R, \left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$；

(6) 若 R 有单位元，则单位元是惟一的；

(7) 若 R 有单位元，$a,b\in R$ 且 $ab=ba$，则二项式定理成立：$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$。

证 (1) $0a=(0+0)a=0a+0a$，从而 $0a=0$。

(2) $ab+(-a)b=(a+(-a))b=0b=0$，再由群的消去律得 $(-a)b=-(ab)$。类似可证 $a(-b)=-(ab)$。

(3) $(-a)(-b)=-(a(-b))=-(-(ab))=ab$。

(4) $(na)b=(a+a+\cdots+a)b=ab+ab+\cdots+ab=n(ab)$，类似可证 $a(nb)=n(ab)$。

(5) 当 $m=1$ 时，$a_1(b_1+b_2+\cdots+b_n)=a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_n=\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j$ 成立。再用

归纳法可得对任意 $m \in \mathbf{N}$ 成立。

(6) 若 R 有单位元 1 和 $1'$，则 $1 \cdot 1' = 1 = 1'$，故单位元惟一。

(7) 利用 $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$，并对 n 用归纳法（与初等数学中二项式定理证明完全类似）。证毕。

定义 1.3.3　若环 R 中存在非零元素 a 使得对某个非零元素 b 有 $ab=0$，则称 a 为一个左零因子。若对某个非零元素 b 有 $ba=0$，称 a 为一个右零因子。若 a 既是左零因子又是右零因子，则称 a 为 R 的一个**零因子**。

定义 1.3.4　设 R 为含单位元的环。$a \in R$，若有 $c \in R$ 使 $ca=1$，则称 c 为 a 的左逆元。若有 c 使 $ac=1$，则称 c 为 a 的右逆元。若 a 既有左逆元又有右逆元，则称 a 为**可逆元素**。

易知 a 为可逆元素时，a 的左逆元和右逆元必相等且惟一。因为 $ab=1=ca \Rightarrow b=1 \cdot b=(ca)b=c(ab)=c \cdot 1=c$。

定义 1.3.5　设 R 为含单位元的环，且 $1 \neq 0$。若 R 为没有零因子的交换环，则称 R 为**整环**。若 R 中每个非零元素均为可逆元素，则称 R 为**除环**（或称为**体**）。若 R 是交换除环则称 R 为域。

易见域必是整环，因为可逆元素必不是零因子（$a \neq 0, ab=0 \Rightarrow b=1 \cdot b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1} \cdot 0=0$）。

例 1.3.1　整数集合 $\mathbf{Z}$ 对普通 $+$，$\cdot$ 两种运算成为环，而且是整环。偶数集合 $\mathbf{E}$ 是不含单位元的交换环。有理数集合 $\mathbf{Q}$、实数集合 $\mathbf{R}$、复数集合 $\mathbf{C}$ 对普通加、乘运算均构成域。当 $n \geqslant 2$ 时，$\mathbf{Q}$（或 $\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$）上的 n 阶方阵全体对矩阵的加、乘运算形成含单位元的非交换环。

例 1.3.2　对正整数 n，模 n 整数集 $\mathbf{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{n-1}\}$ 对模 n 的加、乘运算形成交换环。当 $n=p$ 为素数时，$\mathbf{Z}_p$ 是域。

例 1.3.3　设 G 是 Abel 群。G 到 G 的全部群自同态构成的集合记为 $\mathrm{End}G$。定义其中加法为 $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$，$\forall a \in G$；乘法运算为映射的合成 $(fg)(a)=f(g(a))$，$\forall a \in G$。则 $\mathrm{End}G$ 成为含单位元的环（可能不交换）。单位元是恒等同态 1_G。

1.3.2　理想、同态与剩余类环

我们已经知道了环这种代数系统的初步概念。下面我们进一步探讨它的一些基本性质。

定义 1.3.6　设 R, S 为环。映射 $f: R \to S$ 若满足：$\forall a, b \in R$，$f(a+b)=f(a)+f(b)$ 及 $f(ab)=f(a) \cdot f(b)$，则称 f 为一个**环同态**。若 f 还是一一对应，则称 f 为一个**环同构**。

回忆有代数运算的集合上的代数同态概念（定义 1.1.9），可知环同态就是对于环的两种运算的代数同态。环的单同态 $R \to S$ 有时称为 R 在 S 中的嵌入。环同构 $R \to R$ 称为 R 的自同构。

环同态 $f: R \to S$ 的核是指 f 作为加法群同态的核，即 $\mathrm{Ker}f=\{r \in R \mid f(r)=0\}$。$f$ 的像 $f_{\mathrm{Im}}=\{s \in S \mid \exists r \in R; s=f(r)\}$。

正如群同态与不变子群紧密相关一样，与环同态紧密相关的子环称为理想。理想在环中所起的作用就像不变子群在群中所起的作用一样。

定义 1.3.7　设 I 是 R 的子环。若 $\forall r \in R, x \in I$ 有 $rx \in I$，则称 I 为环 R 的左理想。若 $\forall r \in R_1, x \in I$ 有 $xr \in I$，则称 I 为环 R 的右理想。若 I 既是左理想又是右理想，则称 I 为 R 的**理想**。

环 R 自身和仅由零元素组成的集合(记为 0)是理想。不等于 R 和 0 的理想称为**真理想**。

例 1.3.4 设 R 是数域 $\mathbf{Q}$(或 $\mathbf{R}$,$\mathbf{C}$)上全体 n 阶方阵所成环。I_k 是 R 中只可能在第 k 列有非 0 元的方阵所成集合,则 I_k 是 R 的左理想而不是右理想。类似地,只可能在第 k 行有非 0 元的方阵全体 J_k 是 R 的右理想而非左理想。

定义 1.3.8 设 X 是环 R 的子集合,令 $\{A_i \mid i\in I\}$ 是 R 中所有包含 X 的(左)理想,则 $\bigcap_{i\in I} A_i$ 称为做由 X 生成的(左)理想,记为 (X)。

X 中元素称为理想 (X) 的生成元。如果 X 含有限个元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则 (X) 表示为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,并称 (X) 为有限生成的。由一个元素生成的理想称为主理想。如果一个环的每个理想都是主理想,则称这个环为**主理想环**。

定理 1.3.2 设 R 为环,$a\in R$,$X\subseteq R$,$I\subseteq R$,则

(1) I 是左理想 $\Leftrightarrow \forall a,b\in I, a-b\in I$ 且 $\forall a\in I, r\in R, ra\in I$;

(2) $(a)=\left\{ra+as+na+\sum_{i=1}^{m} r_i a s_i \mid r,s,r_i,s_i\in R, m\in\mathbf{N}, n\in\mathbf{Z}\right\}$;

当 R 为交换环时,$(a)=\{ra+na \mid r\in R, n\in\mathbf{Z}\}$;当 R 为有单位元的交换环时,$(a)=\{ra\mid r\in R\}=Ra$,$(X)=\{r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n \mid n\in\mathbf{N}, r_i\in R, a_i\in X\}$。

证 (1) 由定理 1.2.2 及定义 1.3.7 即得。

(2) 记 $I=\left\{ra+as+na+\sum_{i=1}^{m} r_i a s_i \mid r,s,r_i,s_i\in R, n\in\mathbf{Z}, m\in\mathbf{N}\right\}$,则 $a\in I$ 且 I 是理想。若 I' 是另一个包含 a 的理想,则必有 $I\subseteq I'$(这是因为 $a\in I'\Rightarrow na\in I', ra\in I', as\in I', r_ias_i\in I'$)。故 I 是所有包含 a 的理想之交,即 $I=(a)$。当 R 为交换环或有单位元的交换环时结论类似证明。证毕。

例 1.3.5 整数环 $\mathbf{Z}$ 是主理想环。事实上,设 I 是 $\mathbf{Z}$ 的一个非零理想,以 a 记 I 中最小正整数,则由于 $\mathbf{Z}$ 是有单位元的交换环,$(a)=\{na\mid n\in\mathbf{Z}\}\subseteq I$。若 $b\in I$,由整数除法有 $b=ma+r$ 使 $0\leqslant r<a$,此时 $r=b-ma\in I$,而 a 是 I 中最小正整数,故 $r=0$,即 $b\in(a)$,得到 $I\subseteq(a)$。这样证明了 $I=(a)$。

下面我们来看理想与环同态的关系。

定理 1.3.3 (1) 设 R 是环,而 I 是 R 的理想,则加法商群 R/I 对于由 $(a+I)(b+I)=ab+I$ 给出的乘法成为一个环。当 R 是交换环时 R/I 也是交换环。当 R 有单位元 1 时 R/I 也有单位元 $1+I$。

(2) 设 $f:R\to S$ 是环的满同态,则 $I=\mathrm{Ker}f$ 是 R 的理想,且 $R/I\cong S$。反之,若 I 是 R 的理想,则映射 $\pi:R\to R/I, r\to r+I$ 是环的满同态且 $\mathrm{Ker}\pi=I$。

证 (1) 我们证明所定义的乘法是有意义的:若 $a+I=a'+I, b+I=b'+I$,必须证明 $ab+I=a'b'+I$。由于 $a'\in a'+I=a+I$ 从而 $a'=a+i$(对某个 $i\in I$)。类似 $b'=b+j(j\in I)$。故 $a'+b'=(a+i)(b+j)=ab+ib+aj+ij$。由于 I 是理想,$a'b'-ab=ib+aj+ij\in I$,因此 $a'b'+I=ab+I$,故所定义的乘法有意义。其余结论按通常步骤易得。

(2) $\mathrm{Ker}f$ 显然是 R 的加法子群。若 $x\in\mathrm{Ker}f, r\in R$,则 $f(rx)=f(r)f(x)=f(r)\cdot 0=0$,从而 $rx\in\mathrm{Ker}f$。类似可证 $xr\in\mathrm{Ker}f$。故 $I=\mathrm{Ker}f$ 是 R 的理想。作 $g:R/I\to S, r+I\to f(r)$,则与定理 1.2.12 完全类似证明 g 是同构。反之,若 I 是 R 的理想,由定理 1.2.11 知,π 是群的满同态,且核为 I。$\forall a,b\in R, \pi(ab)=ab+I=(a+I)(b+I)=\pi(a)\cdot\pi(b)$,从而 π 也

是环同态。证毕。

定理 1.3.3 中的 R/I 称为环 R 模 I 的剩余类环(或 R 对 I 的商环)。其中一个很特殊的情形是 I 为极大理想,此时商环 R/I 有特别性质。

定义 1.3.9　环 R 中的理想 M 称为极大理想,是指 $M\neq R$ 且 R 中不存在包含 M 的其他真理想。

定理 1.3.4　(1) 设 I 为环 R 的理想,则剩余类环 R/I 的每个理想形如 J/I,其中 J 是 R 的包含 I 的理想。

(2) 设 R 为含单位元的交换环且 $0\neq 1$,则 I 是 R 的极大理想$\Leftrightarrow R/I$ 是域。

证　(1) 设 J 是 R 的包含 I 的理想,则显然 J/I 是 R/I 的理想。当 $J_1\neq J_2$ 且 J_1,J_2 均包含 I 时,存在 $a\in J_1,a\notin J_2$ 或 $a\in J_2,a\notin J_1$。不妨设前一种情况成立,则此时 $a+I\notin J_2/I$,因若不然,有 $b\in J_2$ 使 $a+I=b+I\Rightarrow a-b\in I\subseteq J_2\Rightarrow a=b+(a-b)\in J_2$ 矛盾。这证明 $J_1/I\neq J_2/I$,从而由 $J\to J/I$ 给出 R 包含 I 的理想到 R/I 的理想之间的映射是一个单射。再任取 R/I 的一个理想 J',则 J' 在 $\pi:R\to R/I$ 之下的原像集 J 是 R 的一个理想,且 $J/I=J'$。这证明 $J\to J/I$ 给出映射是 R 包含 I 的理想到 R/I 的理想之间的一一对应,从而 R/I 的每个理想具有 J/I 的形式。

(2) 设 I 是 R 的极大理想,则由(1)知 R/I 无真理想,且 R/I 也是有单位元的交换环。我们需要证明 R/I 的每个非零元有乘法逆元素。设 $a+I\neq I$,则 $a\notin I$,于是 $I\subsetneqq(I,a)$,由 I 极大知 $(I,a)=R$。由定理 1.3.2 知,R 中单位元 $1=ra+m$(对某个 $m\in I,r\in R$),故而 $1-ra=m\in I$,得 $1+I=ra+I=(r+I)(a+I)$,这样 $r+I$ 就是 $a+I$ 在 R/I 中的乘法逆元素,故 R/I 是域。反之,若 R/I 是域,则 R/I 无真理想:对每个非零元 $a+I$,有乘法逆 $b+I$ 使 $(a+I)(b+I)=1+I$,这就是说每个非零元 $a+I$ 生成的理想是包含了 $1+I$ 的,即 $(a+I)\supseteq(1+I)=R/I$,从而 $(a+I)=R/I$,即 R/I 无真理想。再由(1)的证明,R/I 的理想与 R 包含 I 的理想是一一对应的,故而 R 中没有真包含 I 的理想,即 I 是极大理想。证毕。

1.3.3　交换环、代数与张量积

我们已经了解关于环的基本知识。比环更复杂一点的代数系统称为代数。代数是与含有单位元的交换环相联系的一种代数系统。在环的理论中,含有单位元的交换环具有特殊的地位。以它为对象已经发展了一个专门的代数分支——交换代数。对此,我们不拟深入讲解,只指出,整数环 $\mathbf{Z}$,有理数域 $\mathbf{Q}$,实数域 $\mathbf{R}$,复数域 $\mathbf{C}$ 都是含单位元的交换环。含单位元的交换环的一类更重要的具体例子是数域 K 上的 n 元多项式环 $K[x_1,x_2,\cdots,x_n]$。下面我们给出代数的概念。

定义 1.3.10　设 K 是含单位元的交换环,A 是一个环。$K\times A$ 到 A 有一个二元运算(称为 K-数乘):$\forall k\in K,a\in A$,有 $ka\in A$,且适合

(1) $\forall k,s\in K,a,b\in A,k(a+b)=ka+kb,(r+s)a=ra+sa$,

(2) $\forall k,s\in K,a,b\in A,k(sa)=(ks)a,k(ab)=(ka)b=a(kb)$,

(3) $\forall a\in A,1\cdot a=a$,

则称 A 为一个 K 上的代数,简称 K-代数。

我们看到,在一个 K-代数 A 上有 3 种代数运算:加法、乘法和 K-数乘,而这 3 种运算通过一些算律互相联系。

代数这个概念是有很深背景的。代数的古典理论就是研究域 K 上的向量空间，从而可用各种线性代数的结果。

例 1.3.6 设 A 为一个环，定义二元运算 $\mathbf{Z}\times A\to A$：$\forall n\in\mathbf{Z},a\in A,na=a+a+\cdots+a$（$n$ 个 a 相加），则易验证 A 是一个 $\mathbf{Z}$-代数。换言之，任何环 A 都以自然的方式成为 $\mathbf{Z}$-代数。

例 1.3.7 设 K 为含单位元的交换环。$A=K[x_1,\cdots,x_n]$ 是 K 上 n 元多项式按通常多项式的加、乘法所成的环。定义二元运算 $K\times A\to A$：$\forall k\in K,f(x_1,\cdots,x_n)\in A,kf(x_1,\cdots,x_n)$ 如通常数与多项式乘积，则易验证 A 是一个 K-代数。

例 1.3.8 设 K 是含单位元的交换环，A 是 K 上全体 n 阶方阵所成环（按矩阵加、乘运算）。定义 A 上的 K-数乘为：$k(a_{ij})_{n\times n}=(ka_{ij})_{n\times n}$，则易验证 A 成为一个 K-代数，称为 K 上的矩阵代数。

设 A,B 是两个 K-代数，我们用所谓张量积的方法来造一个新的 K-代数。以 C 表示所有 $A\times B$ 的元素的形式的线性组合，系数属于 K，即 $C=\left\{\sum_{i=1}^{n}k_i(a_i,b_i)\mid a_i\in A,b_i\in B,k_i\in I,n\in\mathbf{N}\right\}$，则 C 按显然的加法成为一个 Abel 群。

C 中所有以下形式

$$(a+a',b)-(a,b)-(a',b)$$
$$(a,b+b')-(a,b)-(a,b')$$
$$(ka,b)-k(a,b)$$
$$(a,kb)-k(a,b)$$

的元素的集合记为 D，则 D 生成 C 的一个 Abel 子群 $\langle D\rangle$，它当然是 C 的不变子群，从而 $C/\langle D\rangle$ 是一个 Abel 商群。

定义 1.3.11 上面所得到的 Abel 商群 $C/\langle D\rangle$ 称为 K-代数 A 与 B 的张量积，记为 $A\otimes_K B$。在不引起混淆时简记为 $A\otimes B$。$A\otimes B$ 的元素均具有有限和的形式 $\sum_{i有限}k_i(a_i\otimes b_i)$。其中 $a_i\otimes b_i$ 是 C 中元素 (a_i,b_i) 在 $C/\langle D\rangle$ 中的像。

定理 1.3.5 K-代数 A,B 的张量积 $A\otimes B$ 也是 K-代数。

证 $A\otimes B$ 的元素形如 $\sum_{i有限}k_i(a_i\otimes b_i)$，其中 $k_i\in K,a_i\in A,b_i\in B$，从而其上已有自然的加法和 K-数乘运算。乘法定义为 $(a\otimes b)(a'\otimes b')=(aa')\otimes(bb')$，然后线性地扩展到有限和式的乘法。直接验证乘法有意义以及满足所要求的算律的任务留给读者作为练习。这样 $A\otimes B$ 成为 K-代数。证毕。

例 1.3.9 设 A,B 分别是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 m 维、n 维线性空间，有基底 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。用与定义 1.3.11 完全一样的方式构作 A 与 B 的张量积 $A\otimes_R B$。此时 $A\otimes_R B$ 仍是 R 上的线性空间，维数为 $m\times n$。事实上，$A\otimes_R B$ 中元素形如 $\sum_{i有限}r_i\cdot(a_i\otimes b_i)$ 的形式，从而有自然的加法和数乘运算。此外，显见 $a_i\otimes b_i$ 可表为 $\left(\sum_{i=1}^{m}s_ix_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{n}t_jy_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}s_it_j(x_i\otimes y_j)$，从而 $A\otimes B$ 中元素均可表为 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(x_i\otimes y_j)$ 形式，而 $\{x_i\otimes y_j\mid i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\}$ 的线性无关性是容易直接验证的，从而它就是 $A\otimes B$ 的基底。

例 1.3.9 中的张量积称为线性空间的张量积。

例 1.3.10　设 T 是一个域 K 上的线性空间，A,B 也是 K 上的线性空间，C 如定义 1.3.11 所述。若 $f:C\to T$ 是一个满的双线性映射

$$f(a+a',b)=f(a,b)+f(a',b)$$
$$f(a,b+b')=f(a,b)+f(a,b')$$
$$f(ka,b)=f(a,kb)=k(f(a,b))$$

其中 $a,a'\in A,b,b'\in B,k\in K$，则 $T\cong A\otimes B$。此处同构指线性空间的同构。事实上，此时 $\mathrm{Ker}f$ 就等于定义 1.3.11 中的 $\langle D\rangle$，从而由定理 1.2.12 即得结论。

1.4　模与范畴

模的概念在现代数学中占有越来越重要的地位，在其他学科中也得到越来越多的应用。另外，现代数学与古典数学区别的明显特征是：它的主要着眼点为结构，而范畴理论则为这一着眼点提供了具体可操作的手段。因此，在本节将要简略介绍模与范畴这两个概念的基本思想和内容。

1.4.1　模、同态与正合序列

模的概念是经典的线性空间概念的推广。粗略地说，模是一种具有加法和数乘两种运算（满足一定算律）的代数结构。

定义 1.4.1　设 R 是环，M 是一个 Abel 群。如果有 $R\times M\to M$ 的二元运算（称为数乘）：$\forall r\in R,m\in M$，有 $rm\in M$，且满足

(1) $r(a+b)=ra+rb$, $(r+s)a=ra+sa$,

(2) $r(sa)=(rs)a$,

其中，$r,s\in R,a,b\in M$，则称 M 为一个**左 R-模**。如果 R 有单位元 1 且 $1\cdot a=a$ 对一切 $a\in M$ 成立，则称 M 为一个**左 R-幺模**。

类似地，如果二元运算是 $M\times R\to M$：$\forall r\in R,m\in M$ 有 $mr\in M$ 且满足

(1) $(a+b)r=ar+br,a(r+s)=ar+as$,

(2) $(ar)s=a(rs)$,

其中，$r,s\in R,a,b\in M$，则称为**右 R-模**。如果 R 有单位元 1 且 $a\cdot 1=a$ 对一切 $a\in M$ 成立，则称 R 为一个**右 R-幺模**。右模和左模有完全对称的性质。以下我们只对左模展开讨论，所说的模均指左模。

例 1.4.1　环 R 上的 n 元多项式全体 $R[x_1,\cdots,x_n]$ 按通常多项式的加法和数乘是一个 R-模。

例 1.4.2　环 R 的左理想 I 按自身加法成为 Abel 群。按 R 中乘法：$\forall r\in R,a\in I,ra\in I$ 定义出 $R\times I\to I$ 的数乘运算，从而成为（左）R-模。当 I 是左理想时，R/I 是 Abel 商群，定义其上数乘 $r(a+I)=ra+I$，则 R/I 也成为（左）R-模。但此时 R/I 不一定是商环（除非 I 是理想）。

例 1.4.3　设 R 为实数域，R^n 是所有实 n 元数组所成集，定义加法和数乘为

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$
$$r(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ra_1,ra_2,\cdots,ra_n)$$

则 R^n 成为 R-模。R^n 就是熟知的实 n 维线性空间。

定义 1.4.2 设 M,N 是环 R 上的模。若映射 $f:M\to N$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，$f(ra)=rf(a)$，$\forall a,b\in M,r\in R$ 成立，则称 f 为 R-模同态。若 R 为域，称 R-模同态为线性变换。

R-模同态就是保持加、数乘两种运算的映射。完全类似于群同态，当 f 为单（满）射或一一对应时分别称之为模单（满）同态或模同构，且有 $\mathrm{Ker}f=\{m\in M\mid f(m)=0\}$ 及 $f_{\mathrm{Im}}=\{n\in N\mid \exists m\in M$ 使 $f(m)=n\}$，分别称为同态核与同态像。

R-模 M 的子集合 N 如果是 Abel 子群，且对数乘运算封闭，则称为 M 的子模。此时 Abel 商群 M/N 按数乘 $r(a+N)=ra+N$ 也成为 R-模。

定理 1.4.1 设 M,N 是 R-模。$f:M\to N$ 是模的满同态，则 $\mathrm{Ker}f$ 是 M 的子模，且 $M/\mathrm{Ker}f\cong N$。而当 $f:M\to N$ 是模同态时，f_{Im} 是 N 的子模，且 $M/\mathrm{Ker}f\cong f_{\mathrm{Im}}$。

证 与关于群同态的同构定理 1.2.12 完全一样地证明，只要说明每个子群和群同态在这里事实上是子模和模同态即可。证毕。

定义 1.4.3 设 A,B,C 均为环 R 上的模。$f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 均为 R-模同态。若同态序列 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 满足 $f_{\mathrm{Im}}=\mathrm{Ker}g$，称这个同态序列在 B **处正合**。若模同态序列 $A_0\xrightarrow{f_1}A_1\xrightarrow{f_2}A_2\longrightarrow\cdots\xrightarrow{f_n}A_n$ 在每个 $A_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 处正合，称此序列为**正合序列**。

例 1.4.4 设 $A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$C=\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$。此处 $\mathbf{R}$ 指实数域。则 A,B,C 按通常加法和数乘皆为 $\mathbf{R}$-模。令 $f:A\to B,x\to(x,0)$；$g:B\to C,(x,y)\to y$；则易见 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 在 B 处正合。因为 $f_{\mathrm{Im}}=\{(x,0)\mid x\in R\}=\mathrm{Ker}g$。

例 1.4.5 在 R-模中，0 是一个平凡模。对任何 R-模 A，有惟一的一个 $0\to A$ 的模同态 $f:0\to 0\in A$。即把 0 的惟一元素 0 映到 A 的 0 元素。同时也有惟一的一个 $A\to 0$ 的模同态 $g:a\to 0$；即把 A 的每个元映到 0。从而同态序列 $0\to A\xrightarrow{f}B$ 在 A 处正合$\Leftrightarrow f$ 是单同态（因为 $0_{\mathrm{Im}}=0=\mathrm{Ker}f$）。而同态序列 $A\xrightarrow{f}B\to 0$ 在 B 处正合$\Leftrightarrow f$ 是满同态（因为 $f_{\mathrm{Im}}=\mathrm{Ker}0$，而 $B\to 0$ 的核就是整个 B，故 $f_{\mathrm{Im}}=B$）。从而我们看到，正合序列提供了一种非常简明有效的方式来处理 R-模同态。

形如 $0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 的正合序列称为短正合序列。由例 1.4.5 知，此时 f 为单同态而 g 为满同态，而且 $f_{\mathrm{Im}}=\mathrm{Ker}g$。由定理 1.4.1 知，$C\cong B/\mathrm{Ker}g\cong B/f_{\mathrm{Im}}$，又由于 f 是单同态，故 $f_{\mathrm{Im}}\cong A$，因此有 $C\cong B/A$。可见，短正合序列提供了一种简明方式来表达 B 的一个子模 A 和它关于 A 的商模 C。

1.4.2 自由模与线性空间

自由模是一类有特殊性质的模，它在许多数学领域中都有广泛应用。线性空间是自由模的最重要范例。

设 R 为含单位元的环。R-模 A 的子集 X 称为线性无关的，是指对任意不同的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X,r_i\in R$，当 $r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n=0$ 时必有 $r_1=r_2=\cdots=r_n=0$；否则叫做线性相关的。如果 A 的一个子集 Y 是线性无关的，且 A 的每一元素皆可写成 Y 中元素的线性组合

形式：$\sum_{i有限} r_i y_i$，其中 $r_i \in R, y_i \in Y$，则称 Y 为 A 的一组基。

定义 1.4.4　设 R 为含单位元的环，F 是 R-幺模，若 F 有一个非空子集 X 构成 F 的基，则称 F 为一个**自由 R-模**。

任给一个模当然不一定是自由模。自由模就是有一组线性无关的生成元的模。任给一个模虽然一定会有一个生成元集，但其生成元集不一定是线性无关的。

当 R 为除环时，R 上的模称为线性空间。我们有下列定理。

定理 1.4.2　设 R 为除环，则 R 上每个线性空间 V（即每个 R-模）都有一组基，从而是自由 R-模。

证　设 X 是 V 中极大线性无关子集合。X 中元素的所有线性组合记为 W。如果 $W=V$，则 X 就是 V 的基。若不然，$\exists a\neq 0, a\in V, a\notin W$。如果 $ra+r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n=0(r,r_i\in R, x_i\in X)$，而 $r\neq 0$，则由于 R 为除环，r^{-1} 存在，$a=r^{-1}(ra)=-r^{-1}r_1x_1-r^{-1}r_2x_2-\cdots-r^{-1}r_nx_n\in W$，这与 $a\notin W$ 矛盾。故 $r=0$。而这又导致 $r_1,\cdots,r_n=0$（因为 $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关），可得到 $X\cup\{a\}$ 是线性无关的，这又与 X 是极大线性无关子集合矛盾。因此 $W=V$，即 X 必是 V 的基。证毕。

如果一个线性空间的基是有限集，则称为有限维线性空间；如果不是，则称为无穷维线性空间。对于线性空间，可以证明，它的任两组不同的基 X,Y 都具有相等的势：$|X|=|Y|$。而当线性空间是有限维时，它的任两组不同的基都含同样个数的元素。称基所含元素个数为空间维数，记为 $\dim V$。

例 1.4.6　设 R 为除环，M,N 为 R 上的线性空间。我们可以用与定义 1.3.11 完全同样的办法构作 M 与 N 的张量积 $M\otimes N$。它也是一个线性空间（自由 R-模）。与代数张量积不同之处仅仅在于现在只考虑加法和数乘两种运算，而不须考虑自身的乘法运算。当 M,N 是 m 维、n 维线性空间时，$M\otimes N$ 是 $m\times n$ 维线性空间（参见例 1.3.9）。

1.4.3　范畴与态射

范畴是一种很有用处的概念。虽然开始接触时有些抽象，但我们已经有足够多的知识作为它的背景和范例。学习这一概念对于了解现代数学的思想、方法和语言是很有益的。

定义 1.4.5　一个**范畴**是由一些对象（表示成 $A,B,C,\cdots$，称为像元）所成的类连同这些对象之间的态射（表示成 $f:A\to B$，称为射元）所成的总体，并满足

(1) 对于态射 $f:A\to B, g:B\to C$，存在态射 $h:A\to C$ 使 $h=g\circ f$（态射的合成运算）；

(2) 对于态射 $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ 有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$（态射结合律）；

(3) 对于每个像元 B，均存在态射 $1_B:B\to B$ 使对每个 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 有 $1_B\circ f=f$，$g\circ 1_B=g$（单位态射存在）。

如果对于态射 $f:A\to B$，存在一个态射 $g:B\to A$ 使 $g\circ f=1_A, f\circ g=1_B$，则称 f 为一个等价。此时也称 A 与 B 等价。

简言之，范畴是由像元和射元构成的总体（满足一些规则）。对范畴中任意两个像元 A，B，所有 A 到 B 的态射 $f:A\to B$ 所成集合记为 $\mathrm{Hom}(A,B)$。

例 1.4.7　设 S 为所有集合所成的类，对 $A,B\in S$，$\mathrm{Hom}(A,B)$ 是 A 到 B 的所有映射所成集合，则 S 成为一个范畴，称为集合范畴。其像元是集合，射元是集合间的映射。S 的某个

态射 f 是等价当且仅当 f 是一一对应。

例 1.4.8 设 S 为所有群所成的类(即群是像元),而对 $A,B\in S$,$\mathrm{Hom}(A,B)$是 A 到 B 的所有群同态(群同态为射元),则 S 成为一个范畴,称为群范畴。群范畴中的态射就是群同态。某个态射 f 是等价当且仅当 f 是群同构。

例 1.4.9 所有环作为像元,环同态作为态射(射元)构成环范畴。设 R 为一个环,则所有(左)R-模为像元,模同态为态射(射元)构成(左)R-模范畴。

例 1.4.10 所有 Abel 群连同其同态组成一个范畴,称为 Abel 群范畴。易见它是包含在群范畴之中的。类似地,所有含单位元的环连同其上环同态组成含幺环范畴。含单位元的交换环连同其同态组成交换环范畴。除环 D 上所有有限维线性空间连同线性变换组成有限维 D-线性空间范畴。

我们引入范畴这个概念当然并不是为了简单地把一些对象弄在一起然后称之为某范畴。下面我们将要引入的函子概念表述了范畴之间的联系。

1.4.4 函 子

我们知道,在研究某些特定对象时,对象之间的"映射"是研究的一个重要方面。对象之间的联系是通过"映射"来反映的。粗略地说,函子就是从一个范畴到另一个范畴的保持适当结构的"映射"。

定义 1.4.6 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为范畴,T 是两个映射组成的对:一个是像元之间的映射,即把 $\mathscr{A}$ 中每个像元 A 映到 $\mathscr{B}$ 中一个像元 $T(A)$;另一个是射元之间的映射,即把 $\mathscr{A}$ 中每个态射 $f:A\to A'$映射到 $\mathscr{B}$ 中一个态射 $T(f):T(A)\to T(A')$;且满足以下条件

(1) 对 $\mathscr{A}$ 中每个恒等态射 1_A,均有 $T(1_A)=1_{T(A)}$,

(2) 对 $\mathscr{A}$ 中任两个态射 f,g,均有 $T(g\circ g)=T(g)\circ T(f)$,只要 $g\circ f$ 可以定义,

则称 T 为从范畴 $\mathscr{A}$ 到范畴 $\mathscr{B}$ 的一个**协变函子**。表示为 $T:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$。

如果 T 的像元映射把 $\mathscr{A}$ 中的 A 映到 $\mathscr{B}$ 中的 $T(A)$,而射元映射把 $\mathscr{A}$ 中态射 $f:A\to A'$ 映射到 $\mathscr{B}$ 中态射 $T(f):T(A')\to T(A)$,且满足

(1) 对 $\mathscr{A}$ 中每个 1_A 有 $T(1_A)=1_{T(A)}$,

(2) 对 $\mathscr{A}$ 中态射 f,g,有 $T(g\circ f)=T(f)\circ T(g)$,只要 $g\circ f$ 可以定义,

则称 T 为从范畴 $\mathscr{A}$ 到范畴 $\mathscr{B}$ 的一个**反变函子**。也表示为 $T:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$。

协变函子与反变函子的不同之处在于,协变函子把态射 $f:A\to A'$ 映射到态射 $T(f):T(A)\to T(A')$;而反变函子则把 f 映射到 $T(f):T(A')\to T(A)$,即反变函子把态射的方向反转。

例 1.4.11 (协变)恒等函子 $I_{\mathscr{A}}:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$,即把范畴 $\mathscr{A}$ 的每个像元和射元均映射成自身。

例 1.4.12 设 $\mathscr{A}$ 为集合范畴,$\mathscr{B}$ 为含单位元的环 R 上的左模范畴。定义 T 为一对映射,一个把 $\mathscr{A}$ 的像元(即集合)X 映到 $\mathscr{B}$ 的像元(即左 R-模)$F(X)$,其中 $F(X)$是以集合 X 为基底的自由 R-模。另一个把 $\mathscr{A}$ 的射元(即集合之间的映射)$f:X\to Y$ 映射到 $\mathscr{B}$ 的射元(即 R-模同态)$T(f):T(X)\to T(Y)$。其中 $T(f)$如下定义:$T(X)=F(X)$是以 X 为基底的自由 R-模,其中每一元均惟一表为 $\sum\limits_{i有限}r_ix_i(r_i\in R,x_i\in X)$ 的形式,而 $T(f)(\sum\limits_{i有限}r_ix_i)=\sum\limits_{i有限}r_if(x_i)\in T(Y)$。也就是说,$T(f)$是把基底的映射 f 线性地扩展到整个自由模上而得到的。容易看出,

T 这对映射定义了一个集合范畴到左 R -模范畴的(协变)函子。

例 1.4.13 设 B 是范畴 $\mathscr{A}$ 中一个固定像元。对于 $\mathscr{A}$ 中每个像元 A,定义 $T(A)=\mathrm{Hom}(B,A)$(即 B 到 A 的全部态射构成的集合),它是集合范畴 $\mathscr{S}$ 的像元。而对 $\mathscr{A}$ 中每个态射 $f:A\to A'$,定义 $T(f)$ 为 $T(A)$ 到 $T(A')$,即 $\mathrm{Hom}(B,A)$ 到 $\mathrm{Hom}(B,A')$ 的集合映射:$\forall g\in\mathrm{Hom}(B,A)$,$[T(f)](g)=f\circ g\in\mathrm{Hom}(B,A')$。这样给出了 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{S}$ 的一个函子,称为(协变)Hom 函子。

如果 $\forall A\in\mathscr{A}$,$T(A)=\mathrm{Hom}(A,B)\in\mathscr{S}$,而对 $f:A\to A'$,$T(f)$ 为 $\mathrm{Hom}(A',B)\to\mathrm{Hom}(A,B)$ 由 $[T(f)](g)=g\circ f$ 定义,其中 $g:A'\to B$,$g\circ f:A\xrightarrow{f}A'\xrightarrow{g}B$。这样也给出一个 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{S}$ 的函子,称为(反变)Hom 函子。

1.5 拓扑空间基本概念

我们已经看到,研究集合上的代数结构引出了各种代数构造,而这些代数构造都未涉及到连续性这一现代数学中的重要概念。对集合间映射的"连续性"的研究就成了拓扑学的任务。当然在现代数学中,代数结构和拓扑结构已经结合起来并形成了许多相当有力的分支(如 Lie 群)。拓扑学的应用也已渗透到几乎所有自然科学领域。总之,拓扑空间理论已经成为现代数学最重要的基础理论之一。由于拓扑空间理论的高度抽象化,我们先引入有关拓扑学的一些背景和主要思想的描述。

1.5.1 Euler 定理

我们以关于多面体的著名的 Euler 定理开始。这个定理及其证明是拓扑学中很多重要思想的根源。

人们很早就发现,对于许多常见的多面体,如果把顶点数 v 减去棱数 e,再加上面数 f,则得到的数都是 2。公式 $v-e+f=2$ 是否对所有的多面体都成立呢?未必。例如,对图 1.9 和图 1.10 的多面体分别可得 $v-e+f=4$ 及 $v-e+f=0$。但是对于一大类不那么特殊的多面体,这个结果总成立。

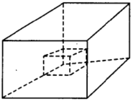


图 1.9 空心方体

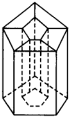


图 1.10 穿孔棱柱

下面将证明,如果不具有图 1.9 或图 1.10 的特点,则多面体必满足关系 $v-e+f=2$。

一个多面体是指按下述意义组成的有限多个平面多边形:若两个多边形相交则只交于一条公共边;多边形的每条边是且仅是另外一个多边形的边;每个顶点是一些多边形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_s$ 的顶点,且 Q_i 与 Q_{i+1} 有一个公共边,对 $1\leqslant i\leqslant s$,而 Q_s 与 Q_1 有一个公共边。

定理 1.5.1(Euler 定理) 设 P 为满足下列条件的多面体

(1) P 的任何两个顶点可以用一串棱相连，

(2) P 上任何由直线段(不一定是棱)构成的圈必把 P 分割成两片，

则对 P 有 $v-e+f=2$。

证 P 的一组连通的顶点与棱叫做一个图。更一般地，三维空间中任何一组于端点连接的有限多条直线段称为一个图。不含有圈的图称树。树的顶点数比棱数多 1，即 $v(T)-e(T)=1$，此处 T 为一个树。

由条件(1)知，P 的全体顶点与棱构成一个图。容易看出，任何图中必有含全体顶点的树作为子图。可选一个树 T，它含有 P 的全体顶点，但只含 P 的某些棱。

T 的对偶图可按下面方式给出：对应于 P 的每个面 A 给出对偶图的一个顶点 $\hat{A}$。若 P 的两个面 A 与 B 有一条不在 T 中的公共边，则给出对偶图中连接 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 的一条边。记此对偶图为 Γ。

而论证 Γ 也是一个图，且 Γ 必是树。事实上，若 Γ 内有圈，由条件(2)知，这个圈把 P 分为两块，每块至少含一个顶点。任何分属这两块的顶点要相连，必穿过这个圈，因此相连的棱不能全在 T 中，这与 T 的连通性矛盾。所以 Γ 是树。有 $v(T)-e(T)=1, v(\Gamma)-e(\Gamma)=1$，从而 $v(T)-[(e(T)+e(\Gamma)]+v(\Gamma)=2$，但由构造法知，$v(T)=v, e(T)+e(\Gamma)=e, v(\Gamma)=f$ 于是有 $v-e-f=2$。证毕。

下面分析一下 Euler 定理的实质意义。

对于一些常见的多面体，可以很容易地建立它上面的点与球面上点的一一对应关系。例如，对于正四面体，可从它的重心向一个包含了它的球面投影，球心与四面体重心重合。这样四面体的各面映为球面上的曲边三角形，如图 1.11 所示。



图 1.11 正四面体与球面的一一对应

如果设想多面体是橡皮做的，容易想像如何把它变形为球面。变形过程中可任意拉伸、弯曲，但不能撕裂，也不能把不同的点粘在一起成一点。这种变形就是所谓拓扑变形。可拓扑变形互变的图形称为拓扑等价(或同胚)。后面我们将给出拓扑等价的严格定义。

现若多面体 P 满足 Euler 定理的条件，则易见 P 与球面拓扑等价；反之，若 P 拓扑等价于球面，则 P 必满足 Euler 定理的条件。所以，若多面体 P 与 Q 都与球面拓扑等价，则 Euler 定理对 P,Q 都成立。若称 $v-e+f$ 为多面体的 Euler 数，则可知：与球面拓扑等价的多面体的 Euler 数都是 2。

图 1.10 的多面体则不然，它与环面拓扑等价，很容易想像它如何拓扑变形为环面。它的 Euler 数是 0。对其他的与环面拓扑等价的多面体，其 Euler 数必是 0。一般地，有下列基本结果。

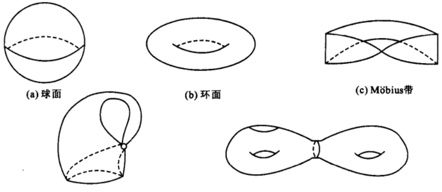
定理 1.5.2　拓扑等价的多面体具有相同的 Euler 数。

这一定理的严格证明牵涉到拓扑学理论中很深的内容，此处从略。这一结果是现代拓扑学的重要出发点。令人惊奇之处在于，Euler 数是拓扑不变性质，但计算它所用的顶点数、棱数与面数，都不是在拓扑变形下不变的东西。这启发人们去探讨在拓扑变形下不变的其他性质。从拓扑学观点来看，Euler 数 2 不是属于某个多面体的，而实质上是属于球面的。

1.5.2　曲　面

拓扑学所研究的是空间在拓扑变形下不变的性质。拓扑学中有典型意义的空间是什么呢？

说到“空间”，人们习惯于把实数轴，复平面，或者闭区间上全体连续实函数看作数学意义上的空间。作为几何学范畴的拓扑学，更愿意把“空间”概念建立在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 直观图形的背景之上。我们先看几个有趣的空间：平面上的单位圆周，单位圆盘；图 1.12 中的球面、环面、Möbius 带、穿孔双环面等都是在我们生活的三维空间中实际存在的空间曲面。



(a) 球面　(b) 环面　(c) Möbius带　(d) Klein瓶　(e) 穿孔双环面

图 1.12　曲　面

不易想像的是像 Klein 瓶那样的曲面。在三维空间中，它必然要穿破自己的瓶壁才能实现。但从抽象空间观点看，只要在四维空间中就可避免这点。正如在平面内相交的两条直线只要在三维空间中稍稍错开即可避免相交。

然而，仅仅依赖于欧氏空间直观是危险的。我们需要以某种抽象的方式来考虑空间概念和曲面概念。下面给出曲面的严格表述。

设 f 是两个欧氏空间之间的映射，$f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$。$f$ 在 $x\in\mathbf{R}^m$ **连续**是指：对任意给定的$\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $\| y-x \| <\delta$ 时有 $\| f(y)-f(x) \| <\epsilon$。若 f 在每点 $x\in\mathbf{R}^m$ 连续，称 f 为连续映射。若 f 是一一对应的连续映射，且逆映射 f^{-1} 也连续，称 f 为一个**同胚**。

$\mathbf{R}^m$ 的子集 N 叫做 x 的一个邻域，如果有实数 $r>0$，使得以 x 为中心，r 为半径的闭圆球包含在 N 内。

定义 1.5.1　设 S 是欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的子集，若 S 的每一点有同胚于平面 $\mathbf{R}^2$ 的邻域，则称 S 为欧氏空间中的**曲面**。

曲面的每一点有同胚于平面的邻域与我们对三维空间中曲面的直观印象相符。设想我们

站在曲面上某点，低头看脚下不远的地方，会觉得自己是站在一张平面上。地球表面就是一个很好的例子。

我们现在考虑比较好的一类曲面，即所谓连通闭曲面。球面、环面、Klein 瓶是连通闭曲面，而 Möbius 带、穿孔双环面、平面都不是闭曲面。确切地说，我们要考虑的是紧致连通曲面。紧致性与连通性的精确定义留到后面叙述。

如果限于考虑这些闭曲面，我们可以确切地说出这样的曲面在拓扑等价的意义上共有多少，即可对它们完全拓扑分类，使每个闭曲面必属于某一类，而不同类的曲面必不同胚。

先按下述方式造出一些闭曲面。在一个球面上挖去两个不相交的圆盘，然后粘补上一个圆柱面，使圆柱面的两个边界圆分别粘到球面的两个圆孔边缘，如图 1.13 所示。这一过程称为"添加一个环柄"到球面上。可继续这一步骤添加二个、三个，以至任意有限多个环柄到球面上。

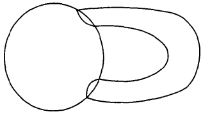


图 1.13　添加一个环柄的球面

通过这种添加环柄可得到闭曲面分类中一半类别的闭曲面。读者容易看出添加一个环柄的球面从拓扑等价意义上不过是一个环面。添加两个环柄的球面则是双环面。

另一半类别的闭曲面是像 Klein 瓶那样不能在三维空间实现的曲面。虽然不易想像，却可按添加环柄类似方法作出。对球面挖去一个圆盘后粘上一个 Möbius 带，把 Möbius 带的边界（注意这个边界是一个圆周）粘到挖去的圆孔周边上即可。想像这个粘合是在四维空间中进行的。这样得到的闭曲面称为射影平面。当然，这一手续可继续到挖去有限个圆盘，在每个洞上粘上 Möbius 带。当挖去的洞为两个时，得到的正是 Klein 瓶。

定理 1.5.3（闭曲面分类定理）　任何闭曲面或者同胚于球面，或者同胚于添加了有限多个环柄的球面，或者同胚于添加了有限多个 Möbius 带的球面。

这一定理是拓扑学中最漂亮的结果之一，其证明已超出本书的范围，故从略。

添加了 n 个环柄的球面称为亏格为 n 的可定向曲面。可定向曲面的分类是 Möbius (1790—1868) 在一篇为申请巴黎科学院大奖所写的论文中初次提出并解决的。

1.5.3　拓扑空间与拓扑基

下面开始引入拓扑空间抽象理论的基本概念，并介绍它的最初步性质。

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上，连续性这一概念是通过极限语言来描述的。而极限则是通过开集（开区间）和邻域来描述的。我们可循此抽象出拓扑空间概念。

定义 1.5.2　设 X 是一个非空集合，$\mathscr{T}$ 是 X 的一些子集为元素组成的集合，如果 $\mathscr{T}$ 满足下列条件：

(1) $X, \phi \in \mathscr{T}$,

(2) 若 $A, B \in \mathscr{T}$，则 $A \cap B \in \mathscr{T}$,

(3) 若 $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}$，则 $\bigcup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}$,

则称 $\mathscr{T}$ 为 X 上一个**拓扑**。$\mathscr{T}$ 中元素称为 X 的**开集**。X 连同其上拓扑 $\mathscr{T}$ 一起称为一个**拓扑空间**，记为 $(X, \mathscr{T})$。当 X 上的拓扑确知时，也可简记为 X。

因此，简言之，拓扑空间就是在其上定义了开集的集合。由上述定义可知，拓扑空间中的

开集有下列性质：

(1) X 和$\varnothing$都是开集；

(2) 有限多个开集的交是开集；

(3) 任意多个开集的并是开集。

例 1.5.1　设 $\mathbf{R}$ 为实数集。$\mathbf{R}$ 的子集 A 如果满足条件：对 A 中任意一点 x，均存在一个正数 ε 使开区间 $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$，则称 A 为开集。令 $\mathscr{T}=\{\mathbf{R}$ 中所有开集$\}$，易验证 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的拓扑。这个拓扑是我们所熟悉的，称之为 $\mathbf{R}$ 上的欧氏度量拓扑。$(\mathbf{R},\mathscr{T})$ 简称为实数拓扑空间。

例 1.5.2　设 $\mathbf{R}^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$。$\mathbf{R}^n$ 中点 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 的距离 $|a-b|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$，令 $\mathscr{T}=\{A\subseteq\mathbf{R}^n\mid$ 对 A 的每一点 x，存在 $\varepsilon>0$ 使得一切适合 $|x-y|<\varepsilon$ 的点 y 皆在 A 中$\}$，则易见 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的拓扑。$(\mathbf{R}^n,\mathscr{T})$ 称为 n 维空间，有时就简记为 $\mathbf{R}^n$。当 $n=2$ 和 3 时，$\mathscr{T}$ 就是平面和三维空间中通常的度量拓扑。

例 1.5.3　设 X 为非空集合。令 $\mathscr{T}=\{X,\varnothing\}$，即 $\mathscr{T}$ 中只有 X 和$\varnothing$两个元素。易见 $\mathscr{T}$ 满足定义 1.5.2 的条件，从而 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，称之为平庸空间。平庸空间只有两个开集：X 自身和空集$\varnothing$。

例 1.5.4　设 X 为非空集合，令 $\mathscr{T}=\{X$ 的所有子集$\}=2^X$，即 X 的幂集合，则易见 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑。$(X,\mathscr{T})$ 成为拓扑空间，称之为离散空间。离散空间中每个子集都是开集。

定义 1.5.3　设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$x\in X$。如果 $U\subseteq X$，使得有一个包含 x 的开集 $V\subseteq U$，则称 U 为 x 的**邻域**。x 的所有邻域所成集合称为 x 的**邻域系**。

由定义 1.5.3 知，凡包含 x 的开集均为 x 的邻域，称为 x 的开邻域。

定义 1.5.4　设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$x\in X$，$A\subseteq X$。如果 x 的每个邻域中都有 A 的异于 x 的点，则称 x 为 A 的**极限点**。如果 A 的每个极限点都属于 A，则称 A 为**闭集**。

例 1.5.5　设 $\mathbf{R}$ 为实数空间。$A=\left\{\frac{1}{n}\mid n\text{ 为正整数}\right\}\subseteq\mathbf{R}$。$x=0\in R$。0 的任何邻域 U 必包含一个开区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$，而 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中必有 A 中异于 0 的点，从而 0 是 A 的极限点。这个极限点不属于 A，故 A 不是闭集。

定理 1.5.4　拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中子集 A 为闭集$\Leftrightarrow X-A$ 为开集。

证　设 A 为闭集。任给 $x\in X-A$，有 $x\notin A$，从而 x 不是 A 的极限点。于是存在 x 的邻域 U 使 $U\cap A=\varnothing$，即 $U\subseteq X-A$。又由于 U 是 x 的邻域，有含 x 的开集 $V\subseteq U\subseteq X-A$。记这个开集为 V_x。有 $X-A=\bigcup_{x\in X-A}V_x$。于是 $X-A$ 表为一族开集的并，从而是开集。

反之，设 $X-A$ 为开集，则对任何 $x\in X-A$，$X-A$ 就是 x 的一个开邻域，而这个开邻域中没有 A 的点，从而 x 不能是 A 的极限点，即 A 的极限点必不在 $X-A$ 中，故 A 的极限点皆在 A 中。即得 A 是闭集。证毕。

推论　设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，则有

(1) X，$\varnothing$是闭集；

(2) X 中有限个闭集的并是闭集；

(3) X 中任意多个闭集的交是闭集。

证　由集合运算律 $\bigcap A'=(\bigcup A)'$，$\bigcup A'=(\bigcap A)'$（参见 1.1.1）和 $X-A=A'$，用定理 1.5.4 即得。证毕。

例 1.5.6 实数空间 $\mathbf{R}$ 的闭区间$[a,b]$是闭集。这是因为$[a,b]$的余集是开区间$(-\infty,a)$和$(b,+\infty)$，从而是开集。平庸空间中每一个真子集都不是闭集也不是开集。离散空间中每一个子集都是闭集又是开集。任何拓扑空间中 X 和$\varnothing$都是既开又闭的子集。

定义 1.5.5 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$x\in X$。如果有一簇 x 的邻域 $\mathscr{U}_x$，使得对每个 x 的邻域 U,V，有 $W\in\mathscr{U}_x$ 使得 $W\subseteq U\cap V$，则称 $\mathscr{U}_x$ 为 x 的**邻域基**。

例 1.5.7 设 x_0 为实数空间 $\mathbf{R}$ 的任意一点，则开区间簇 $\mathscr{U}_{x_0}=\left\{\left(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}$成为 x_0 点的邻域基。事实上，对任意 x_0 的邻域 U,V，必存在 n_1,n_2 使 $\left(x_0-\frac{1}{n_1},x_0+\frac{1}{n_1}\right)\subseteq U$，$\left(x_0-\frac{1}{n_2},x_0+\frac{1}{n_2}\right)\subseteq V$。取 $W=\left(x_0-\frac{1}{n_3},x_0+\frac{1}{n_3}\right)$，其中 $n_3=\max\{n,n_2\}$，则 $W\in\mathscr{U}_{x_0}$ 且 $W\subseteq U\cap V$。

我们知道，要给出 X 上一个拓扑，就要在 X 上定义一族开集。能否用较简单一些的方式定义出一族开集呢？这就引出拓扑基的概念。

定义 1.5.6 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}$。若 $\mathscr{T}$ 中每个成员(即 X 的每一开集)都是 $\mathscr{B}$ 中某些成员的并，则称 $\mathscr{B}$ 为拓扑 $\mathscr{T}$ 的基，简称为 X 的**拓扑基**。

定理 1.5.5 设 $\mathscr{B}$ 是非空集合 X 上一族子集(即由 X 的一些子集为元素构成的集合)。若满足

(1) $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$,

(2) 对 $B_1,B_2\in\mathscr{B},x\in B_1\cap B_2$，存在 $W_x\in\mathscr{B}$ 使 $x\in W_x\subseteq B_1\cap B_2$，

则 $\mathscr{B}$ 必是 X 上惟一的拓扑 $\mathscr{T}$ 的基，这个拓扑就是 $\mathscr{T}=\{A\mid\exists\,\mathscr{B}_A\subseteq\mathscr{B}\text{ 使 }A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B\}$。

反之，若 $\mathscr{B}$ 是某个拓扑的基，则 $\mathscr{B}$ 必满足条件(1),(2)。

证 当 $\mathscr{B}$ 满足条件(1),(2)时，可根据拓扑的定义按部就班地证明 $\mathscr{T}$ 是一个拓扑。若 $\mathscr{T}'$ 也是一个以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑，则对每个 $A\in\mathscr{T}'$，A 必是 $\mathscr{B}$ 中某些成员之并，从而 $A\in\mathscr{T}$，于是 $\mathscr{T}'\subseteq\mathscr{T}$。又由于 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}'$，故若 $A\in\mathscr{T}$，A 必是 $\mathscr{B}$ 中某些成员(从而也是 $\mathscr{T}'$ 的某些成员)之并，故 $A\in\mathscr{T}'$，又得 $\mathscr{T}\subseteq\mathscr{T}'$。这样 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$。因而 $\mathscr{T}$ 是 X 中惟一一个以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑。

反之，若已知 X 上的拓扑 $\mathscr{T}^*$，而 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的基，则 $X\in\mathscr{T}^*$，从而 X 是 $\mathscr{B}$ 中成员之并；但 $\mathscr{B}$ 的所有成员都在 X 中，即得 $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B$。再若 $B_1,B_2\in\mathscr{B},x\in B_1\cap B_2$，则 $B_1\cap B_2\in\mathscr{T}^*$，从而 $B_1\cap B_2$ 是 $\mathscr{B}$ 中成员之并。这样必有一个 $W_x\in\mathscr{B}$ 使 $x\in W_x\subseteq B_1\cap B_2$，即 $\mathscr{B}$ 必满足条件(1),(2)。证毕。

这一定理告诉我们，拓扑可以由它的基惟一决定。我们只要给出了一个满足上述定理中条件(1),(2)的集簇，就给出了一个拓扑基，也就给出了一个拓扑。

例 1.5.8 若拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的每点 x 都有邻域基，则全部邻域基之并成为 X 的拓扑基。因为对每个开集 $A\in\mathscr{T},x\in A$，由于 A 和 X 都是 x 的邻域，故有 x 的邻域 $U_x\in\mathscr{U}_x$(x 的邻域基)且 $U_x\subseteq A\cap X=A$。令 $A'=\bigcup_{x\in A}U_x$，则 $A'\subseteq A$。但又显然 $A'\supseteq A$，故 $A'=A$，即 A 是邻域基中成员的并。

例 1.5.9 实数空间 $\mathbf{R}$ 中 $\mathscr{B}=\left\{\left(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right)\middle|x\in\mathbf{R},n=1,2,\cdots\right\}$成为拓扑基。$\mathscr{B}'=\{\mathbf{R}\text{ 中所有开区间}\}\supseteq\mathscr{B}$，从而由拓扑基定义知 $\mathscr{B}'$ 也成为拓扑基。一般地，在拓扑空间 $\mathbf{R}^n$ 中，$\mathscr{B}=\left\{B\left(x,\frac{1}{n}\right)\middle|x\in\mathbf{R}^n,n=1,2,\cdots\right\}$成为拓扑基，其中 $B\left(x,\frac{1}{n}\right)=\left\{y\,\middle|\,|y-x|<\frac{1}{n}\right\}$。当然

$\mathscr{B}'=\{\mathbf{R}^n$ 中所有 n 维开球体$\}\supseteq\mathscr{B}$，从而 $\mathscr{B}'$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑基。

1.5.4 连续映射与同胚

集合 X 上有了拓扑、开集、闭集、邻域等概念之后，我们可以着手讨论映射的连续性了。

定义 1.5.7 设$(X,\mathscr{T}_1)$和$(Y,\mathscr{T}_2)$是两个拓扑空间。我们简记为 X 和 Y。若 $f:X\to Y$ 是映射且满足：Y 中任何开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$都是 X 的开集，则称 f 为 X 到 Y 的**连续映射**。

设 $x_0\in X$，则 $f(x_0)\in Y$。若 $f(x_0)$在 Y 中的任何邻域 W 的原像 $f^{-1}(W)$均为 x_0 在 X 中的邻域，则称映射 f 在 x_0 点连续。

我们来给出连续映射的一些判别条件。

定理 1.5.6 设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射，则下列条件等价：

(1) f 是连续映射；

(2) Y 的任何闭集 F 的原像 $f^{-1}(F)$是 X 的闭集；

(3) Y 的拓扑基 $\mathscr{B}$ 的任一成员 B 的原像 $f^{-1}(B)$是 X 的开集；

(4) f 在每一点 $x\in X$ 处都是连续的。

证 (1)⇒(2) 设 F 为 Y 的闭集，则 $F'=Y-F$ 为开集，从而 $f^{-1}(F')=f^{-1}(Y-F)$为开集。我们证明 $f^{-1}(Y-F)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(F)=X-f^{-1}(F)$。事实上有 $x\in f^{-1}(Y-F)\Leftrightarrow f(x)\in Y-F\Leftrightarrow f(x)\in Y$ 且 $f(x)\notin F\Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y)$ 且 $x\notin f^{-1}(F)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(Y)-f^{-1}(F)$。显见 $X=f^{-1}(Y)$。这样就证明了 $f^{-1}(F)$为 X 中闭集。

完全类似可证(2)⇒(1)。

(1)⇒(3) 由于 $\mathscr{B}$ 中成员 B 为开集，从而 $f^{-1}(B)$为 X 的开集。

(3)⇒(1) 设 A 为开集，则有 $\mathscr{B}_1\subseteq\mathscr{B}$ 使 $A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$。而 $f^{-1}(A)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}f^{-1}(B)$($x\in f^{-1}(A)\Leftrightarrow f(x)\in A\Leftrightarrow\exists B\in\mathscr{B}_1:f(x)\in B\Leftrightarrow\exists B\in\mathscr{B}_1:x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}f^{-1}(B)$)。于是 $f^{-1}(A)$是一族开集之并，从而为开集。

(1)⇒(4) 设 $x\in X$，W 为 $f(x)$在 Y 中的邻域，则有 Y 的开集 W' 使 $f(x)\in W'\subseteq W$。而 $f^{-1}(W')$为 X 的开集，且 $x\in f^{-1}(W')\subseteq f^{-1}(W)$，故 $f^{-1}(W)$为 x 的邻域，即 f 在 x 点连续。

(4)⇒(1) 设 A 为 Y 的开集。对每个 $x\in f^{-1}(A)$有 $f(x)\in A$，从而 A 是 $f(x)$的邻域。这样有 $f^{-1}(A)$为 x 的邻域，即有开集 $U_x\subseteq f^{-1}(A)$，$x\in U_x$。于是 $f^{-1}(A)=U_{x\in f^{-1}(A)}U_x$ 是开集的并，从而是开集。证毕。

定理 1.5.7 $f:X\to Y$ 在 x_0 处连续⇔对 $f(x_0)$的邻域基的成员 $U_{f(x_0)}$，$f^{-1}(U_{f(x_0)})$是 x_0 的邻域。

证 定理的"⇒"部分是显然的。现证"⇐"部分。设 W 是 $f(x_0)$的邻域，则存在邻域基中成员 U 使 $U\subseteq W$，$f(x_0)\in U$。而 $f^{-1}(W)\supseteq f^{-1}(U)$，由于 $f^{-1}(U)$是 x_0 的邻域，故 $f^{-1}(W)$也是 x_0 的邻域。证毕。

定义 1.5.8 设 X,Y 为拓扑空间，若 $f:X\to Y$ 为一一对应，且 f 和 f^{-1} 都是连续映射，则称 f 为 X 到 Y 的**同胚**。

若 $f:X\to Y$ 为一一对应，则 $f^{-1}:Y\to X$ 存在。但 f 连续时 f^{-1} 未必连续。我们说 X 与 Y 同胚不仅要求有一个 X 到 Y 的一一对应 f，还要求 f 和 f^{-1} 都是连续映射。直接从定义易见，若 f 为同胚，则 f^{-1} 也是同胚。

例 1.5.10 设 $\mathbf{R}$ 为实数空间。$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为通常的一元函数：$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=y\in\mathbf{R}$，则

$y=f(x)$在通常函数意义上于 x_0 点连续$\Leftrightarrow f$ 作为实数拓扑空间 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射在 x_0 点连续。事实上，由于$\left\{\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)\middle|n=1,2,\cdots\right\}$是 $y_0=f(x_0)$ 的邻域基，按高等数学中函数 $y=f(x)$在 x_0 连续的定义，对$\frac{1}{n}$必有 $\delta>0$ 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时$|f(x)-y_0|<\frac{1}{n}$。这就是说，$f((x_0-\delta,x_0+\delta))\subseteq\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)$，亦即 $f^{-1}\left(\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)\right)\supseteq(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即 $f^{-1}\left(\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)\right)$是 x_0 的邻域。由定理 1.5.7 得 f 是在 x_0 连续的拓扑空间映射。反之，若对任何 n，$f^{-1}\left(\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)\right)$是 x_0 的邻域，则存在 $\delta_n>0$ 使 $f^{-1}\left(\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)\right)\supseteq(x_0-\delta_n,x_0+\delta_n)$，即 $f((x_0-\delta_n,x_0+\delta_n))\subseteq\left(y_0-\frac{1}{n},y_0+\frac{1}{n}\right)$。这就是说，$0<|x-x_0|<\delta_n$ 时，$|f(x)-y_0|<\frac{1}{n}$。现若任给 $\epsilon>0$，必存在 n 使$\frac{1}{n}<\epsilon$。取 $\delta=\delta_n$，则 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-g_0|<\frac{1}{n}<\epsilon$，即 $f(x)$按高等数学中连续的意义在 x_0 处连续。

上例说明，一般拓扑空间中连续映射的概念是实数集上连续函数概念的抽象化。

例 1.5.11 令 $X=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即实数轴上从$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$的开区间。$\mathbf{R}$ 是实数空间。定义 X 上拓扑 $\mathcal{T}^*=\{A\cap X|A\in\mathcal{T}\}$，即 $\mathbf{R}$ 中开集与 X 的交定义为 X 的开集，则 $\mathbf{R}$ 与 X 同胚。事实上，$f:X\to\mathbf{R},x\to\tan x$ 是一个一一对应，其逆映射为 $f^{-1}:\mathbf{R}\to X,y\to\arctan y$。$f$ 和 f^{-1}均是连续函数，例 1.5.10 已说明连续函数与连续映射是一回事，从而 f 为同胚。

拓扑空间 X 与 Y 同胚的意思是：X 可通过"连续的"变化变到 Y（Y 也可"连续地"变到 X）。同胚的空间当然有许多共同的特征（称为同胚不变量）。如何确定空间的同胚或不同胚，以及对同胚不变量进行研究，是拓扑学的主要任务。我们在此指出（而不证明）几对同胚或不同胚的空间，使读者窥豹一斑。

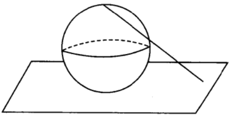


图 1.14 球面与平面同胚

(1) 去掉一点的球面与平面同胚，如图 1.14 所示。

(2) 环带与 Möbius 带不同胚，如图 1.15 所示。

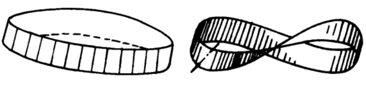


图 1.15 环面与 Möbius 带不同胚

(3) 环面与球面不同胚，如图 1.16 所示。

(4) 带一个柄的球面与双环面不同胚，如图 1.17 所示。

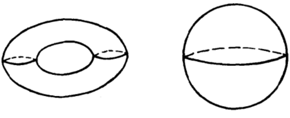


图 1.16 环面与球面不同胚

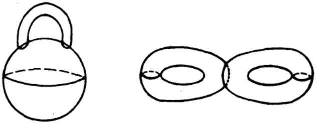


图 1.17 带一个柄球面与双环面不同胚

1.5.5 子空间、积空间

设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间。若Y为X的子集,Y中是否能够定义某种拓扑$\mathscr{T}_1$使得它与X的拓扑$\mathscr{T}$有很自然的"继承"关系呢?这就引出子空间的概念。

首先我们指出,若Y是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的非空子集,令$\mathscr{T}_1=\{A\cap Y\mid A\in\mathscr{T}\}$,则$\mathscr{T}_1$成为$Y$上的拓扑(这容易从拓扑定义及集合运算律直接验证)。

定义 1.5.9 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间。Y是X的非空子集,$\mathscr{T}_1=\{A\cap Y\mid A\in\mathscr{T}\}$,则$(Y,\mathscr{T}_1)$称为$(X,\mathscr{T})$的拓扑子空间。$\mathscr{T}_1$称为$Y$上由$\mathscr{T}$诱导的子拓扑。

以后我们说Y是X的拓扑子空间,就是指Y上具有X的拓扑$\mathscr{T}$诱导的拓扑,而不另加说明。

定理 1.5.8 设Y是拓扑空间X的拓扑子空间,则有

(1) A为Y中开集$\Leftrightarrow$存在X的开集A'使$A=Y\cap A'$;

(2) B为Y中闭集$\Leftrightarrow$存在X的闭集B'使$B=Y\cap B'$;

(3) 若$\mathscr{B}$为X的拓扑基,则$\mathscr{B}^*=\{B\cap Y\mid B\in\mathscr{B}\}$为$Y$的拓扑基;

(4) 设$x\in Y\subseteq X$,若$\mathscr{U}_x$为x在X中的邻域基,则$\mathscr{U}'_x=\{U\cap Y\mid U\in\mathscr{U}_x\}$为$x$在$Y$中的邻域基。

证 (1) 按拓扑子空间定义直接得到。

(2) B为Y中闭集$\Leftrightarrow Y-B$为Y中开集$\Leftrightarrow$存在X的开集A'使$Y\cap A'=Y-B\Leftrightarrow$存在$X$的闭集$B'$使$A'=X-B'$,从而$Y\cap(X-B')=Y-B\Leftrightarrow Y-Y\cap B'=Y-B\Leftrightarrow Y\cap B'=B$。

(3) 任给Y的开集A,有X的开集A'使$A=Y\cap A'$,而存在$\mathscr{B}_1\subseteq\mathscr{B}$使$A'=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$,从而$A=Y\cap A'=Y\cap(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}(Y\cap B)$,故$\mathscr{B}^*=\{Y\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$是$Y$的拓扑基。

(4) 与(3)的证明完全类似。证毕。

例 1.5.12　二维欧氏空间$(\mathbf{R}^2,\mathscr{T})$的子集$Y=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$是平面上一个圆周。它作为$\mathbf{R}^2$的子空间具有由$\mathscr{T}$诱导的拓扑。易见$Y$中每点$(x,y)$的邻域基的成员都是圆周上以$(x,y)$为中心的一段圆弧(不包括端点)。类似地,三维空间$\mathbf{R}^3$的子集$Y=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$是空间中的球面,它成为$\mathbf{R}^3$的子空间。其中每点$(x,y,z)$的邻域基的成员是球面上以该点为中心的球形面。

设$(X,\mathscr{T}_1)$,$(Y,\mathscr{T}_2)$是两个拓扑空间,集合X与Y的笛卡儿积$X\times Y$上是否也有相应的拓扑结构呢?我们自然会想到,X中的开集U与Y中开集V的笛卡儿积$U\times V$应该是$X\times Y$的开集。那么可否定义$\mathscr{T}=\{U\times V\mid U\in\mathscr{T}_1,V\in\mathscr{T}_2\}$为$X\times Y$的拓扑呢?下面定理将给出回答。

定理 1.5.9　设$(X,\mathscr{T}_1)$,$(Y,\mathscr{T}_2)$为拓扑空间,则$X\times Y$上的子集簇$\mathscr{B}=\{U\times V\mid U\in\mathscr{T}_1,V\in\mathscr{T}_2\}$一般不构成$X\times Y$的拓扑,而构成$X\times Y$上的拓扑基。

证　一般来说$\mathscr{B}$不满足定义1.5.2中的第(3)条。例如在$R\times R$中,$\{(0,1)\times(0,1)\}\cup\{(1,2)\times(1,2)\}$是平面上两个(开)正方形,没有公共边,但有一个公共顶点相接于(1,1)处,从而使它不能表为$U\times V$的形式,故不属于$\mathscr{B}$。但容易验证(按定理1.5.5)$\mathscr{B}$是一个拓扑基,且由定理1.5.5知,在$X\times Y$上有惟一一个拓扑以$\mathscr{B}$为基。证毕。

定义 1.5.10　设$(X,\mathscr{T}_1)$,$(Y,\mathscr{T}_2)$为拓扑空间,则称$X\times Y$上以$\mathscr{B}=\{U\times V\mid U\in\mathscr{T}_1,V\in\mathscr{T}_2\}$为基的拓扑$\mathscr{T}$为积拓扑。$(X\times Y,\mathscr{T})$称为$X$与$Y$的拓扑积空间。在不会混淆时简称为积空间。

定理 1.5.10　设$X=X_1\times X_2$是X_1,X_2积空间,$\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$是$X_1,X_2$的拓扑基,则$\mathscr{B}'=\{B_1\times B_2\mid B_1\in\mathscr{B}_1,B_2\in\mathscr{B}_2\}$是$X$的拓扑基。

证　由积拓扑定义知,$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\mid U_1\in\mathscr{T}_1,U_2\in\mathscr{T}_2\}$是$X$的拓扑基,从而每一开集可表为$\mathscr{B}$中成员的并。而$\mathscr{B}$中每一成员$U_1\times U_2$必可表为$\mathscr{B}'$中成员的并:$U_1=\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}'_1}B_1$,$U_2=\bigcup_{B_2\in\mathscr{B}'_2}B_2$,其中$\mathscr{B}'_1\subseteq\mathscr{B}_1$,$\mathscr{B}'_2\subseteq\mathscr{B}_2$。从而有

$$U_1\times U_2=(\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}'_1}B_1)\times(\bigcup_{B_2\in\mathscr{B}'_2}B_2)=\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}'_1,B_2\in\mathscr{B}'_2}(B_1\times B_2)$$

其中,最后一个等式的证明是直接的。这样,X的每一开集可表为$\mathscr{B}'$中成员的并,故$\mathscr{B}'$是X的拓扑基。

例 1.5.13　实数空间$\mathbf{R}$有一个拓扑基由所有开区间构成(参见例1.5.9),从而实数平面$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$作为积空间,其拓扑基由所有开矩形$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$构成。

对于有限多个拓扑空间$(X_1,\mathscr{T}_1)$,$(X_2,\mathscr{T}_2)$,…,$(X_n,\mathscr{T}_n)$,其积空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$上的拓扑可以完全类似的方式描述和定义,即$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2,\cdots,n\}$成为积拓扑$\mathscr{T}$的基。

1.6　拓扑空间基本性质

本节我们讨论拓扑空间的几种基本性质:连通性、分离性和紧致性。

1.6.1　拓扑空间的连通性

定义 1.6.1　设X为拓扑空间。如果存在X的非空闭集A,B使$A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=X$,称X为不连通空间。如果X不能分为两个不交的非空闭集之并,则称X为**连通空间**。

定理 1.6.1 设 X 为拓扑空间，则下列条件等价

(1) X 为不连通空间；

(2) 存在 X 中非空开集 A,B，使 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=X$；

(3) X 中存在既开又闭的非空真子集。

证 (1)⇒(2) 设 X 不连通，则存在闭集 A,B 使 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=X$。令 $A'=X-A$，$B'=X-B$，则 A',B'为开集，且 $A'\cap B'=(X-A)\cap(X-B)=X-(A\cup B)=\varnothing, A'\cup B'=X-(A\cap B)=X$。

(2)⇒(3) 由于 A,B 皆为非空不交开集，且 $A\cup B=X$，故 $B=X-A$ 为闭集，从而 B 是既开又闭的非空真子集。

(3)⇒(1) 设 B 为既开又闭的非空真子集，则 $A=X-B$ 也是既开又闭的非空真子集，且有 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=X$，故 X 不连通。证毕。

例 1.6.1 平庸空间是连通空间，因为它没有既开又闭的非空真子集。离散空间是不连通空间，它的每一子集都是既开且闭的。

例 1.6.2 实数空间 $\mathbf{R}$ 是连通空间。事实上，如果有 A,B 是 $\mathbf{R}$ 的既开又闭非空真子集且 $A\cap B=\varnothing, A\cup B=\mathbf{R}$，任取 $a\in A, b\in B$，则 $a\neq b$。不妨假设 $a<b$。令 $A'=A\cap[a,b], B'=B\cap[a,b]$。$A'$有上界 b，故有上确界，设为 b'。由于 A'为闭集，所以 $b'\in A'\subseteq A$。因而 $b'<b$，并且 $(b',b]\subseteq B'$。由于 B'为闭集，所以 $[b',b]\subseteq B'$，于是 $b'\in A\cap B$，此与 $A\cap B=\varnothing$ 矛盾。故 $\mathbf{R}$ 必是连通空间。

定义 1.6.2 设 Y 为拓扑空间 X 的非空子集。若 Y 作为 X 的子空间是连通的，则称 Y 为 X 的连通子集；否则称为不连通子集。

例 1.6.3 设 $X=\mathbf{R}, Y=[0,1]\cup[2,3]$，则易见 $[0,1]$ 和 $[2,3]$ 都是 Y 的闭集（按子拓扑定义），从而 Y 是不连通空间，即 Y 是 R 的不连通子集。

上例说明连通性是不能“遗传”给子空间的。当 X 连通时，其子空间可能连通也可能不连通。然而连通性是同胚不变性质，即有下列定理。

定理 1.6.2 设 $f:X\to Y$ 是拓扑空间的连续映射，且 f 是同胚。若 X 是连通空间，则 Y 也是连通空间。

证 设 Y 不连通，则 $Y=A\cup B$，且 $A\cap B=\varnothing$，A,B 是 Y 的既开又闭非空真子集。于是 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 是 X 的既开又闭子集。$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=f^{-1}(A\cup B)=X$。$f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=f^{-1}(A\cap B)=\varnothing$，且显然 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 是非空真子集。这与 X 连通矛盾。证毕。

拓扑空间连通性也是有限可积性质，即连通空间的积空间仍为连通空间。

定理 1.6.3 设 X_1, X_2 为连通空间，则积空间 $X_1\times X_2$ 为连通空间。

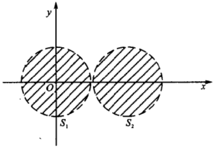
证 设 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ 是 $X_1\times X_2$ 中任意两点。由于 $X_1\times X_2$ 的子集 $\{x_1\}\times X_2$ 和 $X_1\times\{y_2\}$ 分别与 X_2, X_1 同胚，故它们都是 $X_1\times X_2$ 的连通子集。由于 $\{x_1\}\times X_2$ 与 $X_1\times\{y_2\}$ 有公共点 (x_1,y_2)，从而它们的并 Y 是连通子集（习题 20）。这样，对任何 $x,y\in X_1\times X_2$ 均有 $X_1\times X_2$ 的连通子集 $Y_{x,y}$ 使 $x,y\in Y_{x,y}$。现若 $X_1\times X_2$ 不连通，则 $X_1\times X_2=A\cup B$，其中 A,B 是既开且闭的非空不交真子集。取 $x\in A, y\in B$，有 $x,y\in Y_{x,y}$ 而 $Y_{x,y}$ 连通。但 $Y_{x,y}=(A\cap Y_{x,y})\cup(B\cap Y_{x,y})=Y_1\cup Y_2$，从而 Y_1, Y_2 是 $Y_{x,y}$ 的既开且闭非空不交真子集，此与 $Y_{x,y}$ 连通矛盾。故 $X_1\times X_2$ 必连通。证毕。

例 1.6.4 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 是连通空间。因为由定理 1.6.3 知，$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 连通，从而 $\mathbf{R}^3=$

$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$连通，由简单归纳知 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}$ 连通。但 $\mathbf{R}^2$ 中两个开圆盘 $S_1=\{x,y\mid x^2+y^2<1,x,y\in\mathbf{R}\}$与 $S_2=\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2<1,x,y\in\mathbf{R}\}$之并 $Y=S_1\cup S_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的不连通的子空间(可按子拓扑定义直接验证 S_1,S_2 是 Y 的既开又闭的真子集)。若 $S_2'=\{(x,y)\mid x^2+(y-3)^2<1,x,y\in\mathbf{R}\}$，则 $Y'=S_1\cup S_2'$更不连通的。Y'的不连通性与通常直观更为贴近(见图 1.18)。

例 1.6.5 实数空间 $\mathbf{R}$ 去掉原点所得子集 $X=\mathbf{R}-\{0\}$作为子空间是不连通空间($(-\infty,0)$ 是 X 的既开又闭的非空真子集)。但平面 $\mathbf{R}^2$ 去掉原点所得子集 $Y=\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$作为子空间是连通的。事实上，由定理 1.6.3 的证明知，对 Y 中任意两点 x,y 必有 Y 的连通子集 $Y_{x,y}$使 $x,y\in Y_{x,y}$，从而 Y 必是连通空间。从直观上看，$\mathbf{R}^2$ 被挖去一点后并没有被撕成两半，而 $\mathbf{R}$ 被挖去一点后就被“撕”成两半了。

例 1.6.6 平面 $\mathbf{R}^2$ 与实数空间 $\mathbf{R}$ 不同胚。因为如果 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个同胚，令 $Y=\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$，则 f 限制在 Y 上后仍是 Y 到 $f(Y)$的同胚，其中 $f(Y)=\mathbf{R}-\{f(0,0)\}$。由例 1.6.4 知 Y 是连通空间，而 $f(Y)$为不连通空间，这与定理 1.6.2 矛盾，从而 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}$ 必不同胚。这是利用同胚不变量判断空间是否同胚的第一个实例。



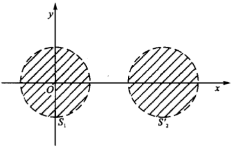


图 1.18 子集连通性

1.6.2 拓扑空间的分离性公理

拓扑空间上的拓扑结构当然影响着点之间的联系(例如点列的收敛性)。适合某些公理的拓扑空间在这方面将会有较好的行为。这些公理我们称之为分离性公理。我们在这里着重介绍“Hausdorff 空间”。

定义 1.6.3 设 X 为拓扑空间。$\{x_i\mid i=1,2,\cdots\}\subseteq X$ 称为 X 中的序列。若对点 $x\in X$ 的每一邻域 U 皆存在自然数 M 使 $i>M$ 时 $x_i\in U$，称 x 为序列$\{x_i\}$的**极限**。当序列$\{x_i\}$有极限 x 时称序列$\{x_i\}$为**收敛序列**。此时也说序列$\{x_i\}$收敛于 x。

定义 1.6.4 设 X 为拓扑空间。若 X 的任两个不同点都有不交的开邻域(即 $\forall x,y\in X$，$x\neq y$，$\exists U,V\in\mathscr{T}$使 $x\in U,y\in V$ 且 $U\cap V=\varnothing$)，则称 X 为 **Hausdorff 空间**。

例 1.6.7 多于一个点的平庸空间不是 Hausdorff 空间，因为除了空集外只有 X 本身是开集，从而两个不同点不能有不相交的开邻域。离散空间是 Hausdorff 空间，因为每个点 x 本身就是它的一个开邻域。实数空间 $\mathbf{R}$ 是 Hausdorff 空间，因为 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}|x-y|$，则$(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$与$(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$就是 x,y 的不相交的开邻域。

例 1.6.8 设 $X=\{$全体实数$\}$。定义拓扑 $\mathscr{T}=\{A\mid A\subseteq X,X-A$ 为有限集$\}\cup\{\varnothing\}$。易验证它是一个拓扑，称为余有限拓扑。在这个拓扑中，任两个非空开集都相交：$\forall U,V\in\mathscr{T}$，$X-U,X-V$ 皆为有限集，从而 $X-(U\cap V)=(X-U)\cup(X-V)$仍有限，故 $U\cap V$ 不能是

空集。于是，X 不是 Hausdorff 空间。

定理 1.6.4　Hausdorff 空间中收敛序列只有一个极限点。

证　设 X 为 Hausdorff 空间。$\{x_i\}\subseteq X$ 为收敛序列。若 $y_1\neq y_2$ 皆为极限点，则有开邻域 U,V 使 $U\cap V=\varnothing$，且 $x\in U,y\in V$。由序列收敛定义，有 N_1 使 $i>N_1$ 时 $x_i\in U$；又有 N_2 使 $i>N_2$时 $x_i\in V$。于是 $i>N_1+N_2$ 时 $x_i\in U\cup V$，此与 $U\cap V=\varnothing$矛盾。故必有 $y_1=y_2$。证毕。

如果 X 不是 Hausdorff 空间，则收敛序列可能不止一个极限点。

例 1.6.9　设$(X,\mathscr{T})$为实数集的余有限拓扑，例如 1.6.8。令 $x_i=1/i$。我们断言，序列$\{x_i\}$在$\{X,\mathscr{T}\}$中收敛于任何一点。设 $x_0\in X$ 为任意一点，U 是任意一个含 x_0 的开集，则$X-U$是有限集。设 $X-U$ 含 N 个元素，那么序列$\{x_i\}$至多有 N 个元素在 $X-U$ 中。可取 M 使 $i>M$时 $x_i\notin X-U$，即 $i>M$ 时 $x_i\in U$。这证明了 x_0 是$\{x_i\}$的极限点。

下一定理说明，Hausdorff 性质是同胚不变的、可遗传的及有限可积的性质。

定理 1.6.5　设 X 为 Hausdorff 空间，则

(1) 若 Y 与 X 同胚，则 Y 也是 Hausdorff 空间；

(2) 若 Y 是 X 的子空间，则 Y 也是 Hausdorff 空间；

(3) 若 Y 是 Hausdorff 空间，则 $X\times Y$ 也是 Hausdorff 空间。

证　(1) 设 $f:X\rightarrow Y$ 为同胚映射，$y_1\neq y_2\in Y$，则 $f^{-1}(y_1)\neq f^{-1}(y_2)$，从而在 X 中存在 $f^{-1}(y_1)$，$f^{-1}(y_2)$的不交开邻域 U_1,U_2。但 f^{-1}也是连续的，故 $f(U_1)$，$f(U_2)$是 y_1,y_2 在 Y 中的不交开邻域，即得 Y 是 Hausdorff 空间。

(2) 设 $y_1\neq y_2\in Y\subseteq X$，则 y_1,y_2 在 X 中有不交开邻域 U,V。而 $U\cap Y$、$V\cap Y$ 是 y_1,y_2 在 Y 中的不交开邻域，从而 Y 作为子空间是 Hausdorff 的。

(3) 设$(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)\in X\times Y$，则 $x_1\neq x_2$ 或 $y_1\neq y_2$。不妨设 $x_1\neq x_2$，于是 x_1,x_2 在 X 中有不交开邻域 U,V；从而 $U\times Y,V\times Y$ 是(x_1,y_1)，(x_2,y_2)在 $X\times Y$ 中的不交开邻域。证毕。

1.6.3　拓扑空间的紧致性

定义 1.6.5　设 X 为拓扑空间。若 $\mathscr{U}$ 是 X 中的一簇开集，使得 $X=\bigcup_{U\in\mathscr{U}}U$，则称 $\mathscr{U}$ 为 X 的一个**开覆盖**。若 $\mathscr{U}_1\subseteq\mathscr{U}$ 且 $X=\bigcup_{U\in\mathscr{U}_1}U$，称 $\mathscr{U}_1$ 为 $\mathscr{U}$ 的**子覆盖**。

在实数空间上有著名的 Borel 覆盖定理：$\mathbf{R}$ 的子集 Y 为有界闭集$\Leftrightarrow Y$ 的任一开覆盖有有限子覆盖。我们现对一般拓扑空间来描述类似的性质。

定义 1.6.6　设 X 为拓扑空间。若 X 的每一开覆盖都有有限子覆盖，称 X 为**紧致空间**(简称**紧空间**)。若 Y 作为 X 的子空间是紧空间，称 Y 为 X 的**紧子集**。

定理 1.6.6　拓扑空间 X 的子集 Y 为紧子集$\Leftrightarrow Y$ 的任一由 X 的开集构成的开覆盖都有有限子覆盖。

证　“$\Rightarrow$”，设 $\mathscr{A}$是 X 的开集簇，且$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\supseteq Y$，则$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}(A\cap Y)=Y$ 且 $\mathscr{A}'=\{A\cap Y|A\in\mathscr{A}\}$是 Y 的开集簇，从而 $\mathscr{A}'$有有限子集 $\mathscr{A}'_1$，使$\bigcup_{A'\in\mathscr{A}'_1}(A')=Y$，其中 $A'=A\cap Y$。令 $\mathscr{A}_1=\{A|A\cap Y\in\mathscr{A}'_1\}$，则 $\mathscr{A}_1$是 $\mathscr{A}$的有限子簇，且$\bigcup_{A\in\mathscr{A}_1}A\supseteq Y$。

“$\Leftarrow$”的证明是类似的，留给读者作为练习。证毕。

定理 1.6.7　设 X 为拓扑空间，则

(1) 若 X 的由拓扑基 $\mathscr{B}$ 的成员构成的每一开覆盖有有限子覆盖，则 X 为紧空间；

(2) 若 Y 与 X 同胚,则 X 为紧空间$\Leftrightarrow Y$ 为紧空间;

(3) 若 X 为紧空间,Y 为 X 的闭子集,则 Y 是 X 的紧子集;

(4) 若 X,Y 均为紧空间,则 $X\times Y$ 为紧空间。

证 (1) 设 $\mathscr{A}$ 为 X 的开覆盖,则每个 $\mathscr{A}$ 中的开集 U 可表为 $\mathscr{B}$ 的成员之并:$U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_U}B$,其中 $\mathscr{B}_U\subseteq\mathscr{B}$。于是 $X=\bigcup_{U\in\mathscr{A}}U=\bigcup_{U\in\mathscr{A}}(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_U}B)$ 是 X 的由 $\mathscr{B}$ 的成员构成的开覆盖,它有有限子覆盖 $X=\bigcup B$,其中 B 是 $\mathscr{B}_U(U\in\mathscr{A})$ 中有限个成员。对这个子覆盖的每个成员 B,取 $\mathscr{A}$ 中包含 B 的一个 A,则这些 A 构成 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖。

(2) 同胚映射是开集之间的一一对应映射,可按部就班地证明 X 的每一开覆盖对应于 Y 的开覆盖,而子覆盖对应于 Y 的子覆盖,从而证明 X 与 Y 有同样的紧致性。

(3) 设 Y 是紧空间 X 的闭子集,$\mathscr{A}$ 是一个由 X 的开集组成的 Y 的开覆盖,则由于 Y 是闭集,$X-Y$ 是开集,从而 $\mathscr{A}'=\mathscr{A}\cup\{X-Y\}$ 是 X 的开覆盖。由 X 紧有 $\mathscr{A}'$ 的有限子集覆盖 X,从而也覆盖 Y。由定理 1.6.6 得 Y 是紧子集。

(4) 由于 $\mathscr{B}=\{U\times V|U\in\mathscr{T}_1,V\in\mathscr{T}_2\}$ 是 $X\times Y$ 的拓扑基,由本定理的(1),我们只要证明由 $\mathscr{B}$ 中成员构成的开覆盖有有限子覆盖即可。现设 $\mathscr{A}$ 是一个这样的开覆盖,则由于 $X\times\{y\}$ 与 X 同胚,它必是 $X\times Y$ 的紧子集,从而有 $\mathscr{A}$ 的有限子集 $\mathscr{A}_y$ 构成 $X\times\{y\}$ 的开覆盖。$\mathscr{A}_y=\{U_{i,y}\times V_{i,y}|i=1,2,\cdots,n\}$。不妨假定 $\mathscr{A}_y$ 的每一成员都与 $X\times\{y\}$ 相交(否则将该成员剔除后剩下的成员仍是一个覆盖)。令 $M_y=\bigcap_{i=1}^{n}V_{i,y}$,则 $y\in M_y$,且 M_y 为开集,$\mathscr{A}_y$ 是 $X\times M_y$ 的开覆盖。又 $\{M_y|y\in Y\}$ 是紧空间 Y 的开覆盖,必有有限子覆盖 $\{M_{y_i}|i=1,2,\cdots,m\}$,于是 $\mathscr{A}_{y_1}\cup\mathscr{A}_{y_2}\cup\cdots\cup\mathscr{A}_{y_m}$ 是 $X\times Y$ 的有限子覆盖。证毕。

定理 1.6.8 设 X 为 Hausdorff 空间,A 是 X 的紧子集,$x\notin A$,则存在开集 U,V 使 $x\in U,A\subseteq V$ 且 $U\cap V=\varnothing$。

证 任给 $y\in A$,则 $y\neq x$。由 X 为 Hausdorff 空间,存在开集 U_y,V_y 使 $x\in U_y,y\in V_y$,且 $U_y\cap V_y=\varnothing$。于是 $\{V_y|y\in A\}$ 成为 A 的开覆盖,从而有有限子覆盖 $\{V_{y_1},V_{y_2},\cdots,V_{y_n}\}$。令 $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$,则 U 是含 x 的开集。令 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$,则 V 是包含 A 的开集,且

$$U\cap V=(\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i})\cap(\bigcup_{j=1}^{n}V_{y_j})=\bigcup_{j=1}^{n}((\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i})\cap V_{y_j})=\bigcup_{j=1}^{n}(\bigcap_{i=1}^{n}(U_{y_i}\cap V_{y_j}))=\varnothing$$

证毕。

定理 1.6.9 Hausdorff 空间中的紧子集必是闭集。

证 设 A 为 Hausdorff 空间 X 的紧子集,则对 $x\notin A$,由定理 1.6.8 知,存在开集 U,V 使 $x\in U,A\subseteq V$ 且 $U\cap V=\varnothing$,即 $\forall x\in X-A$,有 x 的邻域 $U_x\subseteq X-A$。这说明 $X-A$ 是开集,从而 A 是闭集。证毕。

例 1.6.10 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集 A 为紧子集,当且仅当 A 为有界闭集。事实上,若 A 为 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集,由于 $\mathbf{R}^n$ 是 Hausdorff 空间,由定理 1.6.9 知 A 为闭集。同时 $\mathscr{A}=\{A(k_1,k_2,\cdots,k_n)|k_i$ 为整数$\}$ 成为 A 的开覆盖,其中 $A(k_1,k_2,\cdots,k_n)=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)|y_i\in R,|y_i-k_i|<2\}$。于是 $\mathscr{A}$ 有有限子集覆盖 A。每个 $\mathscr{A}$ 中成员是有界集,从而有限个 $\mathscr{A}$ 个成员之并仍有界,故 A 有界。反之,若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集,则有整数 N 使 $A\subseteq[-N,N]^n$。而 $[-N,N]$ 是 $\mathbf{R}$ 的闭区间,从而是紧子空间,于是由定理 1.6.7 的(4)知 $[-N,N]^n$ 为紧子空间。但 A 作为 $[-N,N]^n$ 的子集是闭的,所以由定理 1.6.7 的(3)知 A 为紧子空间,从而 A 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集。

例 1.6.11　$\mathbf{R}^n$ 中的子空间 $S^n=\{x \mid x\in\mathbf{R}^n, |x-0|=1\}$（$n$ 维单位球面）与 $\mathbf{R}^n$ 不同胚。事实上，由例 1.6.10 知，S^n 是有界闭集，从而是紧子空间，而 $\mathbf{R}^n$ 不是紧空间，由定理 1.6.7 的(2)知，紧空间与非紧空间不能同胚。

习　题

1. 设 A,B,C 为集合，证明若 $A\subseteq B$，则 $A\cup C\subseteq B\cup C$，$A\cap C\subseteq B\cap C$。

2. $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合，证明 $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)-(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i-A_{i+1})\cup(A_n-A_1)$。

3. 定义实数集 $\mathbf{R}$ 上的关系"S"：$xSy\Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Z}$，证明 S 是等价关系。

4. 设 $f:X\to Y$ 为映射，证明 f 是一一映射 $\Leftrightarrow \forall A,B\subset X, f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$。

5. 证明全体有理数的集合是可列集。

6. 在实数集 $\mathbf{R}$ 上定义代数运算$\circ$：$a\circ b=a+2b$，它是否满足结合律？

7. 在实数集 $\mathbf{R}$ 上普通乘法作为代数运算。以下映射是否 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的代数同态？

(1) $x\to|x|$；　(2) $x\to 2x$；　(3) $x\to x^2$；　(4) $x\to -x$。

8. 群 G 中每一元 x 皆满足 $x^2=e$，证明 G 是交换群。

9. 若 G 是有限群，则 G 中阶大于 2 的元素必为偶数个。

10. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，其上一个变换 $f_{(a,b)}$ 定义为 $f_{(a,b)}(x)=ax+b$，证明 $G=\{f_{(a,b)} \mid a,b$ 为有理数$\}$构成群。G 是否交换群。

11. 找出 S_3 中所有不能与 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 交换的元素。

12. 设 G 是循环群，且 G 与 $\bar{G}$ 同态，证明 $\bar{G}$ 也是循环群。

13. 证明群 G 的两个子群 G_1,G_2 的交 $G_1\cap G_2$ 也是 G 的子群。若 G_1,G_2 是 G 的不变子群，则 $G_1\cap G_2$ 也是不变子群。

14. 证明群 G 的子群 G_1 若指数为 2，则它必是不变子群。

15. 集合 $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbf{Z}\}$ 对普通加法和乘法作成一个整环。

16. 集合 $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 对普通加法和乘法成为一个域。

17. 找出模 6 的剩余类环 $\mathbf{Z}_6$ 的所有理想。

18. F 是所有复数 $a+b\mathrm{i}$（a,b 为整数）所成的环，证明商环 $F/(1+\mathrm{i})$ 是域。

19. $\mathbf{N}$ 为自然数集，令 $A_n=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，$\mathscr{T}=\{\varnothing,A_1,A_2,\cdots\}$。证明 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbf{N}$ 的拓扑，并写出 1 的所有开邻域。

20. 证明实数集 $\mathbf{R}$ 上有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以集簇 $\{(a,+\infty) \mid a\in\mathbf{R}\}$ 为拓扑基（称为 $\mathbf{R}$ 的右手拓扑）。试写出 $\mathscr{T}$ 来，并求 $A\subseteq\mathbf{R}$ 的闭包（即 $\mathbf{R}$ 中包含 A 的最小闭集）。

21. 在实数集合 $\mathbf{R}$ 上令 $\mathscr{B}=\{[a,b) \mid a,b,\in\mathbf{R}, a<b\}$，证明 $\mathscr{B}$ 构成 $\mathbf{R}$ 上一个拓扑的基（称为下限拓扑）。在这个拓扑中，$\mathscr{B}$ 的每个成员都是既开又闭的集合。

22. 设 X 为拓扑空间，$\mathbf{R}$ 为实数空间（按通常拓扑）。$f:X\to\mathbf{R}$ 为连续映射。证明

(1) $\{x\in X \mid f(x)>0\}$ 是 X 的开集。

(2) $\{x\in X \mid f(x)=0\}$ 及 $\{x\in X \mid f(x)\geqslant 0\}$ 都是 X 的闭集。

23. 证明实数空间 $\mathbf{R}$ 的任一开区间 (a,b) 同胚于 $\mathbf{R}$。

24. 描述实数下限拓扑空间(参见习题 21)$(\mathbf{R},\mathscr{T})$的积空间$(\mathbf{R},\mathscr{T})\times(\mathbf{R},\mathscr{T})$。

25. 下述拓扑空间哪些是连通的,哪些是不连通的?

(1) 实数下限拓扑(参见习题 21)。

(2) 实数右手拓扑(参见习题 20)。

(3) 习题 19 描述的拓扑空间。

26. 证明欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中所有至少有一个坐标为有理数的点构成的集合是 $\mathbf{R}^2$ 的连通子集。

27. 证明拓扑空间中任一有限子集都是紧致子集。

28. 证明 $\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$不是紧致的。

29. 证明 Hausdorff 空间中任意多个紧致子集之交仍是紧致子集。

参考文献

[1] 张禾瑞. 近世代数基础. 北京:高教出版社,1978

[2] Hangerford T W. 代数学. 冯克勤译. 湖南:湖南教育出版社,1984

[3] 熊金城. 点集拓扑讲义. 北京:人民教育出版社,1981

[4] Armstrong M A. 基础拓扑学. 孙以丰译. 北京:北京大学出版社,1983

[5] 吴品三. 近世代数. 北京:人民教育出版社,1979

[6] Jacobson N. Basic Algebra I. New York: Freeman, 1974

[7] Eisenberg M. Axiomatic Theory of sets and classes. New York: Rinehart and Winston, 1971

[8] Rotman J. The Theory of Groups. 2nd ed. Boston: Allyn and Bacon, 1973

[9] Blackett D W. Elementary Topology. New York: Academic Press, 1967

[10] Massey W S. Algebraic Topology: An Introduction. New York: Springer-Verlag, 1977

第二章 泛函分析

泛函分析是现代数学的一个重要分支，起源于经典分析、代数与几何，形成于 20 世纪 30 年代。经过半个多世纪的发展，已经成为应用广泛、生机勃勃的新兴学科。现在，泛函分析的概念和方法已经渗透到现代数学、理论物理以及工程技术理论的许多分支，如微分方程、概率论、计算数学、量子场论、统计物理学、现代控制理论和管理工程等。在现代科技文献中，也大量地使用了泛函分析的概念、记号和方法。因此，泛函分析不仅是数学工作者，也是广大工程技术人员必须掌握的数学工具。

本章介绍线性泛函分析和非线性泛函分析的一些基本内容和应用，包括距离空间、线性赋范空间和 Banach 空间、非线性算子、拓扑度理论等。

2.1 距离空间

距离空间是泛函分析中最基本的内容，在泛函分析中的地位和作用相当于欧氏空间在微积分中的地位和作用。因此，掌握距离空间的有关理论和结果非常重要。本节主要介绍距离空间的有关概念和性质、压缩映像原理等内容。

2.1.1 距离空间

定义 2.1.1 设 X 是由某些元素组成的非空集合，对于其中的任意两个元素 x,y，按照一定的法则对应于一个实数 $\rho(x,y)$，满足

(1) 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$ 且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$，

(2) 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

(3) 三点不等式：对于任何 $z\in X$，有 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$，

则称 $\rho(x,y)$ 为 x 与 y 的**距离**，称 X 为以 ρ 为距离的**距离空间**（或**度量空间**），记为 (X,ρ)，或者简单地记作 X。X 中的元素亦称为点。

设 X 是距离空间，M 为 X 的一个非空子集，它按照 X 中的距离 ρ 显然也是一个距离空间，称为 X 的**子空间**。

下面给出几个距离空间的例子。

例 2.1.1 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$（其中，$\mathbf{R}$ 为实数集，$\mathbf{C}$ 为复数集）。

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$\mathbf{C}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{C},\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

记 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，令

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}\mid x_i-y_i\mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.1}$$

显然，$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足定义 2.1.1 中的(1)和(2)。

由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \tag{2.1.2}$$

有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \tag{2.1.3}$$

其中，$a_i, b_i (1\leqslant i\leqslant n)$为实数。

取 $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，$a_i=|z_i-x_i|$，$b_i=|y_i-z_i|$，则 $a_i+b_i\geqslant|x_i-y_i|$，代入不等式(2.1.3)，则有三点不等式

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \rho(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \rho(\mathbf{y},\mathbf{z})$$

因此，$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 按距离(2.1.1)都是距离空间。我们称此距离 ρ 为欧氏距离，并称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维实欧氏空间，$\mathbf{C}^n$ 为 n 维复欧氏空间。

例 2.1.2　空间 $l^p(p\geqslant 1)$。

$l^p=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$，且$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^p<\infty\}$。记 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$，定义距离

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1.4}$$

显然，$\rho(x,y)$满足定义 2.1.1 中的条件(1)和(2)。应用 Minkowski 不等式(参看参考文献[5])得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1.5}$$

可知定义 2.1.1 中(3)也成立，从而 l^p 以式(2.1.4)定义的距离为距离空间。

例 2.1.3　空间 $C[a,b]$。

$C[a,b]$表示闭区间$[a,b]$上实值(或复值)连续函数全体。对于 $C[a,b]$中任意两个函数 $x(t)$，$y(t)$，定义它们的距离为

$$\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \tag{2.1.6}$$

则 $C[a,b]$成为距离空间。

例 2.1.4　空间 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$。

设 $x(t)$是$[a,b]$上的 Lebesgue 可测函数，$p\geqslant 1$。如果$|x(t)|^p$ 是$[a,b]$上的 Lebesgue 可积函数，则称 $x(t)$是$[a,b]$上的 p 方可积函数。$[a,b]$上 p 方可积函数的全体记为$L^p[a,b]$。当 $p=1$ 时，$L^1[a,b]$即为$[a,b]$上 Lebesgue 可积函数全体。在空间 $L^p[a,b]$中，我们把两个几乎处处(记为 a,e)相等的函数看作同一个元素而不加以区别。设 $x(t)$，$y(t)\in L^p[a,b]$，定义距离

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

显然，$\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 的充要条件是 $x=y$；$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；应用 Minkowski 积分不等式(参看参考文献[5])得

$$\left(\int_a^b|x(t)+y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b|y(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1.7}$$

可以验证定义 2.1.1 中的三点不等式成立，所以 $L^p[a,b]$是一个距离空间。

对于距离空间，应注意以下几点：

(1) 对于任何一个非空集合，我们总可以定义距离。但是一般来讲，应当根据该集合的特点适当地引进距离以充分反映这些特点(例如在 $C[a,b]$ 和 $L^p[a,b]$ 中定义的距离)。只有这样，在理论上或者实践上才有较大的意义。

(2) 定义距离的方式一般来讲不是惟一的。例如在例 2.1.1 中，对 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 还可以引入如下距离

$$\rho_1(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - y_k|$$

则 $\mathbf{R}^n$ 按距离 ρ_1 也是一个距离空间。

如果在一个非空集合 X 上定义了距离 ρ 与 ρ_1，当 $\rho(x,y)\neq\rho_1(x,y)$ 时，那么 X 按照距离 ρ 与按照距离 ρ_1 所成的距离空间必须看成两个不同的距离空间。

有了距离的概念，就可以定义点列的收敛概念。

定义 2.1.2　设 $\{x_n\}$ 为距离空间 X 中的一个点列，这里 $n=1,2,\cdots$ 为自然数。如果当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x_0)\to 0$，就称点列 $\{x_n\}$ **收敛于** x_0，记为

$$x_n \to x_0(n\to\infty)\ \text{或} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

这时称 $\{x_n\}$ 为收敛点列，x_0 称为 $\{x_n\}$ 的**极限**。

定理 2.1.1　在距离空间 X 中，任何一个点列 $\{x_n\}$ 最多只有一个极限，即收敛点列的极限是惟一的。

证　设 x,y 都是 $\{x_n\}$ 的极限，由定义 2.1.1 有

$$0\leqslant \rho(x,y)\leqslant \rho(x_n,x)+\rho(x_n,y)$$

当 $n\to\infty$ 时，$\rho(x_n,x)\to 0$，$\rho(x_n,y)\to 0$，必然有 $\rho(x,y)=0$，因此 $x=y$。证毕。

2.1.2　距离空间中的点集

类似于欧氏空间的情形，在一般的距离空间中也可以引进邻域、开集、闭集等一系列基本概念。

定义 2.1.3　设 X 为一距离空间，$x_0\in X$，$r>0$，称 X 中的点集 $\{x|\rho(x,x_0)<r\}$ 为以 x_0 为中心，以 r 为半径的**开球**；称 $\{x|\rho(x,x_0)\leqslant r\}$ 为以 x_0 为中心，以 r 半径的**闭球**；称 $\{x|\rho(x,x_0)=r\}$ 为以 x_0 为中心，以 r 为半径的球的**球面**。它们分别记作 $B(x_0,r)$，$\overline{B}(x_0,r)$ 和 $S(x_0,r)$。开球 $B(x_0,r)$ 也称为 x_0 的 **r-邻域**。

有了邻域的概念，就可以引进开集、闭包和闭集等概念。

定义 2.1.4　设 X 是一个距离空间，$A\subset X$。对于 $x\in A$，如果存在 x 的一个邻域 $B(x,r)\subset A$，则称 x 为 A 的**内点**。如果 A 的所有点都是它的内点，则称 A 为**开集**。

若 A 是包含点 x 的开集，我们也称 A 为 x 的一个**邻域**。

由定义 2.1.4 立即知道，X 的任何开集一定是某些开球(可能是无穷多个)的并，而任何一个开球本身也是开集。

关于距离空间中的开集，容易证明有如下性质：

定理 2.1.2　设 X 为距离空间，则

(1) 空间 X 与空集 $\varnothing$ 都是开集；

(2) X 中任意多个开集的并是开集；

(3) X 中有限个开集的交是开集。

定义 2.1.5　设 X 为距离空间，$A\subset X$。对于 $x_0\in X$，如果 x_0 的每个邻域内都含有 A 中无限个点，则称 x_0 是 A 的**聚点**（或**极限点**）；若 $x_0\in A$，但不是 A 的聚点，则称 x_0 为 A 的**孤立点**。

例 2.1.5　设 X 是一维欧氏空间 $\mathbf{R}^1$。$A=\{1,1/2,\cdots,1/n,\cdots\}$，则对于每个 $n(n=1,2,\cdots)$，$1/n$ 都是 A 的孤立点，0 是 A 的聚点，但它不属于 A。若 A 是区间 $(0,1]$，则闭区间 $[0,1]$ 中的一切点都是 A 的聚点，其中 0 不属于 A，A 没有孤立点，$(0,1)$ 中的一切点都是 A 的内点。

定义 2.1.6　设 A 为距离空间 X 中的点集，A 的极限点的全体所成的集称为 A 的**导集**，记作 A'。称 $\overline{A}=A\cup A'$ 是 A 的**闭包**。如果 $A'\subset A$，就称 A 为**闭集**。

关于点集的导集和闭包，有下面的性质：

定理 2.1.3　任意点集 A 的导集 A' 和闭包 $\overline{A}$ 都是闭集。

关于距离空间中的闭集，有如下一些性质：

定理 2.1.4　距离空间 X 中的点集 A 为闭集的充要条件是：A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中的一点。

定理 2.1.5　距离空间 X 中的点集 A 为闭集的充要条件是：它的余集 $A^c=X-A$ 为开集。

定理 2.1.6　距离空间 X 中的点集 A 为闭集的充要条件是 $A=\overline{A}$。

定理 2.1.7　设 X 为距离空间，则

(1) 空间 X 及空集 $\varnothing$ 是闭集；

(2) X 中任意个闭集的交是闭集；

(3) X 中有限个闭集的并是闭集。

以上有关结果的证明，请读者自己完成。

下面给出点集间的距离、有界集和稠密集的概念。

定义 2.1.7　设 A 和 B 是距离空间 X 中的两个点集，称 $\inf\limits_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$ 是 A 与 B 的距离，记作 $\rho(A,B)$。特别当 A 中只有一点 x_0 时，称 $\{x_0\}$ 与 B 的距离是点 x_0 与 B 间的距离，记为 $\rho(x_0,B)=\inf\limits_{y\in B}\rho(x_0,y)$。

定义 2.1.8　设 A 是距离空间 X 中的点集，如果 A 包含在 X 中的某个开球 $B(x_0,r)$ 中，则称 A 为 X 中的**有界集**。

定义 2.1.9　设 A,B 均为距离空间 X 的子集，如果 $\overline{B}\supset A$，则称 B 在 A 中**稠密**。特别地，如果 $\overline{B}=X$，则称 B 是 X 中的**稠密子集**。

例 2.1.6　有理数集 $\mathbf{Q}$ 在无理数集中稠密，$\mathbf{Q}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的稠密子集。$\mathbf{R}^n$ 中具有有理坐标的向量的全体 $\mathbf{Q}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的稠密子集。

值得注意的是，在稠密集的定义中，并不要求 $B\subset A$，甚至 B 与 A 可以没有公共点。

应用稠密集的概念可以定义空间的可分性。

定义 2.1.10　距离空间 X 叫做**可分的**，是指 X 中存在一个稠密的可数子集。$A\subset X$ 称为**可分的**，是指存在 X 中的可数子集 B，使 B 在 A 中稠密，即 $\overline{B}\supset A$。

例 2.1.7　欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 是可分的，因为坐标为有理数的点组成的集是可数的，而且在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密。

例 2.1.8　空间 $l^p(p\geqslant 1)$ 是可分的。设 E_0 是形如 $(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)$ 的所有元素集合，其中 $r_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是任意有理数，n 是任意自然数。显然，E_0 是 l^p 中的可数子集。下面证 E_0 在 l^p 中稠密。

事实上，$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l^p$，以及 $\varepsilon>0$，存在自然数 n，使

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}$$

再选 $x_0=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\in E_0$，使

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k-r_k|^p<\varepsilon^p/2$$

由此得出

$$\rho(x,x_0)=\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k-r_k|^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

即 E_0 在 l^p 中稠密，从而 l^p 可分。

例 2.1.9　空间 $C[a,b]$ 与 $L^p[a,b]$ 都是可分的。因为有理系数多项式的集合 P_0 在 $C[a,b]$ 中稠密，而 P_0 为一可数集。当 $p\geqslant 1$ 时，$L^p[a,b]$ 中的有界连续函数集合在 $L^p[a,b]$ 中稠密。

2.1.3　连续映射

关于映射的有关概念，本书 1.1 节已有介绍。这里仅就距离空间中连续映射的有关概念和性质作一叙述。

定义 2.1.11　设 $X=(X,\rho)$，$Y=(Y,\rho)$ 是两个距离空间，f 是从 X 到 Y 中的映射，记为 $f:X\to Y$。设 $x_0\in X$。如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对 X 中一切满足 $\rho(x,x_0)<\delta$ 的 x，有

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$$

则称 f 在 x_0 **连续**。如果 f 在 X 中每一点都连续，则称 f 为 X 上的**连续映射**。

我们把由距离空间 X 到实(或复)数域的映射称为函数。

关于距离空间上的连续映射，有如下结果：

定理 2.1.8　由距离空间 X 到距离空间 Y 的映射 f 连续的充要条件是下列三个条件之一成立：

(1) 对于任一 $x\in X$，当 $\{x_n\}\subset X$，且收敛于 x 时，有 $f(x_n)$ 收敛于 $f(x)$；

(2) 对于 Y 中的任一开集 G，它的原像 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集；

(3) 对于 Y 中的任一闭集 F，F 的原像 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集。

证　仅就(1)进行证明。

必要性：由于 f 在 X 上连续，故对任一 $x\in X$ 以及任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $\rho(y,x)<\delta(y\in X)$ 时，$\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$。今设 $\{x_n\}\subset X(n=1,2,\cdots)$ 且 $\{x_n\}$ 收敛于 x，于是存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，$\rho(x_n,x)<\delta$，故 $\rho(f(x_n),f(x))<\varepsilon$，即 $f(x_n)\to f(x)(n\to\infty)$。

充分性：用反证法。设条件(1)成立，但 f 在 X 中某一点 x_0 不连续，则必存在某个正数 ε_0，使得对于每个 $1/n(n=1,2,\cdots)$，有 x_n 满足 $\rho(x_n,x_0)<1/n$，但 $\rho(f(x_n),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$，此与条件(1)矛盾。证毕。

定义 2.1.12　设 f 是距离空间 X 到距离空间 Y 的映射，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在只与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于 X 中的任意两个点 x_1,x_2，只要 $\rho(x_1,x_2)<\delta$，就有 $\rho(f(x_1),f(x_2))<\varepsilon$，则称 f

在 X 上一致连续。

例 2.1.10 $f(x)=x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是一致连续函数。因为 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，对于 $\mathbf{R}$ 中的任意两点 x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|<\varepsilon$。

例 2.1.11 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是一致连续的。因为若取 $\varepsilon=2$，$\forall\delta>0$，取 $x_1=\dfrac{2}{\delta}$，$x_2=\dfrac{2}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|x_1^2-x_2^2|>2$。

2.1.4 完备的距离空间

定义 2.1.13 设 $X=(X,\rho)$ 是距离空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列。如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，使当 $m,n>N$ 时，有 $\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 **Cauchy 列**，或称为**基本列**。如果 X 中的每一个 Cauchy 列都收敛于 X 中的点，就称空间 X 是**完备的**。

由定义立即可以得到如下性质：

(1) 任何距离空间中的收敛点列必是 Cauchy 列；

(2) 完备距离空间的任何闭子空间也是完备的。

证明一个距离空间 X 是完备的，其一般步骤是先任取 X 中的 Cauchy 列 $\{x_n\}$，找出它可能收敛的极限 x，再证明 $x\in X$ 和 $x_n\to x(n\to\infty)$。证明的过程要经常应用到实数集的完备性。

例 2.1.12 空间 $\mathbf{R}^n$ 是完备的，其中 $\mathbf{R}^n$ 中的距离 ρ 按(2.1.1)定义。

例 2.1.13 空间 $C[a,b]$ 是完备的。

证 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的 Cauchy 列，则 $\forall\varepsilon>0$，存在自然数 N，使得对于一切 $n,m\geqslant N$，有

$$\rho(x_n,x_m)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

因此，$\forall t\in[a,b]$，有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\qquad(m,n\geqslant N)\tag{2.1.8}$$

固定 $t\in[a,b]$，函数列 $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 列，所以存在 $x(t)$，使 $x_n(t)\to x(t)(n\to\infty)$。在(2.1.8)中令 $m\to\infty$，得到 $|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon(\forall n\geqslant N)$。由此可见，$\{x_n(t)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $x(t)$，所以 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 中连续，即 $x_n\to x$，$x\in C[a,b](n\to\infty)$，故 $C[a,b]$ 是完备的。

还可以证明空间 $\mathbf{C}^n$，$l^p(p\geqslant1)$，$L^p[a,b](p\geqslant1)$ 按照前面所定义的距离都是完备的距离空间。它们的证明由读者自己完成。

但是并非所有的距离空间都是完备的。

例 2.1.14 在 $C[-1,1]$ 上定义距离

$$\rho_1(x,y)=\left(\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\quad x,y\in C[-1,1]$$

则 $C[-1,1]$ 按照距离 ρ_1 是不完备的距离空间。

应用积分形式的 Minkowski 不等式

$$\left(\int_{-1}^{1}|x(t)+y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_{-1}^{1}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{-1}^{1}|y(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\quad\forall x,y\in C[-1,1]$$

可以证明 $C[-1,1]$ 是距离空间。下面说明它是不完备的。令

$$x_m(t)=\begin{cases}0, & -1\leqslant t\leqslant 0\\ mt, & 0<t<\dfrac{1}{m}\\ 1, & \dfrac{1}{m}\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

当 $m>n$ 时，$(\rho_1(x_m,x_n))^2=\int_{-1}^{1}|x_m(t)-x_n(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}$，故 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>\frac{1}{\varepsilon^2}$，只要 m，$n>N$，就有 $\rho_1(x_m,x_n)<\varepsilon$。因此 $\{x_m(t)\}$ 是 $C[-1,1]$ 中的 Cauchy 列，但是

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t)=\begin{cases}0, & -1\leqslant t\leqslant 0\\ 1, & 0<t\leqslant 1\end{cases}$$

即 $x(t)=\lim\limits_{m\to\infty}x_m(t)$ 在 $t=0$ 不连续，故 $\{x_m(t)\}$ 在 $C[-1,1]$ 中不收敛，所以 $C[-1,1]$ 按距离 ρ_1 是不完备的。

对于一般的距离空间，如果是不完备的，往往应用起来就比较困难。例如，在不完备的空间中，方程可能没有解。但是我们可以在任一不完备的距离空间中添加一些新的点，使其完备化。

定义 2.1.14　设 (X,ρ) 是距离空间，若有完备的距离空间 $(\widetilde{X},\rho_1)$，使 X 等距于 $\widetilde{X}$ 的稠密子集，即存在映射 $T:X\to\widetilde{X}$，使

$$\rho(x,y)=\rho_1(Tx,Ty)\qquad\forall x,y\in X$$

且 $T(X)$ 是 $\widetilde{X}$ 中稠密子集，则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的完备化。

定理 2.1.9　对于任一距离空间必存在完备化空间。

2.1.5　紧集与列紧集

定义 2.1.15　距离空间 X 中的集合 A 称为**列紧的**，是指 A 中任一点列都含有收敛子列。闭的列紧集称为**自列紧集**。如果 X 本身是列紧的，则称 X 为**列紧距离空间**，或称**列紧空间**。

由定义 2.1.15 有

(1) 列紧集的无穷子集是列紧集；

(2) 列紧空间是完备的。

定义 2.1.16　设 A,B 是距离空间 X 中的点集，$\varepsilon>0$ 是给定的数。如果 $\forall x\in A$，必有 $x'\in B$，使 $\rho(x,x')<\varepsilon$，则称 B 是 A 的一个 **ε-网**。

例如，距离空间 X 中的一个稠密子集必为 X 的一个 ε-网，这里 ε 为任意正数。

根据 ε-网的定义，所谓 B 为 A 的 ε-网，实际上是指 A 中的任一 x 必含在 B 中某一点 x' 的邻域 $B(x',\varepsilon)$ 中，即以 B 中的点为中心，ε 为半径的全体开球的并包含 A。

定义 2.1.17　设 A 为距离空间 X 中的点集，如果 $\forall\varepsilon>0$，A 中总存在有限的 ε-网，则称 A 是**全有界的**。

从定义 2.1.17 可以看出，任何全有界集必为有界集。

定理 2.1.10　设距离空间 X 中的子集 A 是列紧的，则 A 必是全有界的。若 X 是完备的距离空间，则 A 是全有界集时，A 必定是列紧的。因此在完备的距离空间中，列紧性与全有界性等价。

证 先证前一结论成立。用反证法。若 A 不是全有界的，则存在某一 $\varepsilon_0>0$，使 A 没有有限 ε-网。故对 $\forall x_1\in A$，必有 $x_2\in A$，使 $\rho(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$，否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的有限 ε-网。同理，存在 $x_3\in A$，使 $\rho(x_i,x_3)\geqslant\varepsilon_0\ (i=1,2)$，否则 $\{x_1,x_2\}$ 即为 A 的有限 ε-网。如此进行下去，在 A 中有一点列 $\{x_n\}$，当 $m\neq n$ 时，$\rho(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon_0$，这时 $\{x_n\}$ 不可能有收敛子列，这与 A 是列紧集矛盾。

再证后一结论。设 X 是完备的，A 是 X 中全有界集，要证 A 是列紧的。任取 $\{x_n\}\subset A$。对于任意正整数 k，A 有有限 $\frac{1}{k}$-网，故 A 包含在有限个 $\frac{1}{k}$ 为半径的球中，由此知

$\{x_n\}$ 必有子序列 $\{x_{1_n}\}$，它包含在某个半径为 1 的球 B_1 中；

$\{x_{1_n}\}$ 必有子序列 $\{x_{2_n}\}$，它包含在某个半径为 $\frac{1}{2}$ 的球 B_2 中；

……

$\{x_{k_n}\}$ 必有子序列 $\{x_{(k+1)_n}\}$，它包含在某个半径为 $\frac{1}{k+1}$ 的球 B_{k+1} 中。

记序列 $\{x_{kn}\}=\{x_{k_1},x_{k_2},\cdots,\}$，$k=1,2,\cdots$。考察 $\{x_n\}$ 的子序列

$$\{x_{n_n}\}=\{x_{1_1},x_{2_2},\cdots,x_{k_k},\cdots,\}$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $N>\frac{2}{\varepsilon}$，知当 $n\geqslant N$ 时，有 $x_{n_n}\in\{x_{N_n}\}$，即 x_{n_n} 都包含于一个半径为 $\frac{1}{N}$ 的球 B_N 中，因此只要 $m,n>N$，就有

$$\rho(x_{m_m},x_{n_n})<\frac{2}{N}<\varepsilon$$

即 $\{x_{n_n}\}$ 为 Cauchy 列，再由 X 的完备性知，$\{x_{n_n}\}$ 收敛，从而 A 列紧。证毕。

定义 2.1.18 距离空间 X 中的集合 A 称为**紧**（或**紧致**）的，如果 A 的任何开覆盖都存在有限子覆盖。

在距离空间中，集合的紧性与自列紧性是等价的。特别地，有限维欧氏空间中紧集与有界闭集是等价的。

例 2.1.15 实轴 $\mathbf{R}$ 上的开区间 $(0,1)$ 不是紧集，因取

$$G_n=\left(\frac{1}{n+2},\frac{1}{n}\right)\quad n=1,2,\cdots$$

则 $\{G_n\}$ 是 $(0,1)$ 的一个开覆盖，但不能从中取出有限个开集覆盖 $(0,1)$。

最后给出函数族等度连续的定义和 Arzelá-Ascoli 定理。

用 $C(X)$ 表示距离空间 X 上全体连续函数的集合，它是完备的距离空间。其上的距离定义为

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\qquad\forall f,g\in C(X)$$

定义 2.1.19 设函数族 $\mathscr{F}\subset C(X)$，如果存在常数 $M>0$，使 $\forall f\in\mathscr{F}$ 和 $\forall x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数族 $\mathscr{F}$ 是**一致有界的**；如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall f\in\mathscr{F}$，$\forall x_1,x_2\in X$，只要 $\rho(x_1,x_2)<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，则称 $\mathscr{F}$ 是**等度连续的**。

例 2.1.16 设 L 和 α 是两个正数，$\mathscr{F}$ 是 $[a,b]$ 上适合 Hölder 连续性条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|^{\alpha}\qquad x_1,x_2\in[a,b]$$

的函数 f 所成的函数族时，$\mathscr{F}$ 是等度连续的。

定理 2.1.11(Arzelá - Ascoli 定理) X 是列紧空间，$\mathscr{F}\subset C(X)$是列紧的充要条件是 $\mathscr{F}$ 是一致有界并且等度连续的。

证明从略。

2.1.6 压缩映射原理

压缩映射原理又称 Banach 不动点定理，应用非常广泛，特别是在对代数方程、微分方程、积分方程和其他方程的解的存在定理的证明是一个有力工具。更多的不动点定理将在 2.5.3 中介绍。

定义 2.1.20 设映射 $T:X\to X$，如有 $x\in X$，使 $Tx=x$，则称 x 是映射 T 的**不动点**。

定义 2.1.21 设 $X=(X,\rho)$是一个距离空间，映射 $T:X\to X$。如果存在一个常数 $\alpha(0<\alpha<1)$，使对所有 $x,y\in X$，成立 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$，则称 T 是**压缩映射**。

由定义 2.1.21 可知，压缩映射 T 是连续映射。

定理 2.1.12(Banach 不动点定理) 设 X 是完备的距离空间，T 是 X 上的压缩映射，那么 T 有且只有一个不动点。

证 $\forall x_0\in X$，令

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \cdots, x_n = Tx_{n-1} = T^nx_0, \cdots \tag{2.1.9}$$

则

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(Tx_n,Tx_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_n,x_{n-1}) \leqslant \alpha^2\rho(x_{n-1},x_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n\rho(x_1,x_0)$$

当 $m>n$ 时，由三点不等式得

$$\begin{aligned}\rho(x_m,x_n) &\leqslant \rho(x_m,x_{m-1}) + \rho(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1},x_n) \leqslant \\ &(\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\cdots+\alpha^n)\rho(x_1,x_0) \leqslant \\ &\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

因 $0<\alpha<1$，令 $n\to\infty$，上式右端趋于 0，故$\{x_n\}$是 Cauchy 列。再由 X 的完备性，则 $x_n\to x\in X(n\to\infty)$。由于 T 为连续映射，故在 $Tx_n=x_{n+1}$ 中，令 $n\to\infty$，有 $Tx=x$，即 x 为 T 的不动点。

下面证明惟一性。若另有 $y\in X$，使 $Ty=y$，则 $\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$，因 $0<\alpha<1$，故必有 $\rho(x,y)=0$，即 $x=y$。证毕。

上述定理中所用的方法称为迭代法或逐次逼近法，是现代分析数学中最常用的方法之一。由压缩映射 T 构成的迭代序列$\{x_{n+1}=Tx_n\}$必然收敛，从直观上来看是很显然的：初始点 x_0 在 T 的逐次作用下，在 X 内作越来越小的变动，以至逐渐收敛于不动点 x。

迭代法的主要优点之一是：它不仅给出了不动点存在的理论证明，而且还给出了逐次逼近不动点的具体方法；对于适当选择的 T，所给方法可用于实际近似计算。在式(2.1.10)中令 $m\to\infty$，就得到误差估计公式

$$\rho(x_n,x) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)$$

上式表明，α 越小，x_n 收敛于 x 的速度越高。对于 $\varepsilon>0$，为了达到预定精度 $\rho(x_n,x)\leqslant\varepsilon$，可从不等式$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0)\leqslant\varepsilon$ 来确定所需的迭代次数 n。

下面举一个压缩映射原理在微分方程上应用的例子。

例 2.1.17 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\ y\mid_{x_0}=y_0 \tag{2.1.11}$$

其中，$f(x,y)$在整个(x,y)平面上连续，且$f(x,y)$关于y满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y)-f(x,y')|\leqslant k\,|y-y'|$$

则通过(x_0,y_0)微分方程(2.1.11)等价于求解如下积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

取$\delta>0$，使$k\delta<1$，用$C[x_0-\delta,x_0+\delta]$表示$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上连续函数组成的空间。在这个空间上定义映射$T:C[x_0-\delta,x_0+\delta]\to C[x_0-\delta,x_0+\delta]$，$Ty(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$，则

$$\rho(Ty_1,Ty_2)=\max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}[(f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))]\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\left|\int_{x_0}^{x}k\,|y_1(t)-y_2(t)|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$k\delta\max_{|t-t_0|\leqslant\delta}\left|y_1(t)-y_2(t)\right|=k\delta\rho(y_1,y_2)$$

因$k\delta<1$，由定理 2.1.12 知，存在惟一连续函数$y(x)$，使$Ty=y$，即

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))\mathrm{d}t$$

由此式知，$y(x)$还是连续可微的。于是$y=y(x)$便是微分方程(2.1.11)通过(x_0,y_0)的积分曲线，但只定义在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上，重复应用定理 2.1.12，可以将它延拓到整个数轴上。

2.2 赋范线性空间及 Banach 空间

泛函分析的研究对象是数学和实际问题中提炼出来的大量线性和非线性问题。在研究这些问题时，除了需要收敛的概念外，还在空间中常常要求有所谓元素的加法和数乘的代数运算，因此仅有距离空间的概念是不够的。这样，引进线性空间的概念并在线性空间中引入适当的收敛概念十分必要，因而就产生了所谓赋范线性空间的概念。在本节中，主要介绍赋范线性空间的理论，特别是 Banach 空间的理论，以及定义在这些空间上的线性算子的理论。

2.2.1 赋范线性空间

定义 2.2.1 设X是实(或复)的线性空间，如果对于X中的每个x，对应于一个实数$\|x\|$，且满足

(1) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$，

(2) $\|\alpha x\|=\|\alpha\|\ \|x\|$，这里$\alpha$是实(或复)数，

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，$x,y\in X$，

则称$\|x\|$为向量x的范数，称$\{X,\|\cdot\|\}$(或X)按范数$\|x\|$成为**赋范线性空间**。

对于赋范线性空间X，如果由

$$\rho(x,y) = \| x - y \| \tag{2.2.1}$$

定义 X 中元素 x 与 y 之间的距离，容易证明，这样定义的距离满足定义 2.1.1 中距离的全部条件。因此，赋范线性空间 X 按照距离(2.2.1)是一个距离空间，从而赋范线性空间 X 中的有界性、收敛性、Cauchy 列、完备性等概念是把它看成距离空间来理解的。

设$\{x_n\}$是赋范线性空间 X 中的点列，如果存在 $x\in X$，使 $\| x_n - x \| \to 0(n\to\infty)$，则称$\{x_n\}$**依范数收敛**于 x，记为 $x_n\to x(n\to\infty)$或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

由范数的定义可得如下性质：

(1) 若$\{x_n\}$是 X 中收敛于 $x\in X$ 的点列，则$\{\| x_n \|\}$是有界数列；

(2) 范数 $\| x \|$ 是 $x\in X$ 的连续函数。

既然赋范线性空间 X 按照距离(2.2.1)成为距离空间，则有两种可能：一种空间 X 是完备的，另一种空间 X 是不完备的。我们把完备的赋范线性空间称为 **Banach 空间**。

例 2.2.1 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$。它是一个线性空间，$\forall\, \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义范数

$$\| \boldsymbol{x} \| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.2}$$

则 $\mathbf{R}^n$ 为一赋范线性空间。由范数导出的距离就是例 2.1.1 中的距离。由例 2.1.12 知，$\mathbf{R}^n$ 为完备的赋范线性空间，从而为 Banach 空间。

例 2.2.2 连续函数空间 $C[a,b]$。$\forall\, x(t),y(t)\in C[a,b]$以及数 a，定义加法和数乘为

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t) \qquad (ax)(t) = ax(t) \tag{2.2.3}$$

则知 $C[a,b]$是一个线性空间。在 $C[a,b]$中定义范数为

$$\| x \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) |, \quad x(t) \in C[a,b] \tag{2.2.4}$$

则 $C[a,b]$是一个赋范线性空间。由范数(2.2.4)导出的距离就是例 2.1.3 中的距离，因为 $C[a,b]$中点列在$[a,b]$上按范数收敛是一致收敛，故 $C[a,b]$是 Banach 空间。

例 2.2.3 空间 $l^p(p\geqslant 1)$。$\forall\, x,y\in l^p$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$，以及数 a，定义加法和数乘如下

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n, \cdots)$$
$$ax = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n, \cdots)$$

则 l^p 为线性空间。在 l^p 上定义范数为

$$\| x \| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2.5}$$

则 l^p 为一赋范线性空间，并且是 Banach 空间。

例 2.2.4 空间 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$。在 $L^p[a,b]$中几乎处处相等的元素视为同一元素，加法、乘法的定义与例 2.2.2 相同，于是 $L^p[a,b]$为一线性空间。在 $L^p[a,b]$上定义范数为

$$\| x \| = \left(\int_a^b | x(t) |^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \qquad x(t) \in L^p[a,b] \tag{2.2.6}$$

则 $L^p[a,b]$为一赋范线性空间，并且可以证明 $p\geqslant 1$ 时，按照式(2.2.6)定义的范数，它是 Banach空间。

应当注意，不完备的赋范线性空间是存在的。类似于距离空间，对于任何赋范线性空间，都有 Banach 空间是它的完备化空间。

下面给出赋范线性空间子空间的有关概念。

定义 2.2.2 设$(X, \|\cdot\|)$是赋范线性空间，$M\subset X$。若 M 是 X 的线性子空间，则$(M, \|\cdot\|)$也是赋范线性空间，称$(M, \|\cdot\|)$是赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$的**子空间**；若赋范线性空间 X 的子空间 M 是闭集，则称 M 是 X 的**闭子空间**。

例 2.2.5 空间 l^2 的子空间。

$M=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x\in l^2$，且 x 中只有有限个分量不等于零$\}$。

易知 M 是 l^2 的子空间，但不是闭子空间。因若取序列

$$x_n = \left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^n},0,0,\cdots\right)\in M \qquad n=1,2,\cdots$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n+1}},\cdots\right)\notin M$，故 M 不是闭集。

定理 2.2.1 若 M 是赋范线性空间 X 的子空间，则闭包 $\overline{M}$ 是 X 的闭子空间。

证 $\overline{M}$ 是闭集，因此只需证明 $\overline{M}$ 是 X 的子空间。

$\forall x,y\in\overline{M}$，由闭包的定义知，$\forall \varepsilon>0$，存在 $x',y'\in M$，使 $\|x-x'\|<\varepsilon$，$\|y-y'\|<\varepsilon$。由于 M 是 X 的子空间，对于任意两个数 α,β，有 $\alpha x'+\beta y'\in M$。又

$$\|(\alpha x+\beta y)-(\alpha x'+\beta y')\| \leqslant |\alpha|\ \|x-x'\|+|\beta|\ \|y-y'\| < (|\alpha|+|\beta|)\varepsilon$$

可知上式右端可以任意小，因此 $\alpha x+\beta y$ 的任意小邻域内都含有 M 中的点，从而 $\alpha x+\beta y$ 为 M 的聚点。这意味着 $\alpha x+\beta y\in\overline{M}$，即 $\overline{M}$ 是 X 的子空间。证毕。

2.2.2 有界线性算子和连续线性泛函

定义 2.2.3 设 X,Y 是两个同为实(或复)的赋范线性空间，D 是 X 的线性子空间，T 是 D 到 Y 中的映射，如果$\forall x,y\in D$ 及数 α,β 成立

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$$

则称 T 是**线性算子**，称 D 为 T 的**定义域**，记为 $D(T)$，$R(T)=\{Tx\mid x\in D\}$称为 T 的**值域**。

取值为实数(或复数)的线性算子 T 称为实(或复)的**线性泛函**，这时一般把 T 记为 f。

例 2.2.6 设 X 是一个赋范线性空间，α 是一个给定的数，$\forall x\in X$，令 $Tx=\alpha x$，则 T 是 X 到 X 中的线性算子，记为 αI，称为**相似算子**。特别当 $\alpha=1$ 时，称为**恒等算子**，记为 I；当 $\alpha=0$ 时，称为**零算子**，记为 0。

例 2.2.7 对于每个 $x\in C[a,b]$，定义

$$Tx(t)=\int_a^t x(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad t\in[a,b]$$

由积分的线性性质知，T 是 $C[a,b]\to C[a,b]$中的线性算子($Tx(t)$是$[a,b]$上的连续函数)。若令 $f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$，则 f 是 $C[a,b]$上的线性泛函。

定义 2.2.4 设 X,Y 是两个赋范线性空间，T 是 X 的线性子空间 $D(T)\to Y$ 中的线性算子，如果存在常数 $M>0$，使对所有 $x\in D(T)$，有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \tag{2.2.7}$$

则称 T 是 $T(D)\to Y$ 中的**有界线性算子**。当 $D(T)=X$ 时，称 T 是 $X\to Y$ 中的**有界线性算子**，对于不满足条件(2.2.7)的算子称为**无界算子**。

若 T 是有界线性算子，记

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\, x\in D(T),x\neq 0\right\}=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{2.2.8}$$

称 $\|T\|$ 为算子 T 的范数。

由范数的定义，可得出如下结论

(1) 对于一切 $x\in D(T)$，有

$$\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\| \tag{2.2.9}$$

(2)
$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in D(T)}} \|Tx\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(T)}} \|Tx\| \tag{2.2.10}$$

式(2.2.9)可由式(2.2.8)直接得到。至于式(2.2.10)，$\forall x\in D(T), x\neq 0$，则有 $y=\dfrac{x}{\|x\|}$ 满足 $\|y\|=1$，$\|Ty\|=\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$。由 T 的范数的定义知 $\|T\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(T)}} \|Tx\|$。

又 $\forall x\in D(T)$，$0<\|x\|<1$，令 $y=\dfrac{x}{\|x\|}$，则 $\|y\|=1$，$\|Tx\|<\|Ty\|$；从而知 $\sup\limits_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x\in D(T)}} \|Tx\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D(T)}} \|Tx\| = \|T\|$。

例 2.2.8 赋范线性空间 X 上的相似算子 $Tx=\alpha x$ 是有界线性算子，且 $\|T\|=|\alpha|$。特别有 $\|I\|=1$，$\|\theta\|=0$。

例 2.2.9 设 $K(s,t)$ 是定义在 $0\leqslant t、s\leqslant 1$ 上的连续函数，则 $C[0,1]$ 上的积分算子

$$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ \forall x\in C[0,1]$$

的范数为 $\|T\| = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$。

事实上，令 $M=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$，由 $\|Tx\| = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |(Tx)(s)| \leqslant \|x\| \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$ 知，$\|T\|\leqslant M$。

另一方面，$\int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$ 是 $0\leqslant s\leqslant 1$ 上的连续函数，$\exists s_0\in[0,1]$，使 $\int_0^1 |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t = M$。令 $z_0(t)=\mathrm{sgn}K(s_0,t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则

$$\int_0^1 K(s_0,t)z_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t = M$$

由 Luzin 定理知，对任何 $\delta>0$，有 $[0,1]$ 上的连续函数 $y(t)$，使 $|y(t)|\leqslant 1$，且 $m(\{t\,|\,y(t)\neq z_0(t), t\in[0,1]\})<\delta$。

任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2c}$，这里 $c=\max\limits_{s,t\in[0,1]}|K(s,t)|$，令 $E=\{t\,|\,y(t)\neq z_0(t), t\in[0,1]\}$，则

$$\left|\int_0^1 K(s_0,t)[y(t)-z_0(t)]\mathrm{d}t\right| = \left|\int_E K(s_0,t)[y(t)-z_0(t)]\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

于是

$$\begin{aligned}|(Ty)(s_0)| &= \left|\int_0^1 K(s_0,t)y(t)\mathrm{d}t\right| \geqslant \\ &\left|\int_0^1 |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_0^1 K(s_0,t)[y(t)-z_0(t)]\mathrm{d}t\right| \geqslant M-\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $\|Ty\|\geqslant M-\varepsilon$。所以 $\|T\|\geqslant M-\varepsilon$，即故 $\|T\|\geqslant M$。但已证明 $\|T\|\leqslant M$，故 $\|T\|=M$。

例 2.2.10 微分算子 $Tx=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 是线性算子，但无界。

记 $C^1[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上全体连续可微函数集合，$C^1[0,1]$ 是 $C[0,1]$ 的子空间。取 $x_n(t)=$

t^n，则 $Tx_n=nt^{n-1}$。因此 $\|x_n\|=\max\limits_{t\in[0,1]}\{t^n\}=1$，$\|Tx_n\|=\max\limits_{[0,1]}nt^{n-1}=n$，由于 $n=1,2,\cdots$ 为无界序列，故微分算子 T 虽是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 上的线性算子，但不是有界的。

下面给出线性算子和线性泛函的有界性和连续性的有关结果。

定理 2.2.2 设 X,Y 是赋范线性空间。T 是定义在 X 的子空间 D 上，而值域含在 Y 中的线性算子，则 T 有界的充要条件是 T 将 D 中任一有界集映成 Y 中的有界集。

证 必要性：设 T 有界，即存在 $M>0$，$\forall x\in D$，有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$。设 $A\subset D$ 为一有界集，则存在 $K>0$，使对 $\forall x\in A$，有 $\|x\|\leqslant K$，故当 $x\in A$ 时，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\leqslant MK$，即 A 的像 TA 是 Y 中有界集。

充分性：在 D 内取单位球面 $S=\{x\mid \|x\|=1,x\in D\}$。由假定知，存在正数 M，使当 $x\in S$ 时，$\|Tx\|\leqslant M$。$\forall x\in D,x\neq 0$，则 $\dfrac{x}{\|x\|}\in S$，故 $\left\|T\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|\leqslant M$，即

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\| \tag{2.2.11}$$

当 $x=0$ 时，式(2.2.11)显然成立，因此 $\forall x\in D$，式(2.2.11)成立。证毕。

由定理 2.2.2 的证明可知，验证定义在 D 上的线性算子是否有界，只要看它是否能将 D 中以零点为中心的单位球面映成有界集就可以了。

定理 2.2.3 设 X,Y 是赋范线性空间，$T:X\to Y$ 线性算子，则 T 连续的充要条件是 T 有界。

证 充分性：设 T 有界，那么存在 $M>0$，$\forall x\in X$，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$。任取 $x_n\in X$，使 $x_n\to x(n\to\infty)$，则

$$\|Tx_n-Tx\|\leqslant\|T\|\,\|x_n-x\|\leqslant M\|x_n-x\|$$

所以 $\|Tx_n-Tx\|\to 0(n\to\infty)$，即 $Tx_n\to Tx(n\to\infty)$，即 T 在 X 上连续。

必要性：若 T 连续但无界，这时 X 中必有 $\{x_n\}$，$x_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，使 $\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|$。令 $y_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，则 $\|y_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，所以 $y_n\to 0$。由于 T 连续，$Ty_n\to T0=0(n\to\infty)$。

另一方面，$\|Ty_n\|=\left\|\dfrac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\|=\dfrac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|}\geqslant 1$，此与 $Ty_n\to 0(n\to\infty)$ 矛盾，故 T 有界。证毕。

由定理 2.2.3 知，对于线性算子而言，有界性与连续性是等价的。

对于线性泛函，我们还有下面的结果：

定理 2.2.4 设 X 是赋范线性空间，f 是 X 上的线性泛函，那么 f 是 X 上的连续泛函的充要条件为 f 的零空间 $N(f)$ 是 X 中的闭子空间。$N(f)=\{x\mid f(x)=0,x\in X\}$。

证 设 f 是连续线性泛函，当 $x_n\in N(f)$，$n=1,2,\cdots$，并且 $x_n\to x$ 时，由 f 的连续性知，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，所以 $x\in N(f)$，即 $N(f)$ 是闭集。

反之，若 $N(f)$ 是闭集，而 f 无界，则存在 $\{x_n\}\subset X$，$\|x_n\|\neq 0$，$n=1,2,\cdots$ 使得 $|f(x_n)|\geqslant n\|x_n\|$。

令 $y_n=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$，则 $\|y_n\|=1$，且 $|f(y_n)|\geqslant n$，作 $z_n=\dfrac{y_n}{f(y_n)}-\dfrac{y_1}{f(y_1)}$，则 $f(z_n)=0$，所以 $z_n\in N(f)$，但由于 $\|y_n/f(y_n)\|=\dfrac{1}{|f(y_n)|}\leqslant\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，所以 $z_n\to\dfrac{-y_1}{f(y_1)}$，而

$f\left(\frac{-y_1}{f(y_1)}\right)=-1$，即$\frac{-y_1}{f(y_1)}\notin N(f)$，这与 $N(f)$ 为闭集的条件矛盾，因此 f 是有界线性泛函。证毕。

2.2.3　线性算子空间和共轭空间

设 X 和 Y 是赋范线性空间，记 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 为全体 $X\to Y$ 的有界线性算子的集合。称 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 为有界线性算子空间。

在 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中定义加法和数乘如下：

$$(A+B)x = Ax + Bx \qquad A,B\in\mathscr{B}(X\to Y),\ x\in X$$

$$(\alpha A)x = \alpha Ax \qquad A\in\mathscr{B}(X\to Y),\ \alpha \text{ 为数}$$

则 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是一个线性空间。

定理 2.2.5　$\mathscr{B}(X\to Y)$ 是一个赋范线性空间。

证　要证 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 为赋范线性空间，只须验证有界线性算子 A 的范数 $\|A\|$ 满足范数的三个条件即可。$\forall A,B\in\mathscr{B}(X\to Y)$，有

(1) $\|A\|\geqslant 0$ 显然。若 $A=0$，则 $\|A\|=0$，反之，若 $\|A\|=0$，则 $\forall x\in X, Ax=0$，故 $A=0$；

(2) $\|\alpha A\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Ax\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|\alpha|\,\|Ax\| = |\alpha|\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\alpha|\,\|A\|$；

(3) $\|A+B\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|(A+B)x\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax+Bx\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1}(\|Ax\|+\|Bx\|)$ $\leqslant \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\| + \sup\limits_{\|x\|=1}\|Bx\| = \|A\|+\|B\|$。

由上可知，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 是赋范线性空间。证毕。

一般说来，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 作为赋范线性空间，不一定是完备的，但若 Y 完备，则有下面的结果。

定理 2.2.6　当 Y 是 Banach 空间时，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 也是 Banach 空间。

证　已知 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是赋范线性空间，下面证明它是完备的，即对 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中的任一 Cauchy 序列 $\{T_n\}$，要证明它在 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 中收敛。

(1) 先求 T_n 可能收敛的极限 T。由于 $\{T_n\}$ 是 Cauchy 列，故 $\forall\varepsilon>0$，则存在 N，使当 $m, n>N$ 时，$\|T_n-T_m\|<\varepsilon$。于是 $\forall x\in X$，当 $n,m>N$ 时，有

$$\|T_nx - T_mx\| = \|(T_n-T_m)x\| \leqslant \|T_n-T_m\|\,\|x\| < \varepsilon\|x\| \qquad (2.2.12)$$

所以当 x 固定时，点列 $\{T_nx\}$ 是 Y 中 Cauchy 序列，由 Y 的完备性，存在 $y\in Y$，使 $T_nx\to y(n\to\infty)$。作 X 到 Y 中的算子 T 为：$\forall x\in X$，令 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$，由此给出的算子 $T:X\to Y$ 显然是线性算子。

(2) 证明 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$。在式(2.2.12)中令 $m\to\infty$，由范数的连续性，$\forall x\in X$，有

$$\|(T_n-T)x\| \leqslant \varepsilon\|x\| \qquad (n>N) \qquad (2.2.13)$$

由式(2.2.13)知 $(T_n-T)\in\mathscr{B}(X\to Y)$，而 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 是线性空间，故 $T=T_n-(T_n-T)\in\mathscr{B}(X\to Y)$。

(3) 证明 $T_n\to T$。由式(2.2.13)得

$$\|T_n-T\| = \sup_{\|x\|=1}\|(T_n-T)x\| \leqslant \varepsilon$$

即 $\{T_n\}$ 依范数收敛于 T，所以，$\mathscr{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间。证毕。

设 $A\in\mathscr{B}(Z\to Y)$，$B\in\mathscr{B}(X\to Z)$，令 $(AB)x=A(Bx)$，$x\in X$，显然 AB 是线性算子，称为

B与A的乘积。又对每个$x\in X$，因为$\|(AB)x\|=\|A(Bx)\|\leqslant\|A\|\|Bx\|\leqslant\|A\|\|B\|\|x\|$，所以$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|<\infty$，即$AB\in\mathscr{B}(X\to Y)$。

定义 2.2.5 设X是赋范线性空间，X上的线性连续泛函的全体记为X^*，它按照通常的线性运算及泛函的范数作范数，也构成一个赋范线性空间，称为X的**共轭空间**(或**对偶空间**)。

由于实数全体(或者复数全体)按照绝对值作范数时，构成完备的赋范线性空间，所以由定理 2.2.6，可得如下重要结论：

定理 2.2.7 任何赋范线性空间X的共轭空间X^*是 Banach 空间。

在逻辑上，X^*是一个完全确定的 Banach 空间，它的元素就是X上的有界线性泛函，似乎不存在求出X^*的问题。但若X^*缺乏某种直观形象，就难以有效地思考和运用，实际上我们会把它当成一种未知的东西。这就提出了一个问题：如何把X^*具体地表示出来？为此，我们引入两个线性空间同构的概念。

定义 2.2.6 设X,Y是两个赋范线性空间，T是X到Y中的线性算子，并且对所有$x\in X$，有$\|Tx\|=\|x\|$，则称T是X到Y中的**保范算子**。如果T又是映上的，则称T是**同构映射**，此时称X与Y**同构**。

显然保范算子是一一的，而同构映射是等距映射。由于同构映射保持线性运算及范数不变，所以撇开X与Y中点的具体内容，可以将赋范线性空间X与Y看成同一抽象空间而不加区别，在这个意义上，可以认为$X=Y$。因此，对于看起来很抽象的空间X^*来说，通过等距同构，就可得到X^*的一种具体表示。

例 2.2.11 空间$l^p(1<p<\infty)$的共轭空间是l^q，即$(l^p)^*=l^q$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

例 2.2.12 空间$L^p[a,b](1<p<\infty)$的共轭空间是$L^q[a,b]$，即$(L^p[a,b])^*=L^q[a,b]$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

对于$L^2[a,b],l^2,\mathbf{R}^n$来说，它们的共轭空间就是它们自己，即满足关系$(L^2[a,b])^*=L^2[a,b],(l^2)^*=l^2,(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$，我们称它们是自共轭空间。

关于例 2.2.11 和例 2.2.12 的证明，读者可参阅参考文献[6]。

2.2.4 泛函分析中的基本定理

本小节将介绍泛函分析中的一些基本定理，其中包括著名的 Hahn - Banach 延拓定理、共鸣定理、逆算子定理和闭图像定理等。这些定理充分显示了泛函分析的强大作用及其应用的广泛性。

我们首先介绍 Hahn - Banach 延拓定理。它告诉我们，如果X是赋范线性空间，G是它的真子空间，则G上的有界线性泛函f都可以延拓到全空间X上并保持范数不变。这是泛函分析中最基本的一个定理，定理本身及其推论在理论上有重要应用。

定理 2.2.8(Hahn - Banach 延拓定理) 设X是赋范线性空间，G是X的子空间，f是定义在G上的任一有界线性泛函，则f可以延拓到整个X上且保持范数不变，即存在定义在X上的有界线性泛函F满足

(1) 对$x\in G,F(x)=f(x)$；

(2) $\|F\|=\|f\|_G$，这里$\|f\|_G$表示f作为G上有界线性泛函的范数。

定理 2.2.8 的证明较长，限于篇幅，这里从略（参看参考文献[5]）。

下面介绍 Hahn-Banach 定理的几个推论，它们与定理本身一样，在理论上和应用上被经常引用。

推论 1　设 X 是赋范线性空间，$\forall x_0 \in X$，只要 $x_0 \neq 0$，必存在定义在 X 上的有界线性泛函 f，满足 $\|f\|=1, f(x_0)=\|x_0\|$。①

证　令 $G=\{\alpha x_0\}$，其中 α 取遍复数域或实数域。在 G 上定义线性泛函 f 为

$$f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

则当 $x=\alpha x_0$ 时，$|f(x)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$，故 $\|f\|_G=1$，特别还有 $f(x_0)=\|x_0\|$。由 Hahn-Banach 定理，f 可以延拓到整个 X 上且延拓后泛函的范数与 $\|f\|_G$ 相等。将延拓后的泛函仍记为 f，则推论 1 的结论成立。证毕。

推论 2　设 G 为赋范线性空间 X 的子空间，若 $x_0 \in X$，且 $\rho(x_0, G) = \inf\limits_{x\in G} \|x_0 - x\| = \delta > 0$，则必存在 X 上的有界线性泛函 f，使 $\|f\| = \dfrac{1}{\delta}, f(x_0)=1$，且 $\forall x \in G$ 有 $f(x)=0$。

证　令 $G_1=\{\alpha x_0 + x \mid x\in G, \alpha \text{ 为数}\}$，则 G_1 是 X 的子空间。再令 $f(\alpha x_0 + x)=\alpha$，那么 f 是 G_1 上惟一确定的有界线性泛函，满足 $f(x_0)=1, f(x)=0(\forall x\in G)$。

下面证明 $\|f\| = \dfrac{1}{\delta}$。由于 $\|\alpha x_0 + x\| = |\alpha| \left\| x_0 + \dfrac{x}{\alpha} \right\| \geqslant |\alpha|\delta$，即 $|\alpha| \leqslant \dfrac{1}{\delta}\|\alpha x_0 + x\|$，故 $|f(\alpha x_0 + x)| = |\alpha| \leqslant \dfrac{1}{\delta}\|\alpha x_0 + x\|$，因此，$\|f\|_{G_1} \leqslant \dfrac{1}{\delta}$。

另一方面，取 $x_n \in G(n=1,2,\cdots)$，使 $\|x_0 - x_n\| \to \delta(n\to\infty)$，于是 $\|f\|_{G_1}\|x_0 - x_n\| \geqslant |f(x_0 - x_n)| = |f(x_0)| = 1$，故 $\|f\|_{G_1} \geqslant \dfrac{1}{\|x_0 - x_n\|}$。令 $n\to\infty$，有 $\|f\|_{G_1} \geqslant \dfrac{1}{\delta}$。所以 $\|f\|_{G_1} = \dfrac{1}{\delta}$。

再由 Hahn-Banach 定理知，f 可以延拓到整个 X 上，且延拓后的泛函的范数与 $\|f\|_{G_1}$ 相等。将延拓后的泛函仍记为 f，则推论 2 结论成立。证毕。

在推论 2 中，若令 $f_1 = \delta f$，则 $\|f_1\| = 1, f_1(x_0)=\delta$，于是推论 2 可以改写成下面的推论 3。

推论 3　设 G 是赋范线性空间 X 的子空间，若 $x_0 \in X$，且 $\rho(x_0, X) = \inf\limits_{x\in G} \|x_0 - x\| = \delta > 0$，则存在 X 上的有界线性泛函 f_1，使 $\|f_1\| = 1, f_1(x_0)=\delta, f_1(x)=0(\forall x\in G)$。

定义 2.2.7　设 X 为一距离空间，$A\subset X$，则

(1) 若 $\overline{A}$ 的内部是空集，即 $(\overline{A})^0=\varnothing$，则称 A 为**疏朗集**；

(2) 若 A 能表成至多可数个疏朗集的并集，则称 A 为**第一纲集**，非第一纲集称为**第二纲集**。

例 2.2.13　在 $\mathbf{R}^1$ 上，有理点集是第一纲集，更一般地，可数点集总是第一纲集。

定理 2.2.9(Baire 纲定理)　完备的距离空间必是第二纲集。

定理 2.2.9 的证明可参看参考文献[6]。

定义 2.2.8　设 X, Y 为赋范线性空间，$T_n \in \mathscr{B}(X\to Y)(n=1,2,\cdots)$，则

---

① 由本推论可以看出，如果对于 X 上的一切有界线性泛函 f，有 $f(x_0)=0$，则 $x_0=0$。

(1) 如果$\forall x\in X$，序列$\{T_nx\}$有界，即有数C_x（C_x是仅与x有关的一个常数），使得对于任意正整数n，$\|T_nx\|\leqslant C_x$，则称$\{T_n\}$在X上**逐点有界**；

(2) 如果存在常数C，使得对于任意正整数n，$\|T_n\|\leqslant C$，则称$\{T_n\}$在X上**一致有界**。

因为$\|T_nx\|\leqslant\|T_n\|\|x\|$，所以如果$\{T_n\}$在$X$上一致有界，则$\{T_n\}$必逐点有界。

定义 2.2.9 设$T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$，如果$\forall x\in X$，$\{T_nx\}$都收敛，则称$\{T_n\}$在$X$上是**逐点收敛的**。

接着介绍的共鸣定理，又称为一致有界性原理。它是 Banach 空间理论中最重要的定理之一，是由 Banach 和 Steinhaus 在 1927 年给出的，因此也称为 Banach - Steinhaus 定理。许多古典的分析问题，经过抽象后，都可以归纳为这一原理，显示了泛函分析的重要作用。

定理 2.2.10（共鸣定理，Banach - Steinhaus 定理） 设X是 Banach 空间，Y是赋范线性空间，$T_n\in\mathscr{B}(X\to Y)$。若$T_n$在$X$上逐点有界，则$\{T_n\}$一致有界。

证 设$A_k=\{x\mid x\in X,\|T_nx\|\leqslant k,n=1,2,\cdots\}$，$k=1,2,\cdots$，则$A_k$为闭集。事实上，若在$A_k$中有一个序列$\{x_j\}$收敛于$x$，则对每个$n$和$j$，都有$\|T_nx_j\|\leqslant k$。令$j\to\infty$，由范数的连续性知，$\|T_nx\|\leqslant k$，$n=1,2,\cdots$，故$x\in A_k$，即$A_k$为闭集。

由于$\forall x\in X$，T_n逐点有界，故有$\|T_nx\|\leqslant C_x$。因此，对每个$x\in X$，存在正整数k，使$x\in A_k$，因而$X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$。由于$X$是完备的，根据 Baire 纲定理，必有某个$A_{k_0}$包含着一个开球$B(x_0,r)$，$r>0$，使得$\forall x\in B(x_0,r)$，必有$\|T_nx\|\leqslant k_0$，$n=1,2,\cdots$。现在要估计$\|T_n\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T_nx\|$，只需估计$\{\|T_nx\|\}$当$x$属于单位球时的上界。由于$\forall x\in B(0,1)$，有$rx+x_0\in B(x_0,r)$，因而$\|T(rx+x_0)\|\leqslant k_0$。于是对任意$x\in B(0,1)$，有

$$\|T_nx\|=\frac{1}{r}\|T_nrx\|=\frac{1}{r}\|T_n(rx+x_0-x_0)\|\leqslant$$
$$\frac{1}{r}(\|T_n(x_0+rx)\|+\|T_nx_0\|)\leqslant\frac{2}{r}k$$

上式对一切自然数n都成立，取$C=\frac{2}{r}k_0$，则$\|T_n\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant1}\|T_nx\|\leqslant C$，$n=1,2,\cdots$。证毕。

推论 设X是 Banach 空间，T_n和T是X上的有界线性算子，A是X上的稠密子集，则T_n在X上逐点收敛于T的充要条件是T_n一致有界并且在A上逐点收敛于T。

证 必要性可直接由共鸣定理推出，下面证明充分性。

由于$\overline{A}=X$，$\forall x\in X$，有$\{x_j\}\subset A$，使$x_j\to x$。由题设条件知，存在$C>0$，使$\|T_n\|\leqslant C$。若$M=\max\{\|T\|,C\}$，由$x_j\to x$，$\forall\varepsilon>0$，存在j_0，当$j>j_0$时，$\|x_j-x\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$。再由$T_nx_j\to Tx_j$，存在自然数$N_1$，当$n>N_1$时，$\|T_nx_j-Tx_j\|<\frac{\varepsilon}{3}$。取$N=\max\{j_0,N_1\}$，则当$n>N$时，有

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\|T_nx-T_nx_j\|+\|T_nx_j-Tx_j\|+\|Tx_j-Tx\|\leqslant$$
$$\|T_n\|\|x-x_j\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|T\|\|x_j-x\|\leqslant\varepsilon$$

故$T_nx\to Tx(n\to\infty)$。证毕。

作为共鸣定理的特例，有下述定理：

定理 2.2.11 设$\{f_n\}$是 Banach 空间X上的一列泛函，如果$\{f_n(x)\}$在X的每点x处有

界，那么$\{f_n\}$一致有界。

这只需在定理2.2.10中用实数域$\mathbf{R}$或复数域$\mathbf{C}$代替Y即可。

下面我们介绍Banach空间中的另外一些基本定理，如逆算子定理、开映射定理和闭图像定理等。

设X,Y都是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$。记$R(T)=\{y\in Y:存在\ x\in X,使\ y=Tx\}$，称$R(T)$为$T$的值域，如果$R(T)=Y$，则称$T$为满射。如果$\forall y\in R(T)$，只有惟一的$x\in X$，使$y=Tx$，则称$T$为单射，这时可以定义从$R(T)$到$X$中的算子

$$T^{-1}y=x \qquad 当\ y=Tx\ 时,$$

T^{-1}称为T的**逆算子**。显然T^{-1}是线性算子，但其定义域却不一定是全空间Y。

如果T既是单射又是满射，则称T是X到Y上的一一对应。这时T^{-1}是从Y到X上的一个线性算子。于是，我们自然要问，T^{-1}是不是有界的？有例子表明，即使X是完备的，T^{-1}也不一定是有界的。但是如果Y是完备的，情况就不同了，这就是下面的Banach逆算子定理。

定理2.2.12(逆算子定理)　设X,Y都是Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$。若T是一一对应的算子，则$T^{-1}\in\mathscr{B}(Y\to X)$。

为了证明这个定理，我们先介绍重要的开映射定理。

定义2.2.10　设X,Y是两个距离空间，T是X到Y中的映射，若T将X中的开集映为Y中的开集，则称T是**开映射**。

定理2.2.13(开映射定理)　设X,Y都是Banach空间，若$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$是一个满射，则T是开映射。

定理2.2.13的证明比较长，我们仅叙述一下证明的大致思路。证明分为三步。对于$\forall r>0$，令$B(0,r)=\{x\mid \|x\|<r\}$。首先证明0是$\overline{TB(0,r)}$的内点，其次证明$\overline{TB\left(0,\frac{r}{2}\right)}\subset TB(0,r)$，最后证明，对于$X$中的任一开集$G$，$T(G)$是$Y$中的开集。

定理2.2.12的证明：由于T是X到Y上的一一对应算子，所以$T^{-1}:Y\to X$存在，且为线性算子。由开映射定理，对于X中任一开集G，$T(G)$为开集。因为$T^{-1}(TG)=G$，由定理2.1.8知，T^{-1}是连续的，因而是有界的。证毕。

定义2.2.11　设X,Y是两个赋范线性空间，称$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$为空间$X$与$Y$的**乘积**。如果在$X\times Y$上定义范数

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad (x,y)\in X\times Y$$

易知$X\times Y$是赋范线性空间，称它为**乘积赋范线性空间**。

可以证明，若X和Y都是Banach空间，则$X\times Y$也是Banach空间。

定义2.2.12　设X,Y都是赋范线性空间，$T:D(T)(\subset X)\to Y$是线性算子，称$X\times Y$中的集合$G(T)=\{(x,y)\mid x\in D(T),\ y=Tx\}$为算子$T$的**图像**。如果$G(T)$是$X\times Y$中的闭集，则称$T$是**闭算子**。

例2.2.14　微分算子$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，$Tx(t)=x'(t)$。已知该算子$T:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$不是有界线性算子。下面证明它是闭算子。

任给$(x_n,Tx_n)\in G(T)$，即$x_n\in C^{(1)}[0,1]$，$Tx_n\in C[0,1]$，而$x_n\to x$，$Tx_n\to y$，要证$(x,y)\in$

$G(T)$。

由于 $Tx_n(t)=x'_n(t)\to y(t)$，故 $\|x'_n-y\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'_n(t)-y(t)|\to 0$，即在$[0,1]$上，$x'_n(t)$一致收敛于 $y(t)$，于是 $y(t)$连续。现在证明 $x(t)\in C^{(1)}[a,b]$且 $y=Tx$。

由于 $\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^t x'_n(\tau)\mathrm{d}\tau=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n(t)-x_n(0))=x(t)-x(0)$，即 $x(t)=x(0)+\int_0^t y(\tau)\mathrm{d}\tau$。则 $x(t)\in C^{(1)}[0,1]$，$x'(t)=y(t)$，即 $y=Tx$。因此$(x,y)\in G(T)$，$G(T)$为闭集，即微分算子是闭算子。

定理 2.2.14(闭图像定理) 设 X,Y 都是 Banach 空间，$T:D(T)\subset X\to Y$ 是闭线性算子。若 $D(T)$是闭的，则 T 有界。

证 因 T 是闭线性算子，故 $G(T)$是 Banach 空间 $X\times Y$ 中的闭集，$G(T)$也是 $X\times Y$ 的线性子空间，因此 $G(T)$和 $D(T)$都可以看作是 Banach 空间。定义算子 $P:G(T)\to D(T)$为

$$P(x,Tx)=x\qquad (x,Tx)\in G(T)$$

显然 P 是线性算子，且因 $\|P(x,y)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|$，知 P 是有界算子。又若$(x,Tx)\neq(y,Ty)$，必有 $x\neq y$，故 $P(x,Tx)\neq P(y,Ty)$，因而 P 是一对一的，P 显然是到 $D(T)$上的映射，由逆算子定理，P^{-1}存在，即 $\|P^{-1}x\|\leqslant\|P^{-1}\|\,\|x\|$。而 $\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|=\|P^{-1}x\|$，所以 $\|Tx\|\leqslant\|P^{-1}\|\,\|x\|$，即 T 是有界线性算子。证毕。

定理 2.2.14 是泛函分析中一个比较重要的定理，它将判断算子是否有界转化为判断算子是否是闭算子，这在不少情况下是比较容易的。

2.2.5 共轭算子

设 X,Y 是两个赋范线性空间，X^*,Y^* 分别是 X 和 Y 的共轭空间。对于 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$g\in Y^*$，定义 $f(x)=g(Tx)$，$x\in X$，则 f 是 X 上的一个有界线性泛函。显然对于每个$g\in Y$，对应惟一的 $f\in X^*$，用 T^* 表示这个对应关系，即 $T^*g=f$，则 T^* 就是 Y^* 到 X^* 中的算子。称 T^* 为 T 的**共轭算子**(或**伴随算子**)。

由 T^* 的定义可知，$\forall x\in X$ 以及任一 $g\in Y^*$，有

$$(T^*g)(x)=g(Tx)\tag{2.2.14}$$

下面给出共轭算子的一些基本性质。

定理 2.2.15 有界线性算子 T 的共轭算子 T^* 也是有界线性算子，且 $\|T^*\|=\|T\|$。

证 T^* 的线性是显然的。现在证明 T^* 的有界性。由式 2.2.14 知，$\forall x\in X$，$\forall g\in Y^*$，有 $|(T^*g)(x)|=|g(Tx)|\leqslant\|g\|\,\|T\|\,\|x\|$，于是 $\|T^*g\|\leqslant\|g\|\,\|T\|$，所以 T^* 有界且 $\|T^*\|\leqslant\|T\|$。

另一方面，$\forall x\in X$，$Tx\in Y$，由 Hahn - Banach 延拓定理的推论 1，存在 $g_0\in Y^*$，使 $\|g_0\|=1$，且 $g_0(Tx)=\|Tx\|$。故 $\|Tx\|=|g_0(Tx)|=|(T^*g_0)(x)|\leqslant\|T^*g_0\|\,\|x\|\leqslant\|T^*\|\,\|g_0\|\,\|x\|=\|T^*\|\,\|x\|$，由 $x\in X$ 的任意性得，$\|T\|\leqslant\|T^*\|$，于是 $\|T^*\|=\|T\|$。证毕。

定理 2.2.16 设 $T,S\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$A\in\mathscr{B}(Y\to Z)$，$\alpha,\beta$ 是数，则

(1) $(\alpha T+\beta S)^*=\alpha T^*+\beta S^*$；

(2) $(AT)^* = T^* A^*$；

(3) 若 T 有界可逆，则 T^* 也有界可逆，且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。

证 (1)，(2)的证明比较简单，这里只证(3)。由于 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y \to X)$，所以 $(T^{-1})^* \in \mathscr{B}(X^* \to Y^*)$。$\forall f \in X^*$，$(T^{-1})^* f \in Y^*$，$\forall x \in X$，有 $[T^*(T^{-1})^* f](x) = [(T^{-1})^* f](Tx) = f(T^{-1}Tx) = f(x)$。所以 $\forall f \in X^*$，$T^*(T^{-1})^* f = f$，即 $T^*(T^{-1})^* = I_{X^*}$。这里 I_{X^*} 是 X^* 上的恒等算子。

另一方面，$\forall g \in Y^*$，$y \in Y$，有 $((T^{-1})^* T^* g)(y) = [T^* g](T^{-1}y) = g(TT^{-1}y) = g(y)$，所以 $\forall g \in Y^*$，$(T^{-1})^* T^* g = g$。即 $(T^{-1})^* T^* = I_{Y^*}$。这里 I_{Y^*} 是 Y^* 上的恒等算子。所以 $(T^*)^{-1}$ 存在，且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。证毕。

2.2.6 全连续算子

本段我们介绍一类重要的算子——全连续算子，它在积分方程论和数学物理中具有广泛的应用。

定义 2.2.13 设 X, Y 是赋范线性空间，$T: X \to Y$ 为线性算子，如果 T 将 X 中任一有界集映成 Y 中的列紧集，则称 T 为**全连续线性算子(或紧线性算子)**。

由定义可以看出，T 是全连续线性算子的充要条件是：对于 X 中的任何有界点列 $\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$ 必有收敛子列。

在有限维赋范线性空间上，任何线性算子都是有界的，并把有界集映成有界集。又在有限维赋范线性空间中，任何有界集都是列紧集，因此，定义在其上的线性算子都是全连续线性算子。

在无穷维赋范线性空间 X 中，由于列紧集必为有界集，所以线性算子是有界的。但有界线性算子不一定是全连续的。例如，恒等算子 $I: X \to X$，$Ix = x$，$x \in X$，它是有界的，I 把单位球映成单位球，而无穷维赋范线性空间中的单位球不是列紧的，因此 I 不是全连续线性算子。

设 $T \in \mathscr{B}(X \to Y)$，如果 T 的值域 $R(T)$ 为有限维的，即 T 把 X 中每一有界集映成有限维空间 $R(T)$ 中的有界集，因而是列紧的，故 T 为全连续算子。值域为有限维的有界线性算子称为**有限秩算子**。有限秩线性算子是全连续算子。

例 2.2.15 设 $K(t,s)$ 在 $[a,b] \times [a,b]$ 上连续，则由 $(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$ 定义的算子 T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的全连续线性算子。

证 设 A 是 $C[a,b]$ 中任一有界集，则存在正数 M，使对一切 $x \in A$，有 $\|x\| \leqslant M$，于是

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| \leqslant \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$M\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,\mathrm{d}s$$

由于 $K(t,s)$ 在 $[a,b] \times [a,b]$ 上连续，从而 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对任意的 $t_1, t_2 \in [a,b]$，只要 $|t_1 - t_2| < \delta$，就有 $|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$，$s \in [a,b]$。因此，对一切 $x \in A$，有 $|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| < \varepsilon$，即 TA 是等度连续的。又由例 2.2.9 知，算子 T 有界，因此 TA 有界。由 Arzela - Ascoli 定理(定理 2.1.11)知，TA 是列紧集，所以 T 是全连续线性算子。

下面给出全连续线性算子的一些性质。

设X,Y均为赋范线性空间，以$C(X\to Y)$表示从X到Y的全连续线性算子的集合。

定理 2.2.17 全连续线性算子的线性组合仍为全连续线性算子。因此，$C(X\to Y)$是$\mathscr{B}(X\to Y)$的子空间。

定理 2.2.17 的证明由读者自己完成。

定理 2.2.18 若Y是 Banach 空间，$\{T_n\}\subset C(X\to Y)$，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则$T\in C(X\to Y)$。

证 设A为X中任一有界集。由假设知，对于每个n，T_nA是Y中的列紧集。由于$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，故对任给$\varepsilon>0$，存在$n_0$，使$\|T_{n_0}x-Tx\|<\frac{\varepsilon}{2}$对一切$x\in A$成立，即$T_{n_0}A$是$TA$的列紧$\frac{1}{2}\varepsilon$-网。由于$T_{n_0}A$列紧，则$T_{n_0}A$是全有界的。设$G$是$T_{n_0}A$的有限$\frac{1}{2}\varepsilon$-网，即对于$\forall x\in A, y\in G$，有$\|T_{n_0}x-y\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$。从而$\|Tx-y\|\leqslant\|Tx-T_{n_0}x\|+\|T_{n_0}x-y\|\leqslant\varepsilon$，即$G$是$TA$的有限$\varepsilon$-网，故$TA$是全有界的。注意到$Y$为 Banach 空间，由定理 2.1.10 知，TA是列紧的。由于A的任意性，则$T\in C(X\to Y)$。证毕。

由以上两个定理可知，若X为赋范线性空间，Y为 Banach 空间，$C(X\to Y)$也是 Banach 空间。

定理 2.2.19 全连续线性算子与有界线性算子的复合是全连续线性算子，即若$T\in C(X\to Y)$，$A\in\mathscr{B}(Y\to Z)$，$B\in\mathscr{B}(Z\to X)$，则$AT\in C(X\to Z)$，$TB\in C(Z\to Y)$。

这个定理的证明由读者自己完成。

推论 设赋范线性空间X,Y中有一个是无穷维的，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$全连续，则T不可能存在有界的逆算子。

证 只证X是无穷维的情形。若T有有界的逆算子T^{-1}，由定理 2.2.19 知，$I=T^{-1}T$全连续，于是X中任一有界集是列紧的，故X是有限维的，矛盾。证毕。

关于全连续线性算子，还有如下结果。

定理 2.2.20 设X,Y都是赋范线性空间，$T\in C(X\to Y)$，则$T^*\in C(Y^*\to X^*)$。

2.2.7 有界线性算子的谱理论

线性算子的谱理论是泛函分析中极为重要的内容。它起源于代数方程、积分方程和微分方程的特征值问题，建立在更加广泛的研究基础之上，对数学、物理以及工程中的各类理论和应用问题的研究起着十分重要的作用。在本小节中，将对算子谱的最基本的概念和性质作一简单介绍。

定义 2.2.14 设X为复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X\to X)\triangleq\mathscr{B}(X)$，$\lambda$为一复数。

(1) 如果$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，称$\lambda$为算子$T$的**正则点**，正则点的全体称为$T$的**正则集**，记为$\rho(T)$，$R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$称为$T$的**预解式**。

(2) 如果λ不是T的正则点，称λ为T的**谱点**，谱点的全体称为T的**谱**，记为$\sigma(T)$。

(3) 对于$\lambda\in\sigma(T)$，若$(\lambda I-T)x=0$有非零解，则称λ为T的**特征值**，相应的非零解x称为T的关于特征值λ的**特征向量**。$N(\lambda I-T)$称为T关于特征值λ的**特征向量空间**。T的特征值的全体记为$\sigma_p(T)$，称为T的**点谱**。

(4) $(\lambda I-T)^{-1}$存在，$R(\lambda I-T)\neq X$，但$\overline{R(\lambda I-T)}=X$，这部分 λ 称为 T 的**连续谱**，记为 $\sigma_c(T)$。

(5) $(\lambda I-T)^{-1}$存在，且$\overline{R(\lambda I-T)}\neq X$，这部分 λ 称为 T 的**剩余谱**，记为 $\sigma_r(T)$。

由定义知，复平面 $\mathbf{C}=\rho(T)\cup\sigma(T)$，并且 $\rho(T)\cap\sigma(T)=\varnothing$，$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$，$\sigma_r(T)$互不相交，并且 $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$。

例子表明，当 X 为无穷维时，定义中各类型的谱都可能出现，限于篇幅，这里不再介绍。

为了讨论有界线性算子谱的性质，先介绍一个基本定理。

定理 2.2.21　设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，$\|T\|<1$，则

(1) $(I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$；　(2.2.15)

(2) $(I-T)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}T^k$　(规定 $T^0=I$)；　(2.2.16)

(3) $\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{1-\|T\|}$。　(2.2.17)

应用压缩映射原理容易证明该定理，请读者自己完成。

定理 2.2.22　设 X 为复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 $\rho(T)$为开集，$\sigma(T)$为闭集。

证　若 $\rho(T)=\varnothing$，则定理成立。设 $\rho(T)\neq\varnothing$。对 $\lambda_0\in\rho(T)$，$\lambda\in\mathbf{C}$，有

$$\lambda I-T=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)=$$
$$(\lambda_0 I-T)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}]$$

当$|\lambda-\lambda_0|<\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}$时，$\|(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}\|<1$。由定理 2.2.21 知，$[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，从而$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X)$，即 $\lambda\in\rho(T)$，因此 $\rho(T)$为开集。注意到 $\sigma(T)=\mathbf{C}\backslash\rho(T)$，故 $\sigma(T)$为闭集。

为了证明谱点的存在性定理，需要下面的一个简单结论。

定理 2.2.23　预解式 $R_\lambda(T)$在 $\rho(T)$内是算子值解析函数。

定理 2.2.24 (Gelfand - Mazur)　设 X 是复的 Banach 空间，$X\neq\{0\}$，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 $\sigma(T)\neq\varnothing$。

证　反证法。倘若 $\rho(T)=\mathbf{C}$，那么 $R_\lambda(T)$在 $\mathbf{C}$ 上解析，并且由式(2.2.16)知，当$|\lambda|>\|T\|$时，有

$$R_\lambda(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{n+1}}T^n \tag{2.2.18}$$

以及

$$\|R_x(T)\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|} \tag{2.2.19}$$

$\forall f\in\mathscr{B}(X)^*$，则 $f(R_\lambda(T))$在全平面上解析，且

$$\|f(R_\lambda(T))\|\leqslant\|f\|\,\|R_\lambda(T)\|\leqslant\frac{\|f\|}{|\lambda|-\|T\|}$$

令 $\lambda\to\infty$，有 $f(R_\lambda(T))\to 0$。由复变函数的 Liouville 定理知，对任一复数 λ，$f(R_\lambda(T))=0$。

因 X 为非 0 空间，$\mathscr{B}(X)$为非 0 的 Banach 空间，从 $\sigma(T)=\varnothing$知，$0\in\rho(T)$，从而 $T^{-1}\in\mathscr{B}(X)$。由 Hahn - Banach 定理推论 1，存在 $f\in\mathscr{B}(X)^*$，使 $f(T^{-1})=\|T^{-1}\|\neq 0$。这与任意复数 λ，$f(R_\lambda(T))=0$ 矛盾。故 $\sigma(T)$非空。

定义 2.2.15　设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，称数 $r_\sigma(T)=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$为 T 的谱半径。

由式(2.2.18)和式(2.2.19)知,$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$,下面给出谱半径的准确表达式。

定理 2.2.25(Gelfand) 设 X 为复 Banach 空间,$T\in\mathscr{B}(X)$,那么 $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}$。

定理 2.2.25 的证明较长,这里略去。

例 2.2.16 考虑算子 $T:l^2\to l^2$,$T(x_1,x_2,\cdots)=(x_2,x_3,\cdots)$,$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$。容易算出 $\|T\|=1$,所以 $\sigma(T)\subset\{\lambda:|\lambda|\leqslant1\}$。

对于任意的 $\lambda\in\mathbf{C}$,$|\lambda|<1$,若令 $x_0=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots)$,则 $Tx_0=(\lambda,\lambda^2,\cdots)\in l^2$,从而 $Tx_0=\lambda x_0$ 或 $(\lambda I-T)x_0=0$,由于 $x_0\neq0$,所以 $\lambda\in\sigma_p(T)$。于是 $\{\lambda:|\lambda|<1\}\subset\sigma_p(T)\subset\sigma(T)\subset\{\lambda:|\lambda|\leqslant1\}$。$\sigma(T)$ 是闭集,$\sigma(T)=\{\lambda:|\lambda|\leqslant1\}$。

关于全连续算子的谱,有如下结果:

定理 2.2.26 设 X 是复 Banach 空间,$T\in C(X)$,则

(1) T 的非零谱点都是特征值;

(2) $\sigma(T)$是可数集,0 是 $\sigma(T)$惟一可能的聚点;

(3) 如果 X 是无穷维的,则 $0\in\sigma(T)$;

(4) 对应于每个非零特征值 λ,$N(\lambda I-T)$是有限维的。

由这个定理可知,对于全连续算子 T 来说,任一非 0 数值 λ,要么 $\lambda\in\rho(T)$,要么 $\lambda\in\sigma_p(T)$,此外不存在其他谱点。这通常被称为全连续算子的择一定理。相应于算子方程$(\lambda I-T)x=y$ 来讲,这相当于要么该方程对任何 $y\in X$ 有惟一解,要么相应的齐次方程$(\lambda I-T)x=0$ 有非零解。这和代数方程组的情况是一致的,和积分方程中很多情况也是吻合的。泛函分析将它们归结为很一般的全连续算子类,并给予彻底解决。

定理 2.2.27 设 X 为复 Banach 空间,$T\in C(X)$,$\lambda\neq0$,T^* 是 T 的共轭算子。

(1) 若 $y\in X$,则方程$(\lambda I-T)x=y$ 可解的充要条件是 $y\perp N(\lambda I-T^*)$,$N(\lambda I-T^*)$是 T^* 的相应于 λ 的特征向量空间;

(2) 若 $y^*\in X^*$,则方程$(\lambda I-T^*)x^*=y^*$ 可解的充要条件是 $y^*\perp N(\lambda I-T)$,$N(\lambda I-T)$是 T 的相应于 λ 的特征向量空间。

定理 2.2.28 设 X 为复 Banach 空间,$T\in\mathscr{B}(X)$,T^* 是 T 的共轭算子,则

(1) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$;

(2) 设 $\lambda,\mu\in\sigma(T)$,$\boldsymbol{x}$ 是 T 的相应于 λ 的特征向量,$\boldsymbol{x}^*$ 是 T^* 的相应于 μ 的特征向量,$\lambda\neq\mu$,则 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{x}^*$,从而 $N(\lambda I-T)\perp N(\mu I-T^*)$;

(3) 若 $\lambda\in\sigma(T)$,$\lambda\neq0$,则 $\dim N(\lambda I-T)=\dim N(\mu I-T^*)$。

关于这些定理的证明和应用,请读者参阅参考文献[12]。

2.3 Hilbert 空间

在有限维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中,除去向量的长度外,还要讨论两个向量的夹角,特别是两个向量的正交性,为此需要引入"内积"的概念。在本节中,我们将把这一概念引入到无穷维空间中去,从而形成一类特殊的 Banach 空间——Hilbert 空间。

2.3.1 内积空间

定义 2.3.1 设 X 为复线性空间,如果对任意 $x,y\in X$,都有一复数(x,y)与之对应,并且

满足下列条件

(1) $(x,x)\geqslant 0$；$(x,x)=0$ 的充要条件是 $x=0, x\in X$，

(2) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z), x,y,z\in X, \alpha,\beta$ 为复数，

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}, x,y\in X$，

则称(x,y)为 x,y 的**内积**，X 为**内积空间**。

若 X 是实线性空间，则条件(3)可改为 $(x,y)=(y,x)$。由内积的定义可以得到下述等式

$$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z) \tag{2.3.1}$$

设 X 为内积空间，对于 $x\in X$，定义

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)} \tag{2.3.2}$$

则 $\|x\|$ 是一个范数，称为 X 上由内积定义的范数。

由内积的定义及式(2.3.1)，即知 $\|\cdot\|$ 满足范数定义的(1)和(2)，为了证明它也满足三角不等式 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$，需要证明下面的定理。

定理 2.3.1(Schwarz 不等式)　对内积空间 X 中任意的元素 x,y，成立

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\,\|y\| \tag{2.3.3}$$

证　对任何复数 α，有

$$0\leqslant(x+\alpha y,x+\alpha y)=\|x\|^2+\alpha(y,x)+\bar{\alpha}(x,y)+\alpha\bar{\alpha}\|y\|^2$$

当 $y=0$ 时，式(2.3.3)显然成立。设 $y\neq 0$，则$(y,y)>0$，取 $\alpha=-(x,y)/(y,y)$，整理后即得式(2.3.3)。证毕。

现在利用 Schwarz 不等式来验证三角不等式。$\forall x,y\in X$，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\\&\|x\|^2+2\mathrm{Re}(x,y)+\|y\|^2\leqslant\\&\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

即 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$。这表明$(X,\|\cdot\|)$是一个赋范线性空间，当 X 完备时，则称 X 为 **Hilbert 空间**。

在内积空间 X 中，内积是两个变元的连续函数，即当 $x_n\to x, y_n\to y$ 时，有$(x_n,y_n)\to(x,y)$。

定理 2.3.2　赋范线性空间 X 成为内积空间的充要条件是它的范数满足

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2 \tag{2.3.4}$$

其中，x,y 是 X 中任意两个元素，式(2.3.4)称为**中线公式**。

关于式(2.3.4)的证明，读者可参看参考文献[5]。

式(2.3.4)的几何意义是，平行四边形各边长度平方之和等于两对角线长度的平方之和。因此也把式(2.3.4)称为**平行四边形公式**。

除了线性代数中介绍过的有限维内积空间 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{C}^n$ 之外，下面举两个无穷维内积空间的重要例子。

例 2.3.1　空间 $L^2[a,b]$。对$[a,b]$中任意 x,y，定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\mathrm{d}t \tag{2.3.5}$$

容易验证 $L^2[a,b]$按式(2.3.5)中的内积成为内积空间。又由式(2.3.5)导出的范数为

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

由例 2.2.4 知,$L^2[a,b]$为 Hilbert 空间。

例 2.3.2 空间 l^2。对于 l^2 中任意 $x,y,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$,定义

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i \tag{2.3.6}$$

则 l^2 按式(2.3.6)定义的内积成为 Hilbert 空间。

2.3.2 投影定理与 Riesz 表现定理

定义 2.3.2 设 X 是内积空间,$x,y\in X$。如果$(x,y)=0$,则称 x 与 y **正交**,记为 $x\perp y$;设 $A,B\subset X$,如果 $\forall x\in A,y\in B$,有 $x\perp y$,则称 A 与 B 正交,记为 $A\perp B$;如果 x 与 B 中所有元素正交,则称 x 与 B 正交,记为 $x\perp B$;X 中一切与 A 正交的元素的集合称为 A 的**正交补**,记为 $A^{\perp}$。

当 x,y 正交时,$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$。这是勾股定理在内积空间的推广。

引理 2.3.1(变分引理) 设 X 是内积空间,M 是 X 中的一个非空闭凸集,那么 $\forall x\in X$,存在惟一的 $y\in M$,使 $\|y-x\| = \inf\limits_{u\in M}\|x-u\|$。

证 令 $d=\inf\limits_{u\in M}\|x-u\|$。由下确界的定义知,存在$\{x_n\}\subset M$,使$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=d$。由中线公式,有

$$2\left\|\frac{x_m-x_n}{2}\right\|^2 = \|x_m-x\|^2+\|x_n-x\|^2-2\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|^2 \tag{2.3.7}$$

因为 M 为凸集,$\frac{1}{2}(x_m+x_n)\in M$,所以$\left\|\frac{x_m+x_n}{2}-x\right\|\geqslant d$。由式(2.3.7)得

$$0\leqslant \|x_m-x_n\| \leqslant 2\|x_m-x\|^2+2\|x_n-x\|^2-4d^2$$

上式中令 $m,n\to\infty$,即知$\{x_n\}$是 M 中的 Cauchy 列。由于 M 是闭集,存在 $y\in M$,使 $x_n\to y$。显然 $\|y-x\|=d$。

如果 M 中还有 z,使得 $\|x-z\|=d$,由中线公式得

$$\begin{aligned}\|y-z\|^2 &= \|(y-x)-(z-x)\|^2 = \\ &2\|y-x\|^2+2\|z-x\|^2-\|(y-x)+(z-x)\|^2 = \\ &2d^2+2d^2-4\left\|\frac{1}{2}(y+z)-x\right\|^2\end{aligned}$$

由 M 的凸性得,$\frac{1}{2}(y+z)\in M$,所以$\left\|\frac{1}{2}(y+z)-x\right\|\geqslant d$,因此,$0\leqslant\|y-z\|^2\leqslant 0$,即 $\|y-z\|=0$,故 $y=z$,惟一性获证。证毕。

变分引理是内积空间的一个基本引理,在微分方程、现代控制论和逼近论中有重要应用。

定理 2.3.3(投影定理) 设 M 是 Hilbert 空间 X 的一个闭线性子空间,那么 $\forall x\in X$,存在着下列惟一的正交分解

$$x=y+z \qquad y\in M \qquad z\in M^{\perp}$$

证 由变分引理得,存在惟一的 $y\in M$,使 $\|x-y\|=\inf\limits_{u\in M}\|x-u\|$,现在证明 $x-y\perp M$。$\forall u\in M,u\neq 0$,对于任意数 α,$y+\alpha u\in M$,则

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\leqslant \|x-(y+\alpha u)\|^2 = \|(x-y)-\alpha u\|^2 = \\ &\|x-y\|^2-\bar{\alpha}(x-y,u)-\alpha(u,x-y)+|\alpha|^2\|u\|^2\end{aligned}$$

即 $$\bar{\alpha}(x-y,u)+\alpha(u,x-y)-|\alpha|^2\|u\|^2\leqslant 0$$

令 $\alpha=\frac{(x-y,u)}{\|u\|^2}$，代入上式得$|(x-y,u)|^2\leqslant 0$，因此$(x-y,u)=0$，即$x-y\perp u$，由于$u$是$M$中任一元素，所以$x-y\perp M$。令$z=x-y$，则$x=y+z,y\in M,z\in M^{\perp}$。证毕。

定理2.3.3中的y称为x在M上的正交投影。投影定理是Hilbert空间理论中的一个重要基本定理，反映了Hilbert空间的一个重要性质，在一般的Banach空间中，这个定理是不成立的。

推论 设M为Hilbert空间X中的闭线性子空间，$M\neq X$，则$M^{\perp}$中有非零元素。

证 由于$X\neq M$，取$x\in X-M$，x在M上投影记为y，则$x-y\perp M$。因$x\notin M,y\in M$，故$x-y\neq 0$。证毕。

现在应用上述结果来研究Hilbert空间上连续线性泛函的一般表示形式。

定理2.3.4(Riesz表现定理) 设X是Hilbert空间，f是X上的连续线性泛函，则必存在惟一的$y\in X$，使得$\forall x\in X$，有

$$f(x)=(x,y) \tag{2.3.8}$$

且$\|f\|=\|y\|$。

证 若$f=0$，取$y=0$，则结论成立。若$f\neq 0$，令$N(f)=\{x\mid f(x)=0,x\in X\}$，由于$f$为连续线性泛函，由定理2.2.4得，$N(f)$为$X$的闭线性子空间。因$f\neq 0$，则$N(f)\neq X$。由定理2.3.3的推论知，必有$x_0\neq 0,x_0\perp N(f)$。由于$x_0\notin N(f)$，所以$f(x_0)\neq 0$。不妨设$f(x_0)=1$。对于$\forall x\in X$，$f(x-f(x)x_0)=f(x)-f(x)f(x_0)=0$，于是$x-f(x)x_0\in N(f)$，故$(x-f(x)x_0,x_0)=0$，即$f(x)=\left(x,\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)$。令$y=\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$，则式(2.3.8)成立。又若另有$y'\in X$，使对任何$x\in X$，$f(x)=(x,y')$，则$(x,y-y')=0$，特别取$x=y-y'$，即知$y'=y$。惟一性成立。

最后证明$\|f\|=\|y\|$。由式(2.3.8)得，$|f(x)|\leqslant\|x\|\,\|y\|\ (\forall x\in X)$，所以$\|f\|\leqslant\|y\|$。另一方面，取$x=y$，由式(2.3.8)得，$\|y\|^2=|(y,y)|=|f(y)|\leqslant\|f\|\,\|y\|$，故$\|f\|\geqslant\|y\|$，于是$\|f\|=\|y\|$。证毕。

2.3.3 标准正交集与Fourier展式

定义2.3.3 设X为一个内积空间，$S=\{e_\alpha\mid\alpha\in A\}$是它的一个子集。若$\forall\alpha,\beta\in A,\alpha\neq\beta$时，$e_\alpha\perp e_\beta$，则称$S$为$X$的一个**正交集**。如果$\forall\alpha\in A$，还有$\|e_\alpha\|=1$，则称$S$为$X$的一个**标准正交集**。

例2.3.3 $L^2[0,2\pi]$内的函数族$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是$L^2[0,2\pi]$中的一个标准正交集。

例2.3.4 l^2中的元素列$\{e_n\}$

$$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n个},0\cdots)\qquad(n=1,2,\cdots)$$

是l^2中的一个标准正交集。

定义2.3.4 设X为内积空间，$S=\{e_\alpha\mid\alpha\in A\}$是$X$的一个标准正交集，$x\in X$，则称$\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in A\}$为$x$关于标准正交集$S$的**Fourier系数**。

若 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是一个标准正交集，$x=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ie_i$，则

$$c_i=(x,e_i)\qquad(1\leqslant i\leqslant n)\tag{2.3.9}$$

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\tag{2.3.10}$$

定理 2.3.5 设 S 是内积空间 X 中的一个标准正交集，$x\in X$，对于任一组 $e_1,e_2,\cdots,e_n\in S$，则有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\tag{2.3.11}$$

及

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|\tag{2.3.12}$$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为任意 n 个常数。

证 因对任意 n 个数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|^2=(x,x)-\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,x\right)-\left(x,\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right)=$$

$$\|x\|^2-2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i(x,e_i)+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2$$

令 $\alpha_i=(x,e_i),i=1,2,\cdots,n$，代入上式即得式(2.3.11)，由上式及式(2.3.11)，又可得到

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|^2-\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i-(x,e_i)|^2\geqslant0$$

由此即知式(2.3.12)成立。证毕。

由式(2.3.12)可以看出，若用 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 的线性组合逼近 x，则以取 $\alpha_i=(x,e_i),i=1,2,\cdots,n$ 时为最佳。

推论(Bessel 不等式) 设 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 是内积空间 X 中的标准正交集，那么 $\forall x\in X$，x 的 Fourier 系数 $\{(x,e_\alpha)|\alpha\in A\}$ 中最多只有可数个不为零，而且

$$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2\tag{2.3.13}$$

证 如果 A 为有限集，$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，由式(2.3.11)得

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2\tag{2.3.14}$$

如果 A 为可数集，$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$。由于对任何自然数 n，式(2.3.14)成立，令 $n\to\infty$，则

$$\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2\tag{2.3.15}$$

如果 A 是不可数集，由式(2.3.14)知，对任何自然数 n，S 中使 $|(x,e_\alpha)|\geqslant\dfrac{1}{n}$ 的 e_α 至多为有限个。记 $S_n=\left\{e_\alpha|\alpha\in A,|(x,e_\alpha)|\geqslant\dfrac{1}{n}\right\}$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 至多为可数集，而当 $e_\alpha\in S-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n$ 时，$(x,e_\alpha)=0$。记 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\widetilde{S}$，则由式(2.3.15)知 $\sum\limits_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2=\sum\limits_{e_\alpha\in\widetilde{S}}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$。证毕。

若式(2.3.13)中的等号成立，即

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\tag{2.3.16}$$

称式(2.3.16)为 x 关于$\{e_\alpha|\alpha\in A\}$的 **Parseval 公式**。

由于对 $x\in X$,即使 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$是不可数集,而其中使$(x,e_\alpha)\neq 0$ 的 e_α 至多为可数个,不妨记为 $e_i(i=1,2,\cdots)$。于是式(2.3.13)可写为

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leqslant\|x\|^2$$

从式(2.3.11)不难推出,对于 $x\in X$,Parseval 公式成立的充要条件是

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\|\to 0(n\to\infty)$$

这意味着此时 $x\in X$ 可以表成级数

$$x=(x,e_1)e_1+(x,e_2)e_2+\cdots+(x,e_n)e_n+\cdots \tag{2.3.17}$$

式(2.3.17)的右端称为 x 关于$\{e_n\}$的 Fourier 展式或 Fourier 级数。

在什么条件下 Parseval 公式成立,或者说 x 在什么时候可以表成关于标准正交集$\{e_n\}$的 Fourier 级数呢?下面解决这一问题。

定义 2.3.5　设 X 是内积空间,$S\subset X$。若 S 是线性无关集,且 $S^{\perp}=\{0\}$,则称 S 为 X 的**极大线性无关集**。

定义 2.3.6　Hilbert 空间 X 的一个极大线性无关集 S 称为 X 的基,若 S 又是 X 的极大标准正交集,则 S 称为 X 的**标准正交基**。

定理 2.3.6　设 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$是 Hilbert 空间 X 中的标准正交集,则以下条件互相等价

(1) S 是 X 的标准正交基;

(2) span S 在 X 中稠密(span S 表示由 S 张成的线性包);

(3) $\forall x\in X$,有 $\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$;

(4) $\forall x,y\in X$,有$(x,y)=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)}$。

证　(1)⇒(2)。若 span S 在 X 中不稠密,则$\overline{\text{span } S}\neq X$,由定理 2.3.3 的推论知,$(\text{span } S)^{\perp}$中有非零元素。这样 S 就不是 X 的极大线性无关集,从而也就不为 X 的标准正交基。

(2)⇒(3)。若(2)成立。任取 $x\in X$,$\forall\varepsilon>0$,由于 span S 在 X 中稠密,存在有限集$\{e_{\alpha_1},e_{\alpha_2},\cdots,e_{\alpha_n}\}\subset S$,使得 $\|x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_{\alpha_i}\|<\varepsilon$,这里 $c_i(1\leqslant i\leqslant n)$为常数。由定理 2.3.5 知,这个逼近式只有取 e_{α_i}的系数为(x,e_{α_i})时才能改善。这样,当 $z=(x,e_{\alpha_1})e_{\alpha_1}+(x,e_{\alpha_2})e_{\alpha_2}+\cdots+(x,e_{\alpha_n})e_{\alpha_n}$时,就有 $\|x-z\|<\varepsilon$。于是 $\|x\|\leqslant\|z\|+\varepsilon$。由式(2.3.10)有

$$(\|x\|-\varepsilon)^2\leqslant\|z\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_{\alpha_i})|^2\leqslant\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$$

由于 ε 的任意性以及 Bessel 不等式即知(3)成立。

(3)⇒(4)。假定对 X 中任一元素 Parseval 等式成立。

设 $x,y\in X$。由于在标准正交集 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$中使$(x,e_\alpha)\neq 0$ 和$(y,e_\alpha)\neq 0$ 的 e_α 都最多只有可数个,不妨分别设为 $S_x=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k},\cdots\}$以及 $S_y=\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_k},\cdots\}$,令 $S_1=S_x\cup S_y=\{e_{m_1},e_{m_2},\cdots,e_{m_k},\cdots\}$,由题设条件及定理 2.3.5 中式(2.3.11)有

$$x=(x,e_{m_1})e_{m_1}+(x,e_{m_2})e_{m_2}+\cdots+(x,e_{m_k})e_{m_k}+\cdots=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

以及 $$y=(y,e_{m_1})e_{m_1}+(y,e_{m_2})e_{m_2}+\cdots+(y,e_{m_k})e_{m_k}+\cdots=\sum_{\alpha\in A}(y,e_\alpha)e_\alpha$$

注意到内积的连续性，则

$$\begin{aligned}(x,y)=&\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_{m_k})e_{m_k},\sum_{p=1}^{\infty}(y,e_{m_p})e_{m_p}\Big)=\\ &\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}(x,e_{m_k})e_{m_k},\sum_{p=1}^{n}(y,e_{m_p})e_{m_p}\Big)=\\ &\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_{m_k})\overline{(y,e_{m_k})}=\\ &\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_{m_k})\overline{(y,e_{m_k})}=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)\overline{(y,e_\alpha)}\end{aligned}$$

(4) ⇒(1)。若(1)不成立，则 X 中必存在一个非零元素 e，使得 $(e,e_\alpha)=0(\forall\alpha\in A)$。若取 $x=y=e$，则 $(x,y)=\|e\|^2\neq0$；另一方面，对于 $\forall\alpha\in A,(e,e_\alpha)=0$，这时 $(x,y)=0$，矛盾。从而(1)成立。证毕。

由定理 2.3.6 可以得到如下结果：

推论 若 $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交基，则 $\forall x\in X$，有

$$X=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

下面我们研究是否每个非零 Hilbert 空间都有标准正交基，如何得到标准正交基。先介绍把一组线性无关元素作成标准正交集的方法——Gram - Schmidt 方法。

定理 2.3.7 设 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是内积空间 X 中的有限或可数个线性无关的元素，那么必有 X 中的标准正交集 $\{e_1,e_2,\cdots\}$，使得对于任何自然数 n，有 $\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

证 令 $e_1=x_1/\|x_1\|$，则 $\|e_1\|=1$，且 $\mathrm{span}\{e_1\}=\mathrm{span}\{x_1\}$。令 $y_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$，因为 x_1,x_2 线性无关，所以 $y_2\neq0$，且 $y_2\perp e_1$。令 $e_2=y_2/\|y_2\|$，则 $\|e_2\|=1$，且 $e_2\perp e_1$，$\mathrm{span}\{e_1,e_2\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2\}$。假设已经作好了 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$，其中 $\|e_i\|=1(1\leqslant i\leqslant n-1)$，并且两两正交，满足 $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$，则令 $y_n=x_n-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i,e_i)e_i$，由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关知，$y_n\neq0$，令 $e_n=y_n/\|y_n\|$，则 $\|e_n\|=1$，且 $e_n\perp e_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$，满足 $\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$，这样一直进行下去，即得所求标准正交集。证毕。

若 X 是可分的 Hilbert 空间，则 X 中存在可数稠密子集 $\{x_n\}$，那么其中必有一个线性无关子集 $\{y_n\}$，使得 $\mathrm{span}\{y_n\}=\mathrm{span}\{x_n\}$。由定理 2.3.7 可构造出一个标准正交集 $\{e_n\}$。又因为 $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}=\overline{\mathrm{span}\{y_n\}}=X$，由定理 2.3.6 知 $\{e_n\}$ 是 X 的标准正交基。于是我们证明了如下结果：

推论 可分 Hilbert 空间 X 存在至多可数的标准正交基。

对于一般的非零 Hilbert 空间，应用 Zorn 引理，可以证明它也存在标准正交基，有兴趣的读者可参阅参考文献[2]。

以上的结果表明，对于 Hilbert 空间 X 中的任一元素 x，都可以通过标准正交基 $\{e_\alpha|\alpha\in A\}$ 表成 Fourien 级数

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$$

这个结果是数学分析中函数的 Fourier 展开在 Hilbert 空间中的推广。由于任一 Hilbert 空间必存在标准正交基，因此只要找到这种标准正交基，空间中的任一元素均可表成一个 Fourier 级数的形式。

函数的标准正交展开在工程技术中有许多重要应用。例如，在信号处理中，一个周期信号在一定条件下可以展成以正弦、余弦函数为正交基的 Fourier 级数。正弦和余弦函数不仅是工程中最简单、最容易生成的函数，而且相应级数的 Fourier 系数还隐含了很多信息规律。这类Fourier 级数可由 $L^2[0,2\pi]$空间中的三角多项式来最佳逼近（实际上这个最佳逼近多项式就是 Fourier 展式的前 $2n+1$ 项之和），从而使信号输出过程中的能量损失达到最小。

下面研究 Hilbert 空间的同构。

定义 2.3.7 设 X_1 与 X_2 是两个内积空间，若存在 X_1 到 X_2 上的一一映射 T，使对任何 $x,y\in X$ 以及数 α,β，满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty \quad (Tx,Ty)=(x,y)$$

则称 X_1 与 X_2 **同构**，称 T 为 X_1 到 X_2 上的**同构映射**。

对于可分的 Hilbert 空间 X，我们已证明它存在标准正交基 S，并且至多是可数的。设 S 为$\{e_n\}_{n=1}^{n=N}$（$N<\infty$或 $N=\infty$），作映射

$$T:x\mapsto\{(x,e_n)\}_{n=1}^{n=N},\ \forall\, x\in X$$

由 Parseval 等式得

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2,\ \forall\, x\in X$$

可知 T 是 $X\to\mathbf{R}^N$ 或 $\mathbf{C}^N$（当 $N<\infty$）或 $X\to l^2$（当 $N=\infty$）的一一到上的线性同构。此外，

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)e_i,\sum_{j=1}^{N}(y,e_j)e_j\right)=\sum_{i=1}^{N}(x,e_i)\overline{(y,e_i)},\ \forall\, x,y\in X$$

因此 T 还是保内积的。于是 $N<\infty$时，X 同构于有限维欧氏空间 $\mathbf{R}^N$（或 $\mathbf{C}^N$）；$N=\infty$时，X 同构于空间 l^2。

2.3.4 Hilbert 空间中的共轭算子和自共轭算子

设 X 和 Y 都是 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$。对于 Y 中每个固定的 y，设

$$f(x)\triangleq(Tx,y) \qquad 当\ x\in X$$

则 $f(x)$是 X 上的一个连续线性泛函。由 Riesz 表现定理知，恰有一个 $\tilde{y}\in X$，使

$$f(x)=(x,\tilde{y}) \qquad 当\ x\in X$$

这个 $\tilde{y}$ 是由 y 惟一确定的。定义 $T^*y=\tilde{y}$，则容易验证 T^* 是从 Y 到 X 的有界线性算子。称 T^* 为 T 的 **Hilbert 共轭算子**，通常也称为 T 的**伴随算子**。Hilbert 空间中的共轭算子概念是一般赋范线性空间中的共轭算子概念的特殊情形。

由 T^* 的定义可知

$$(Tx,y)=(x,T^*y) \qquad \forall\, x\in X,y\in Y \tag{2.3.18}$$

总之，对于每个 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，总存在一个 $T^*\in\mathscr{B}(Y\to X)$，使式(2.3.18)成立。显然 T^* 是由 T 惟一确定的。

例 2.3.5 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 $\mathbf{C}^n$ 的一个标准正交基，$T:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 线性算子，$(a_{ij})_{n\times n}$是 T 在基$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$上的矩阵表示。于是 $Te_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i,\ j=1,2,\cdots,n$，从而对每个 $k,j=1,$

$2,\cdots,n$，有

$$(T^* e_k, e_j) = (e_k, e_j) = (e_k, \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i) = \bar{a}_{kj}$$

故 $T^* e_k = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} e_j, k = 1,2,\cdots,n$，于是 T^* 在$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$上的矩阵表示为$(\bar{a}_{ji})_{n\times n}$，它为矩阵$(a_{ij})_{n\times n}$的转置共轭阵。

例 2.3.6 设 $K(t,s)$是定义在 $a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant b$ 上的平方可积函数。由 $K(t,s)$定义了从 $L^2[a,b]\to L^2[a,b]$的有界线性算子 T

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

现在求 T 的共轭算子。任取 $y(t)\in L^2[a,b]$，有

$$(x, T^* y) = (Tx, y) = \int_a^b\int_a^b K(t,s)x(s)\overline{y(t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$\int_a^b x(s)\overline{\left[\int_a^b \overline{K(t,s)}y(t)\mathrm{d}t\right]}\mathrm{d}s =$$

$$\int_a^b x(t)\overline{\left[\int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s\right]}\mathrm{d}t$$

故 $T^* y(t) = \int_a^b \overline{K(s,t)}y(s)\mathrm{d}s$，即 T^* 是以 $K^*(t,s) = \overline{K(s,t)}$ 为核的积分算子。

由共轭算子的定义，容易得到如下一些性质：

定理 2.3.8 设 X,Y 为 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，α 是数，则

(1) $(S+T)^* = S^* + T^*$，$S\in\mathscr{B}(X\to Y)$；

(2) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$；

(3) $(T^*)^* = T$；

(4) 若 T 可逆，且 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y\to X)$，则 T^* 可逆，且$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$；

(5) 若 $T\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$S\in\mathscr{B}(Y\to Z)$，其中 X,Y,Z 均为 Hilbert 空间，则$(ST)^* = T^* S^*$。

下面介绍一类重要有界线性算子。

定义 2.3.8 设 T 是 Hilbert 空间 $X\to X$ 的有界线性算子，如果 $T^* = T$，即 $\forall x,y\in X$，有 $(Tx,y) = (x,Ty)$，则称 T 是**自共轭算子**，亦称**自伴算子**。

在 n 维 Hilbert 空间 $\mathbf{R}^n$ 中，$T\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n)$，若 T 的矩阵表示为实对称阵，则 T 为自共轭算子。

在例 2.3.6 中，T 是自共轭算子的充要条件是 $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$。当 $K(x,y)$为实值函数时，$K(x,y) = K(y,x)$，即它为对称函数。

定理 2.3.9 设 T 为复 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子，那么 T 为自共轭算子的充要条件是对于一切 $x\in X$，有(Tx,x)为实数。

证 必要性。设 $T^* = T$，由$(Tx,x) = (x,Tx) = \overline{(Tx,x)}$，故$(Tx,x)$为实数。

充分性。如果对于所有 $x\in X$，(Tx,x)都为实数，则

$$(Tx,x) = \overline{(Tx,x)} = \overline{(x,T^* x)} = (T^* x,x)$$

所以$((T-T^*)x,x) = 0$，由习题 21 知，$T = T^*$，即 T 为自共轭算子。证毕。

定理 2.3.10 若 T 为 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子，则 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx,x)|$。

证明从略。

最后给出自共轭算子的运算性质：

(1) 若 S,T 都是 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子，则 $S\pm T$ 仍为 X 上的自共轭算子；

(2) 若 S,T 都是 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子，且 $ST=TS$，则 ST 仍为 X 上的自共轭算子；

(3) 若 $\{T_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 上一列自共轭算子，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$，则 T 仍为 X 上的自共轭算子。

下面介绍复 Hilbert 空间 X 上有界自共轭算子谱的一些性质。

定理 2.3.11　设 X 为复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 为自共轭算子，则

(1) T 的特征值都是实数；

(2) 对应于不同特征值的特征向量彼此正交。

定理 2.3.12　设 X 为复 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$ 为自共轭算子，$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$，$M=\sup\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)$，则$[m,M]$是包含 $\sigma(T)$ 的最小区间，且

$$\|T\| = \max\{|m|,|M|\} = \sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$$

由定理 2.3.12 立刻看出，自共轭算子 T 的谱半径是 $\|T\|$，且 $m,M\in\sigma(T)$。

当 T 是全连续自共轭算子时，由定理 2.2.26 知，它的非零谱点都是 T 的特征值，而且都是孤立点，因此，T 的全部非零特征值可排成

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|\geqslant\cdots$$

与每个特征值 λ_n 对应的特征向量空间 L_n 都是有限维的。由定理 2.3.11 知，$\{L_n\}$ 彼此正交，而每个 L_n 又有相应的标准正交向量组张成。

设 P_n 是 X 在 L_n 上的投影算子，则有如下定理。

定理 2.3.13　设 X 是复 Hilbert 空间，$T\in C(X)$ 为自共轭算子，则

(1) 存在有限或无穷非零实数列$\{\lambda_n\}$，λ_n 为 T 的特征值，$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$若$\{\lambda_n\}$是无穷的，则 $\lambda_n\to 0(n\to\infty)$。相应地存在标准正交序列$\{e_n\}$，使 $Te_n=\lambda_n e_n$，并且对于每个 $x\in X$ 有 $Tx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n$；

(2) 若 P_n 是 X 到由 e_n 张成的线性子空间上的投影算子，则 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n P_n$；

(3) 若 0 不是 T 的特征值，则$\{e_n:n\geqslant 1\}$是 X 的标准正交基。

以上定理的证明，读者可参阅参考文献[4]或[12]。

自共轭算子谱论在积分方程理论和数学物理中有重要应用。在数学物理方程的分离变量解法中，一个关键问题是研究常微分方程的边值问题，我们可以把其转化为积分方程问题。在适当的条件下，这些微分算子的逆算子——积分算子是自共轭全连续算子，于是可以利用 Hilbert 空间的算子理论去讨论相应的特征值理论和 Fourier 解法等。关于这方面的内容，读者可参阅参考文献[4]和[7]。

2.4　非线性算子

本节主要讨论 Banach 空间中非线性算子（即映射）的一些性质，其中包括它的有界性、

连续性、微分、积分、隐函数存在定理等。这些都是非线性泛函分析中最基本的内容。

2.4.1 非线性算子的有界性和连续性

设 X,Y 是两个实 Banach 空间，$D\subset X$。设算子 $f:D\to Y$。一般地，可以假设 f 是非线性的。

定义 2.4.1 设 $x_0\in D$，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\delta(x_0,\varepsilon)>0$，使当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，恒有 $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$，则称算子 f 在 x_0 **连续**；若 f 在 D 内每一点都连续，则称 f 在 D **内连续**；若上述连续定义中的 δ 仅与 ε 有关而与 x_0 无关，则称 f 在 D 上**一致连续**。

定义 2.4.2 若算子 f 将 D 内任一有界集映为 Y 中的有界集，则称 f 在 D 上有界。

上述连续性的定义，几乎和古典分析中函数连续性的定义一模一样，有界性的定义也与线性算子有界性的定义是吻合的。但由于空间是无穷维的，算子 f 一般是非线性的，这些形式上相同的定义可能导出极不相同的特性。例如，在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，设 $D\subset X=\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$f:D\to\mathbf{R}=Y$ 的连续映射，则 f 在 D 上有界，并且可达到最大(小)值。对无穷维空间，这些结论就不一定成立。对于线性算子来说，连续性和有界性是等价的；对于非线性算子，则没有这种等价关系。

例 2.4.1 考察空间 l^2 上的泛函 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kr_k$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in l^2$，其中，$r_k=\max\{|x_k|-1,0\}$，$k=1,2,\cdots$。

由于 $x_k\to0(k\to\infty)$，故上述和式中只有有限项不为零，即 $f(x)$ 存在。易知，若 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)\in l^2$，$x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$，且

$$\|x^{(n)}-x\|=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)}-x_k)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\to0(n\to\infty)$$

则必有 $f(x^{(n)})\to f(x)$，故 f 是 l^2 上的连续泛函。但 f 在 l^2 上不是有界的。事实上，任取 $\varepsilon_0>0$，令 $z^{(n)}=(z_1^{(n)},z_2^{(n)},\cdots,z_k^{(n)},\cdots)$，其中

$$z_k^{(n)}=\begin{cases}1+\varepsilon_0, & 当\ k=n\ 时\\ 0, & 当\ k\neq n\ 时\end{cases}$$

则 $\{z^{(n)}\}\subset\bar{B}(0,1+\varepsilon_0)$，其中 $\bar{B}(0,1+\varepsilon_0)=\{x\mid x\in l^2,\|x\|\leqslant1+\varepsilon_0\}$，而 $f(z^{(n)})=n\varepsilon_0\to\infty$ $(n\to\infty)$，故 f 无界。

由于 $\bar{B}(0,1+\varepsilon_0)$ 是有界闭集，例 2.4.1 说明对于在无穷维空间中的有界闭集上的非线性算子，它的连续性并不保证其有界性。

例 2.4.2 设 C_0 为空间 $C[0,1]$ 中满足条件 $x(0)=x(1)=0$ 的元素的集合，它是 $C[0,1]$ 的子空间。考察 C_0 上的泛函

$$f(x)=\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\qquad x\in C_0$$

对于 C_0 中的任何连续函数列 $\{x_n(t)\}$，并设它收敛于 $x(t)\in C_0$，是指 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant1}|x_n(t)-x(t)|\to0(n\to\infty)$，即 C_0 中的收敛是连续函数列的一致收敛。由于在一致收敛的条件下，极限号和积分号可以交换，故必有 $f(x_n)\to f(x)(n\to\infty)$。因此，$f$ 是 C_0 上的连续泛函。显然，$f(x)$ 在 C_0 内的单位闭球 $\bar{B}=\{x\mid x\in C_0,\|x\|\leqslant1\}$ 上有界，并且 $\sup\limits_{x\in\bar{B}}f(x)=1$。

但是，由条件 $x(0)=x(1)=0$，$\forall x\in\bar{B}$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$，$\exists\delta>0$，当 $0\leqslant t<\delta$ 以及 $1-\delta<t\leqslant1$

时，有 $\| x(t) \| < \frac{1}{2}$。于是

$$f(x) = \int_0^1 | x(t) |^2 \mathrm{d}t = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^{1-\delta} + \int_{1-\delta}^1\right) | x(t) |^2 \mathrm{d}t <$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \delta + 1 - 2\delta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \delta < 1 - 2\delta + \delta = 1 - \delta < 1$$

这个例子表明，泛函 f 在有界闭集 $\bar{B}$ 上连续、有界，但不能达到最大值。

定理 2.4.1 闭球上的一致连续算子必为有界算子。

证 设算子 f 在 $\bar{B}(x_0,r)=\{x \mid \| x-x_0 \| \leqslant r, x\in X\}$ 上一致连续，则对于 $\varepsilon=1$，$\exists \delta>0$，当 $x',x''\in \bar{B}(x_0,r)$ 且 $\| x'-x'' \| < \delta$ 时，有 $\| f(x')-f(x'') \| < 1$。选取自然数 N，使 $r/N<\delta$。对于 $\forall x\in \bar{B}(x_0,r)$，令 $x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x-x_0)\ (1\leqslant i\leqslant N)$。由于 $\| x_{i+1}-x_i \| = \frac{1}{N}\| x-x_0 \| < \frac{r}{N} < \delta$，则 $\| f(x_{i+1})-f(x_i) \| < 1$。因此

$$\| f(x) \| \leqslant \| f(x_0) \| + \| f(x)-f(x_0) \| \leqslant \| f(x_0) \| + \sum_{i=1}^{N-1} \| f(x_{i+1})-f(x_i) \| \leqslant$$

$$\| f(x_0) \| + N$$

即 f 是有界算子。证毕。

由定理 2.4.1 和例 2.4.1 可以看出，无穷维空间中有界闭集上的连续算子不一定是一致连续的。

在 2.2.6 中，我们就一般的赋范线性空间定义了全连续线性算子，它具有良好的性质，这些性质在许多方面接近于有限维空间中的线性算子。现在提出类似的问题：在非线性算子中，是否存在一类算子，也具有较好的性质，在某些方面接近于有限维空间中的连续算子？下面将看到，这一设想完全可以实现。

定义 2.4.3 设 X,Y 是两个实 Banach 空间，$D\subset X$。如果算子 f 把 D 中任何有界集 S 映成 Y 中的列紧集 $f(S)$，则称 $f:D\to Y$ 是**紧算子**。如果 $f:D\to Y$ 是连续且紧的，则称 $f:D\to Y$ 为**全连续算子**。

若 $f(D)$ 包含在 Y 的有限维子空间中，则称 f 为**有限秩算子**。

例 2.4.3 设函数 $k(s,t,u)$ 在 $0\leqslant s,t\leqslant 1$，$|u|<\infty$ 上连续，令 $(Ku)(s) = \int_0^1 k(s,t,u(t))\mathrm{d}t$，则积分算子 $K:C[0,1]\to C[0,1]$ 为全连续算子。

证 先证 K 连续。设 $\{u_n\}\subset C[0,1]$，$u_n \rightrightarrows u(n\to\infty)$（一致收敛）。令 $\beta=\sup\limits_n \| u_n \|$。因 k 在闭区域 $0\leqslant s,t\leqslant 1, -\beta\leqslant u\leqslant \beta$ 上连续，从而一致连续，$\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|s-s'|<\delta$，$|t-t'|<\delta$，$|z-z'|<\delta$（这里 $s,s',t,t'\in[0,1]$，$z,z'\in[-\beta,\beta]$）时，$|k(s,t,z)-k(s',t',z')|<\varepsilon$。

对于上面 $\delta>0$，由 $u_n \rightrightarrows u$，$\exists N\in \mathbf{N}^+$，当 $n\geqslant N$ 时，$\| u_n - u \| < \delta$。于是当 $n\geqslant N$，且 $s\in[0,1]$ 时，有

$$|(Ku_n)(s) - (Ku)(s)| \leqslant \int_0^1 | k(s,t,u_n(t)) - k(s,t,u(t)) | \mathrm{d}t < \varepsilon$$

即 $Ku_n \rightrightarrows Ku(n\to\infty)$，所以 K 连续。

其次，证明 K 为紧算子。任给有界集 $B\subset C[0,1]$，令 $a=\sup\limits_{u\in B}\| u \|$，$M=\sup\{|k(s,t,z)| \mid$

$0\leqslant s,t\leqslant 1,|z|\leqslant a\}$。对于 $\forall u\in B, s\in[0,1]$,有 $|(Ku)(s)|\leqslant\int_0^1|k(s,t,u(t))|\mathrm{d}t\leqslant M$, 即 KB 一致有界。设 ε,δ 如上,则当 $s,s'\in[0,1]$, $|s-s'|<\delta$ 时,对任何 $u\in B$,有

$$|(Ku)(s)-(Ku)(s')|\leqslant\int_0^1|k(s,t,u(t))-k(s',t,u(t))|\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon$$

于是 KB 等度连续,由 Arzela - Ascoli 定理知,KB 为列紧集,因此 K 为全连续算子。

定理 2.4.2 设 X,Y 是实 Banach 空间,D 是 X 中的有界集,$f:D\to Y$ 是全连续算子,则 $\forall\varepsilon>0$,存在连续有界算子 $f_\varepsilon:D\to Y_\varepsilon$,使对一切 $x\in D$,均有 $\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$。这里 Y_ε 是 Y 的某个有限维子空间。

证 由假设 $f(D)$ 是 Y 中列紧集,故对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists y_1,y_2,\cdots,y_N\in f(D)$,构成 $f(D)$ 的有限 ε-网。用 Y_ε 表示由 $y_1,y_2,\cdots,y_N$ 张成的有限维子空间。$\forall y\in Y$,令 $m_i(y)=\max\{\varepsilon-\|y-y_i\|,0\}$, $(i=1,2,\cdots,N)$,那么固定 ε 时,m_i 关于 y 连续,且只在球 $\|y-y_i\|<\varepsilon$ 内为正。令 $m(y)=\sum_{i=1}^N m_i(y)$ 。当 $x\in D$ 时,必有某个 y_i,使 $\|f(x)-y_i\|<\varepsilon$,故 $m_i(f(x))>0$,从而 $m(f(x))>0$。令

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{m(f(x))}\sum_{i=1}^N m_i(f(x))y_i\qquad\forall x\in D$$

显然 $f_\varepsilon:D\to Y_\varepsilon$ 连续。注意到 $\|f(x)-y_i\|\geqslant\varepsilon$ 时,有 $m_i(f(x))=0$,则知当 $x\in D$ 时

$$\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|=\left\|\frac{1}{m(f(x))}\sum_{i=1}^N m_i(f(x))(f(x)-y_i)\right\|\leqslant$$

$$\frac{1}{m(f(x))}\sum_{i=1}^N m_i(f(x))\|f(x)-y_i\|<\varepsilon \tag{2.4.1}$$

由于 $f(D)$ 列紧,故 $f(D)$ 有界,从而存在 $M>0$,使得 $\|f(x)\|\leqslant M$, $\forall x\in D$;由式(2.4.1)又知,$\|f_\varepsilon(x)\|\leqslant M+\varepsilon$, $\forall x\in D$。故 f_ε 有界。证毕。

定理 2.4.2 中 f_ε 的值域含于 Y 中的一个有限维子空间 Y_ε,所以它是有限秩算子。这个定理的意义在于,全连续算子可以用连续有界的有限秩算子一致逼近。

下面给出全连续算子的延拓定理,关于它的证明,可参看参考文献[9]。

定理 2.4.3(全连续算子的延拓定理) 设 X,Y 是实 Banach 空间,$D\subset X$ 是闭集,$f:D\to Y$ 全连续。那么必存在算子 $\tilde{f}:X\to Y$ 全连续,使当 $x\in D$ 时,恒有 $\tilde{f}(x)=f(x)$,并且 $\tilde{f}(X)\subset\overline{\mathrm{co}}f(D)$。这里 $\overline{\mathrm{co}}f(D)$ 表示 f 的值域 $f(D)$ 在 Y 中的凸闭包。

2.4.2 F-微分和 G-微分

现在我们介绍 Fréchet 微分(简称 F-微分)和 Gâteaux 微分(简称 G-微分)的概念和性质,其目的是把数学分析中全微分概念和方向导数概念推广到作用在 Banach 空间中的算子上去。

定义 2.4.4 设 X,Y 为实 Banach 空间,$D\subset X$ 为开集,算子 $f:D\to Y$, $x_0\in D$。若存在 $A\in\mathscr{B}(X\to Y)$,使得 $h\in X$, $x_0+h\in D$ 时,有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\omega(x_0,h) \tag{2.4.2}$$

其中,$\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$,即

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}=0 \tag{2.4.3}$$

则称算子 f 在 x_0 处 **F-可微**，Ah 称为 f 在 x_0 处对 h 的 **F-微分**，记为 $\mathrm{d}(f(x_0)h)$，算子 A 称为 f 在点 x_0 的 **F-导算子**，记为 $f'(x_0)$。

若 f 在 D 内每一点 F-可微，则称 f **在 D 内 F-可微**，并称 $f'(x)(x\in D)$ 为算子 f 的 **F-导映射**。若导映射 f' 在点 x_0 处连续，则称算子 f **在点 x_0 处连续可微**。

由定义 2.4.4 不难得到如下结论：

(1) F-导算子是惟一的；

(2) 求导运算是线性的；

(3) 有界线性算子的 F-导映射为常映射，即若 $f(x)=Ax, A\in\mathscr{B}(X\to Y)$，则 $f'(x)=A(\forall x\in X)$；

(4) 常算子的 F-导算子为 0，即若 $f(x)\equiv y_0\in Y, \forall x\in X$，则 $f'(x)=0, \forall x\in X$。

例 2.4.4　设由 m 个 n 元函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 确定算子 f 如下：

$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$，其中，$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n), i=1,2,\cdots,m$。

设每个 f_i 都在点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$ 的某邻域内具有连续的一阶偏导数，于是对 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^{\mathrm{T}}$，当 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小时，利用中值定理，有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)&=(f_1(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)-\\&\quad f_1(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),\cdots,\\&\quad f_m(x_1^{(0)}+h_1,\cdots,x_n^{(0)}+h_n)-f_m(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}))^{\mathrm{T}}=\\&\quad\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\bigg|_{x_0+\theta_1 h}\cdot h_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\bigg|_{x_0+\theta_m h}\cdot h_j\right)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

根据 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 的连续性，即知 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处 F-可微，并且 $f'(\boldsymbol{x}_0)$ 由下式表示

$$f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\bigg|_{x_0}\cdot h_j,\cdots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\bigg|_{x_0}\cdot h_j\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.4.4}$$

亦即线性算子 $f'(\boldsymbol{x})$ 是由矩阵 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ 所确定的线性变换：$\boldsymbol{z}=f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}$ 相当于 $(\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_m))$

$$\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

由式(2.4.2)和式(2.4.3)可知，若 $f:D\to Y$ 在 $x_0\in D$ 处 F-可微，则 f 在 x_0 处连续。

定理 2.4.4(链锁规则)　设 X,Y,Z 为实 Banach 空间，开集 $D\subset X$，开集 $H\subset Y$，$f:D\to Y$，$g:H\to Z$，且 $f(D)\subset H$。若 f 在 $x_0\in D$ 处 F-可微，g 在 $y_0=f(x_0)$ 处 F-可微，则复合算子 gf 在 x_0 处 F-可微，且

$$(gf)'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0) \tag{2.4.5}$$

证　因为 f 在 x_0 处，g 在 y_0 处均 F-可微，于是 $\exists f'(x_0)\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$g'(y_0)\in\mathscr{B}(Y\to Z)$，使

得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\omega(x_0,h)$$
$$g(y_0+k)-g(y_0)=g'(y_0)k+\omega(y_0,k) \tag{2.4.6}$$

其中，$\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$，$\omega(y_0,k)=o(\|k\|)$。

在式(2.4.6)中取 $k=f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+h)-y_0$，则当 $\|h\|\to 0$ 时，$\|k\|\to 0$。这时式(2.4.6)可写成

$$\begin{aligned} gf(x_0+h)-gf(x_0) &= g'(y_0)k+\omega(y_0,k)= \\ &g'(y_0)(f'(x_0)h+\omega(x_0,h))+\omega(y_0,k)= \\ &g'(y_0)f'(x_0)h+\omega_1(x_0,h) \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

其中，$\omega_1(x_0,h)=g'(y_0)\omega(x_0,h)+\omega(y_0,k)$。于是

$$\frac{\|\omega_1(x_0,h)\|}{\|h\|}\leqslant\|g'(y_0)\|\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}+\frac{\|k\|}{\|h\|}\frac{\|\omega(y_0,k)\|}{\|k\|} \tag{2.4.8}$$

因为$\frac{\|k\|}{\|h\|}=\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|}=\frac{\|f'(x_0)h+\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}\leqslant\|f'(x_0)\|+\frac{\|\omega(x_0,h)\|}{\|h\|}$，并且注意到 $g'(y_0)$，$f'(x_0)$ 有界，且当 $\|h\|\to 0$ 时，$\|k\|\to 0$，由式(2.4.8)得 $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\frac{\|\omega_1(x_0,h)\|}{\|h\|}=0$。由式(2.4.7)知复合算子 gf 在 x_0 处 F-可微，并且式(2.4.5)成立。

定理 2.4.5 用 l 表示直线段 $\{x\mid x=x_0+th,0\leqslant t\leqslant 1,x_0,h\in X\}$，且 $l\subset D$。

(1) 若泛函 $f:D\to\mathbf{R}^1$ 在 l 上 F-可微，则存在 $0<\tau<1$，使如下中值公式成立

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\tau h)h \tag{2.4.9}$$

(2) 若算子 $f:D\to Y$ 在 l 上 F-可微，则存在 $0<\tau<1$，使

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leqslant\|f'(x_0+\tau h)h\| \tag{2.4.10}$$

证 (1) 令 $\varphi(t)=f(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$。由定理 2.4.4 知 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上 F-可微，并且 $\varphi'(t)=f'(x_0+th)h$。由微分中值定理，$\exists\, 0<\tau<1$，使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$，从而式(2.4.9)成立。

(2) 若 $f(x_0+h)-f(x_0)=0$，式(2.4.10)显然成立，不妨设它不为 0。由 Hahn-Banach 定理的推论 1 知，$\exists\,\psi\in Y^*$，使 $\|\psi\|=1$，且 $\psi(f(x_0+h)-f(x_0))=\|f(x_0+h)-f(x_0)\|$。考察函数 $\varphi(t)=\psi(f(x_0+th))$，$0\leqslant t\leqslant 1$。易知 $\varphi'(t)=\psi f'(x_0+th)h$，$0\leqslant t\leqslant 1$(这是由于若 g 是线性有界算子，定理 2.4.4 中式(2.4.5)为 $(gf)'(x_0)=gf'(x_0)$)。于是由中值公式，$\exists\,0<\tau<1$，使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)$，即 $\psi(f(x_0+h)-f(x_0))=\psi f'(x_0+\tau h)h$，从而有 $\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=\psi f'(x_0+\tau h)h\leqslant\|\psi\|\,\|f'(x_0+\tau h)h\|=\|f'(x_0+\tau h)h\|$。证毕。

对于泛函，中值公式(2.4.9)成立，但对于通常的算子，公式(2.4.9)一般不成立。例如 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，由下式定义

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}},\ y_1=x_1^2,\ y_2=x_2^3$$

考察 $\boldsymbol{x}_0=(0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}=(1,1)^{\mathrm{T}}$，则 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=(1,1)^{\mathrm{T}}$，由例 2.4.4 中式(2.4.4)知，$f'(\boldsymbol{x}_0+\tau\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}=(2\tau,3\tau^2)^{\mathrm{T}}$。若中值公式(2.4.9)成立，则有 $(1,1)^{\mathrm{T}}=(2\tau,3\tau^2)^{\mathrm{T}}$。但无论 $\tau\in(0,1)$ 为何值，方程组 $1=2\tau$，$1=3\tau^2$ 都没有公共解。因此对于算子而言，中值公式(2.4.9)一般不成立。

定义 2.4.5 设 $D\subset X$ 为开集，$f:D\to Y$，$x_0\in D$。若 $\forall\,h\in X$，$x_0+h\in D$，极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \tag{2.4.11}$$

都存在(是 Y 中的元素),则称 f 在点 x_0 处 **G-可微**,极限(2.4.11)称为 f 在 x_0 处(沿着方向 h)的 **G-微分**,记为 $\mathrm{D}(f(x_0)h)$,即

$$\mathrm{D}(f(x_0)h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \tag{2.4.12}$$

若 G-微分可以表为 $\mathrm{D}(f(x_0)h)=gh, g\in\mathscr{B}(X\to Y)$,则称 f 在 x_0 处具有**有界线性的 G-微分**,g 叫做 f 在 x_0 处的 **G-导算子**,亦可记为 $f'(x_0)$,即

$$\mathrm{D}(f(x_0)h)=f'(x_0)h \tag{2.4.13}$$

若 $\forall x\in D$, f 在 x 处都具有有界线性的 G-微分,则称 **f 在 D 内具有有界线性的 G-微分**。

对于 G-微分,我们也有类似于 F-微分的中值公式。

定理 2.4.6 用 l 表示直线段 $\{x|x=x_0+th, 0\leqslant t\leqslant 1\}(x_0,h\in X)$。

(1) 若泛函 $f:D\to R^1$ 在 l 上 G-可微,则存在 $0<\tau<1$,使如下中值公式成立

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\mathrm{D}(f(x_0+\tau h)h) \tag{2.4.14}$$

(2) 若算子 $f:D\to Y(l\subset D)$ 在 l 上 G-可微,则存在 $0<\tau<1$,使

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\leqslant\|\mathrm{D}(f(x_0+\tau h)h)\| \tag{2.4.15}$$

关于算子的 F-可微性与 G-可微性的关系,我们有如下定理。

定理 2.4.7 设 $f:D\to Y$(D 是 X 的开集),$x_0\in D$,那么

(1) 若 f 在 x_0 处 F-可微,则 f 在 x_0 处具有有界线性的 G-微分,且 $\mathrm{D}(f(x_0)h)=\mathrm{d}(f(x_0)h)=f'(x_0)h$;

(2) 若 f 在点 x_0 的某邻域内具有有界线性的 G-微分,并且 G-导算子 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,则 f 在点 x_0 处 F-可微。

证 (1) 由假定知,$f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h=\omega(x_0,h)$,其中 $f'(x_0)$ 为 F-导算子,$\omega(x_0,h)=o(\|h\|)$。于是 $f(x_0+th)-f(x_0)-f'(x_0)th=\omega(x_0,th)$,即 $\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}-f'(x_0)h=\frac{\omega(x_0,th)}{t}$。而 $\lim\limits_{t\to 0}\left\|\frac{\omega(x_0,th)}{t}\right\|=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\|\omega(x_0,th)\|}{\|th\|}\|h\|=0$,故 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=f'(x_0)h$。因此,$f$ 在 x_0 处具有有界线性 G-微分,且 $\mathrm{D}(f(x_0)h)=f'(x_0)h=\mathrm{d}(f(x_0)h)$。

(2) 因 G-导算子 $f'(x)$ 在 x_0 处连续,$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使当 $\|h\|<\delta$ 时,恒有

$$\|f'(x_0+h)-f'(x_0)\|<\varepsilon \tag{2.4.16}$$

其中,$f'(x_0+h)$, $f'(x_0)$ 均为 G-导算子。要证明当 $0<\|h\|<\delta$ 时,恒有

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\|\leqslant\varepsilon\|h\| \tag{2.4.17}$$

现给定 h,满足 $0<\|h\|<\delta$。不失一般性,可设 $f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\neq 0$(否则式(2.4.17)自然成立)。由 Hahn-Banach 定理知,存在 $y^*\in Y^*$,使 $\|y^*\|=1$,且

$$y^*(f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h)=\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\| \tag{2.4.18}$$

考查函数 $\varphi(t)=y^*(f(x_0+th))$, $0\leqslant t\leqslant 1$,易知 $\varphi'(t)=y^*(f'(x_0+th)h)$,其中 $f'(x_0+th)$ 为 G-导算子。于是由中值公式知,$\exists\, 0<\theta<1$,使 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(0)$,即

$$y^*(f(x_0+h)-f(x_0)) = y^*(f'(x_0+\theta h)h) \tag{2.4.19}$$

由式(2.4.18)，式(2.4.19)及式(2.4.16)(注意 $\|\theta h\|<\delta$)得

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\| &= y^*(f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h) = \\ & y^*(f'(x_0+\theta h)-f'(x_0))h \leqslant \|y^*\|\ \|f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)\|\ \|h\| = \\ & \|f'(x_0+\theta h)-f'(x_0)\|\ \|h\| \leqslant \varepsilon\|h\|\end{aligned}$$

即知式(2.4.17)成立，故在 x_0 处 F－可微，并且 $\mathrm{d}(f(x_0)h)=f'(x_0)h$。证毕。

注意，若 f 在 x_0 处具有有界线性的 G－微分，则一般推导不出 f 在 x_0 处 F－可微。

例 2.4.5 考察 $\mathbf{R}^2$ 上的泛函 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 如下

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} x_1+x_2+\dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}, & \text{当 } \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\neq(0,0)^{\mathrm{T}} \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(0,0)^{\mathrm{T}} \text{ 时}\end{cases}$$

因为 $\left|\dfrac{x_1^3x_2}{x_1^4+x_2^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x_1|$，故 f 在点(0,0)处也是连续的。令 $\boldsymbol{x}_0=(0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)^{\mathrm{T}}$，则有

$$\lim_{t\to0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{th_1+th_2+\dfrac{t^4h_1^3h_2}{t^4h_1^4+t^2h_2^2}}{t} = h_1+h_2$$

故 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处 G－可微，并且具有有界线性的 G－微分 $\mathrm{D}(f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h})=f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=h_1+h_2$，其中，$f'(\boldsymbol{x}_0)$表示 G－导算子。下面证 f 在 x_0 处不 F－可微。

若 f 在 x_0 处 F－可微，则由定理 2.4.7 知 $\mathrm{d}(f(x_0)\boldsymbol{h})=\mathrm{D}(f(x_0)\boldsymbol{h})=f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=h_1+h_2$，于是 $w(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=\dfrac{h_1^3h_2}{h_1^4+h_2^2}$，故 $\dfrac{w(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}=\dfrac{h_1^3h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$。置 $h_2=h_1^2$，并令 $h_1\to0^+$，得 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{h}\|\to0}\dfrac{w(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}=\lim\limits_{h_1\to0}\dfrac{h_1^5}{2h_1^4\sqrt{h_1^2+h_1^4}}=\dfrac{1}{2}$，此与 $w(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{h})=o(\|\boldsymbol{h}\|)$矛盾。

2.4.3 积 分

下面讨论抽象函数的 Riemann 积分，它是数学分析中 Riemann 积分的推广。

设 X 是一个实 Banach 空间，算子 $x(t):[a,b]\to X$ 称为**抽象函数**，即定义域为 $\mathbf{R}$ 中的区间 $[a,b]$，而值域在一个实 Banach 空间 X 中的算子称为抽象函数。

定义 2.4.6 设 $x(t):[a,b]\to X$ 是一个抽象函数，对$[a,b]$的任一分法 P：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，作积分和 $\sigma(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i$，其中 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$，$\xi_i$ 为$[t_{i-1},t_i]$中任意一点。如果当 $\mathrm{d}(P)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}\to0$ 时，$\sigma(P)$ 在 X 中趋于某极限 I，即存在 $I\in X$，使 $\|\sigma(P)-I\|\to0(\mathrm{d}(P)\to0)$，则称 $x(t)$**在$[a,b]$上 Riemann 可积**，元素 I 称为 $x(t)$在$[a,b]$上的 **Riemann 积分**，简称**积分**，记为 $\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$，即

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}t = I = \lim_{\mathrm{d}(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)\Delta t_i \tag{2.4.20}$$

定理 2.4.8 设 X 是 Banach 空间，$x(t)$在$[a,b]$上连续，则 $x(t)$在$[a,b]$上可积。

证 $\forall\varepsilon>0$，由于 $x(t)$ 在$[a,b]$上连续，从而一致连续，因此存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使当 t'，$t''\in[a,b]$，$|t'-t''|<\delta$ 时，恒有 $\|x(t')-x(t'')\|<\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$。

设 P 是$[a,b]$的一个分划，且 $\mathrm{d}(P)<\delta$，P'是 P 的加细，则 $\mathrm{d}(P')\leqslant d(P)<\delta$ 时，应用 $x(t)$ 在$[a,b]$上的一致连续性，容易证明

$$\|\sigma(P)-\sigma(P')\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4.21}$$

取$[a,b]$的一列分划$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 P_{n-1} 是 P_n 的加细，且 $\mathrm{d}(P_n)\to 0(n\to\infty)$。由式(2.4.21)知，$\{\sigma(P_n)\}$是 X 中的 Cauchy 序列。由于 X 完备，存在 $I\in X$，使 $\sigma(P_n)\to I(n\to\infty)$，即存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\mathrm{d}(P_n)<\delta,\ \|\sigma(P_n)-I\|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.4.22}$$

设 P 是$[a,b]$的任一分划，$\mathrm{d}(P)<\delta(\varepsilon)$，并记 $\widetilde{P}$ 是 P 与 P_N 合成的$[a,b]$的分划，则由式(2.4.21)和式(2.4.22)得

$$\|\sigma(P)-I\|\leqslant\|\sigma(P)-\sigma(\widetilde{P})\|+\|\sigma(\widetilde{P})-\sigma(P_N)\|+\|\sigma(P_N)-I\|<\varepsilon$$

即 $x(t)$在$[a,b]$上可积。证毕。

抽象函数积分具有如下性质：

设 $x(t)$，$x_1(t)$，$x_2(t)$都在$[a,b]$上连续，α,β 为实数，$f\in X^*$，则

(1) $\int_a^b(\alpha(x_1(t)+\beta x_2(t))\mathrm{d}t=\alpha\int_a^b x_1(t)\mathrm{d}t+\beta\int_a^b x_2(t)\mathrm{d}t$；

(2) $\left\|\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_a^b\|x(t)\|\mathrm{d}t$；

(3) $f\left(\int_a^b x(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b f(x(t))\mathrm{d}t$；

(4) 设 $x_n(t)$ 在$[a,b]$连续，且在$[a,b]$上 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$，则 $x(t)$ 在$[a,b]$连续，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$。

证 仅证(4)，其余情况读者自己完成。

显然 $x(t)$ 是$[a,b]\to X$ 的连续算子。由于$\left\|\int_a^b(x_n(t)-x(t))\mathrm{d}t\right\|\leqslant(b-a)\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|x_n(t)-x(t)\|\to 0(n\to\infty)$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^b x(t)\mathrm{d}t$。

定义 2.4.7 设 $x(t):[a,b]\to X$ 是一抽象函数，$t_0\in[a,b]$。若存在 $y_0\in X$，使

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\|\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}-y_0\right\|=0$$

则称 $x(t)$在 $t=t_0$ 点**可微**，y_0 叫做 $x(t)$在 t_0 点的**导数**，记为 $x'(t_0)$，即

$$x'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$$

若 $x(t)$在$[a,b]$中每一点均可微(在 a 点右可微，b 点左可微)，则称 $x(t)$在$[a,b]$**上可微**，导函数 $x'(t):[a,b]\to X$ 也是一个抽象函数。

定理 2.4.9 (1) 若 $x'(t)$在$[a,b]$上存在且连续，则 Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t=x(b)-x(a) \tag{2.4.23}$$

成立。

(2) 若 $x(t)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\| x(b)-x(a) \| \leqslant (b-a) \| x'(\xi) \| \tag{2.4.24}$$

成立。

(3) 设 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令

$$y(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s \qquad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{2.4.25}$$

则 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上可微，并且 $y'(t)=x(t)(a\leqslant t\leqslant b)$。

证 (1) 设 $f\in X^*$，考察 $[a,b]$ 上的实函数 $g(t)=f(x(t))$，易知 $g'(t)=f(x'(t))$，$a\leqslant t\leqslant b$。故 $g'(t)$ 在 $[a,b]$ 连续，由数学分析中 Newton - Leibniz 公式知

$$\int_a^b g'(t)\mathrm{d}t = g(b)-g(a)$$

由抽象函数积分性质(3)知

$$f\left(\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t\right)=\int_a^b f(x'(t))\mathrm{d}t = f(x(b))-f(x(a))$$

亦即 $f\left[\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t - x(b)+x(a)\right]=0$。再根据 $f\in X^*$ 的任意性，即得 $\int_a^b x'(t)\mathrm{d}t - x(b) + x(a) = 0$，从而式(2.4.23)成立。

(2) 不妨设 $x(b)-x(a)\neq 0$，由 Hahn - Banach 定理知，存在 $f\in X^*$，$\| f \|=1$，且 $f(x(b)-x(a))=\| x(b)-x(a) \|$。

令 $g(t)=f(x(t))$，应用中值公式，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\| x(b)-x(a)\| = g(b)-g(a) = g'(\xi)(b-a)=f(x'(\xi))(b-a)\leqslant \| f \| \ \| x'(\xi) \| (b-a) = \| x'(\xi) \| (b-a)$，即为式(2.4.24)。

(3) 设 $t\in[a,b]$。$\forall \varepsilon>0$，由于 $x(s)$ 连续，$\exists \delta>0$，使当 $|s-t|<\delta$ 时，有 $\| x(s)-x(t) \| <\varepsilon$。于是，当 $0<|\Delta t|<\delta$ 时，由式(2.4.25)知，必有(这里假设 $\Delta t>0$)

$$\left\| \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} - x(t) \right\| = \left\| \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}(x(s)-x(t))\mathrm{d}s \right\| \leqslant$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\| x(s)-x(t) \| \mathrm{d}s < \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\varepsilon \mathrm{d}s = \varepsilon$$

故 $y'(t)=x(t)$。证毕。

2.4.4 多重线性算子，高阶微分

定义 2.4.8 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y$ 均为实的赋范线性空间，称积空间 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的映射

$$u:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to y = u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

为 **n 重线性算子**，是指对于任意固定的 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots x_n$，$u(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x,x_{i+1},\cdots,x_n)$ 是 X_i 到 Y 的线性算子 $(i=1,2,\cdots,n)$。如果存在 $M>0$，使对 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$，有

$$\| u(x_1,x_2,\cdots,x_n) \| \leqslant M\| x_1 \| \ \| x_2 \| \cdots \| x_n \|$$

则称 u 为 **n 重有界线性算子**。

对于 n 重线性算子，我们有

定理 2.4.10 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,Y$ 为实赋范线性空间，$u:X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y$ 为 n 重线性算子，则 u 为连续算子的充要条件是 u 为 n 重有界线性算子。

记 $\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y)$ 为 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 到 Y 的 n 重有界线性算子的全体，在

其上定义加法与数乘运算为

$$(u_1+u_2)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)+u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$(\alpha u)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\alpha u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(\alpha\text{ 为数})$$

则它为一线性空间。

$\forall u\in\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y)$，以 $\|u\|=\sup\limits_{\|x_1\|\leqslant 1,\cdots,\|x_n\|\leqslant 1}\|u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|$ 作为 u 的范数，则 $\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y)$ 成为一赋范线性空间。若 Y 为 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to Y)$ 亦为 Banach 空间。特别地，当 $X_1=X_2=\cdots X_n=X$ 时，记 $\mathscr{B}_1(X\to Y)=\mathscr{B}(X\to Y)$，$\mathscr{B}_2(X\to Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}_1(X\to Y))$，$\cdots\mathscr{B}_n(X\to Y)=\mathscr{B}(X,\mathscr{B}_{n-1}(X\to Y))$。

关于 $\mathscr{B}(\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n\text{个}}\to Y)$ 与 $\mathscr{B}_n(X\to Y)$，我们有如下定理：

定理 2.4.11　$\mathscr{B}(\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n\text{个}}\to Y)$ 与 $\mathscr{B}_n(X\to Y)$ 等距同构。

证　仅就 $n=2$ 的情形证之，一般情形可由归纳法得到。首先建立 $\mathscr{B}(X\times X\to Y)$ 到 $\mathscr{B}_2(X\to Y)$ 之间的一个一一对应。任取 $u\in\mathscr{B}(X\times X\to Y)$，对 $\forall x\in X$，记 $u_x=u(x,\cdot)$，则 $u_x\in\mathscr{B}(X\to Y)(x\in X)$。令 $\tilde{u}(x)=u_x(x\in X)$，则 $\tilde{u}$ 是 X 到 $\mathscr{B}(X\to Y)$ 的线性算子，且有 $\|\tilde{u}(x)\|=\|u_x\|=\sup\limits_{\|y\|=1}\|u(x,y)\|\leqslant\|u\|\,\|x\|$，故 $\tilde{u}\in\mathscr{B}_2(X\to Y)$ 且 $\|\tilde{u}\|\leqslant\|u\|$。

取 $\varphi:u\to\tilde{u}$，则不难验证 φ 是 $\mathscr{B}(X\times X\to Y)$ 到 $\mathscr{B}_2(X\to Y)$ 的一一映射。

下面证明 φ 是满映射。对于 $\forall\tilde{u}\in\mathscr{B}_2(X\to Y)$，令 $u(x,y)=\tilde{u}(x)(y)$，$x,y\in X$，则 u 是 $X\times X$ 到 Y 的双重线性算子，且有 $\|u(x,y)\|=\|\tilde{u}(x)(y)\|\leqslant\|\tilde{u}(x)\|\,\|y\|\leqslant\|\tilde{u}\|\,\|x\|\,\|y\|$，故 $u\in\mathscr{B}(X\times X\to Y)$ 且 $\|u\|\leqslant\|\tilde{u}\|$。所以 φ 是满的。因此 φ 为 $\mathscr{B}(X\times X\to Y)$ 到 $\mathscr{B}_2(X\to Y)$ 的一一到上映射。

又对于 $u,v\in\mathscr{B}(X\times X\to Y)$，$\alpha,\beta$ 为实数，可以推出 $\varphi(\alpha u+\beta v)=\alpha\varphi(u)+\beta\varphi(v)$，且从前面证明的不等式 $\|\tilde{u}\|\leqslant\|u\|$ 和 $\|u\|\leqslant\|\tilde{u}\|$ 知，$\|\tilde{u}\|=\|u\|$，即 $\|\varphi(u)\|=\|u\|$。因此，$\mathscr{B}(X\times X\to Y)$ 与 $\mathscr{B}_2(X\to Y)$ 等距同构。证毕。

定义 2.4.9　设 X,Y 为实 Banach 空间，D 为 X 中开集。若 $f:D\to Y$ 在 D 中每一点都 F-可微，则 F-导算子 $f'(x)$ 随 x 而变，因此 $f':D\to\mathscr{B}(X\to Y)$。若 f' 又在点 $x_0\in D$ 处 F-可微，则 f' 在点 x_0 处的 F-导算子 $(f')'(x_0)$ 称为算子 f 在 x_0 处的**二阶 F-导算子**，记为 $f''(x_0)$。同理，二阶 F-导算子 f'' 的导算子(假如存在的话)称为算子 f 的**三阶 F-导算子**，记为 $f'''(x)$。一般地，$n-1$ 阶导算子 $f^{(n-1)}(x)$ 的 F-导算子(假如存在的话)称为算子 f 的 **n 阶 F-导算子**，记为 $f^{(n)}(x)$。

根据定义，显然 $f'(x)\in\mathscr{B}(X\to Y)$，$f''(x)\in\mathscr{B}_2(X\to Y)$，$f'''(x)\in\mathscr{B}_3(X\to Y)$，$\cdots$，$f^{(n)}(x)\in\mathscr{B}_n(X\to Y)$。由定理 2.4.11 知，$\mathscr{B}(\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n\text{个}}\to Y)$ 与 $\mathscr{B}_n(X\to Y)$ 等距同构，因此，$f''(x)\in\mathscr{B}(X\times X\to Y)$，$f'''(x)\in\mathscr{B}(X\times X\times X\to Y)$，$\cdots$，$f^{(n)}(x)\in\mathscr{B}(\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n\text{个}}\to Y)$。当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=h$ 时，$f^{(n)}(x)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f^{(n)}(x)(h,h,\cdots,h)$，简记为 $f^{(n)}(x)h^n$。

定理 2.4.12　设 $f:D\to R^1$(D 为 X 中开集)是 D 上的泛函，$l=\{x\mid x=x_0+th,0\leqslant t\leqslant 1,x_0,h\in X\}\subset D$。设在 l 上每一点处，f 是 $n+1$ 阶 F-可微的，则存在 $0<\theta<1$，使下面的 Taylor 公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1} \tag{2.4.26}$$

成立。

证 考察函数 $\varphi(t)=f(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$。易知 $\varphi'(t)=f'(x_0+th)h$，$\varphi''(t)=f''(x_0+th)h^2$，…，$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}$，$0\leqslant t\leqslant 1$。由数学分析中的 Taylor 公式知，存在 $0<\theta<1$，使

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta) \tag{2.4.27}$$

此即式(2.4.26)。证毕。

定理 2.4.13 设 $f:D\to Y$（D 为 X 中开集），$l=\{x\mid x=x_0+th,0\leqslant t\leqslant 1,x_0,h\in X\}\subset D$。设在 l 上每一点处，f 是 $n+1$ 阶 F-可微的，则存在 $0<\theta<1$，使

$$\| f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\| f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\| \tag{2.4.28}$$

证 令 $z_0=f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n$，可设 $z_0\neq\theta$（否则式(2.4.28)显然成立）。由 Hahn-Banach 定理知，$\exists g\in Y^*$，使 $\|g\|=1$ 且 $g(z_0)=\|z_0\|$。考察函数 $\varphi(t)=gf(x_0+th)$，$0\leqslant t\leqslant 1$。易知 $\varphi'(t)=gf'(x_0+th)h$，$\varphi''(t)=gf''(x_0+th)h^2$，…，$\varphi^{(n+1)}(t)=gf^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}$。由 Taylor 公式知，存在 $0<\theta<1$，使式(2.4.27)成立，即

$$g(z_0)=\frac{1}{(n+1)!}gf^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}$$

由此知

$$\|z_0\|=g(z_0)\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\|g\|\;\|f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|=\frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}\|$$

此即式(2.4.28)。证毕。

由式(2.4.26)，式(2.4.28)可以看出，它们分别是中值公式(2.4.9)和(2.4.10)的推广。

2.4.5 隐函数定理与反函数定理

隐函数定理是数学分析中的重要定理之一，它有许多重要的应用。下面我们把它推广到算子方程中去。

设 X,Y,Z 是 Banach 空间，D 为乘积空间 $X\times Y$ 中的一个开集。$F:D\to Z$ 映射，$(x_0,y_0)\in D$。如果 $F(x,y_0)$（或 $F(x_0,y)$）在 $x_0(y_0)$ 处对 x（或对 y）的 F-导算子存在，则称它为**对 x（或对 y）的偏导算子**，记作 $F'_x(x_0,y_0)$（或 $F'_y(x_0,y_0)$）。如果 F 在 D 内每一点对 x（或对 y）的 F-导算子都存在，则确定了一个 **F 对 x（或对 y）的 F-导映射** $F'_x(x,y)$（或 $F'_y(x,y)$）。

下面来证明著名的隐函数定理。

定理 2.4.14（隐函数定理） 设 X,Y,Z 是实 Banach 空间，U,V 分别是 $x_0\in X$，$y_0\in Y$ 的邻域。假设 $F:U\times V\to Z$ 连续，$F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x,y)$ 在 $U\times V$ 上存在且 $F'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0)

处连续。又设 $F'_y(x_0,y_0)$ 是 Y 到 Z 的线性同胚，则存在开球 $B(x_0,r)\subset U$，$B(y_0,\delta)\subset V$ 和惟一的连续算子 $f:B(x_0,r)\to B(y_0,\delta)$，使得 $f(x_0)=y_0$ 且 $F(x,f(x))=0(x\in B(x_0,r))$。

证 不失一般性，可设 $x_0=0$，$y_0=0$，这是因为一般情形可经过平移化为这种情形。由 Banach逆算子定理，$[F'_y(0,0)]^{-1}$ 存在且为线性有界算子。对于给定的 U 中的 x，定义算子

$$A(x,y)=-[F'_y(0,0)]^{-1}F(x,y)+y$$

显然，存在惟一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$ 等价于 $A(x,y)$ 有不动点。

因为 $A'_y(0,0)=0$ 及 $A'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续，故存在 $\delta>0$ 及 $\eta(<1)>0$，使得在 $\bar{B}(0,\delta)\times\bar{B}(0,\delta)\subset U\times V$ 上，有 $\|A'_y(x,y)\|\leqslant\eta$。于是当 $x\in\bar{B}(0,\delta)$，$y,\bar{y}\in\bar{B}(0,\delta)$ 时，有

$$\|A(x,y)-A(x,\bar{y})\|\leqslant\eta\|y-\bar{y}\| \tag{2.4.29}$$

因为 $F(x,0)$ 连续，$F(0,0)=0$ 及 $\|(F'_y(0,0))^{-1}\|$ 是定数，故存在 $r\leqslant\delta$，使得当 $x\in B(0,r)$ 时，有

$$\|A(x,0)\|=\|-(F'_y(0,0))^{-1}F(x,0)\|<(1-\eta)\delta$$

于是由式(2.4.29)和上式知，当 $x\in B(0,r)$ 时，有

$$\|A(x,y)\|\leqslant\|A(x,y)-A(x,0)\|+\|A(x,0)\|\leqslant$$
$$\eta\|y\|+\|A(x,0)\|<\eta\delta+(1-\eta)\delta=\delta$$

即对固定的 $x\in B(0,r)$，$A(x,y):\bar{B}(0,\delta)\to B(0,\delta)$，由压缩映像原理得，$A(x,y)$ 在 $\bar{B}(0,\delta)$ 内有惟一不动点 $y=f(x)$，$F(x,f(x))=0(x\in B(0,r))$。

下面证 $y=f(x)$ 在 $B(0,r)$ 内连续。任取 $x_1,x_2\in B(0,r)$，令 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$，于是

$$\|y_2-y_1\|=\|A(x_1,y_1)-A(x_2,y_2)\|\leqslant$$
$$\|A(x_2,y_2)-A(x_2,y_1)\|+\|A(x_2,y_1)-A(x_1,y_1)\|<$$
$$\eta\|y_2-y_1\|+\|(F'_y(0,0))^{-1}\|\,\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|$$

于是

$$\|y_2-y_1\|\leqslant\frac{1}{1-\eta}\|(F'_y(0,0))^{-1}\|\,\|F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\|$$

注意到 $(F'_y(0,0))^{-1}$ 为有界算子，$F(x,y)$ 为连续算子，由上式即知当 $x_2\to x_1$ 时，$y_2\to y_1$，即 $f(x_2)\to f(x_1)$，从而 $y=f(x)$ 在 $B(x_0,r)$ 内连续。证毕。

类似于数学分析中的结果，我们还有下面的隐函数可微性定理。

定理 2.4.15 在定理 2.4.14 的条件下，又设 $F'_x(x,y)$，$F'_y(x,y)$ 在 $U\times V$ 上连续，则隐算子 f 在 $B(x_0,r)$ 上连续可微，且

$$f'(x)=-(F'_y(x,f(x)))^{-1}F'_x(x,f(x))$$

这个定理的证明可参看参考文献[9]。

下面给出反函数定理。

定理 2.4.16(反函数定理) 设 X,Y 是实 Banach 空间，D 为 X 中的开集，$x_0\in D$。若算子 $f:D\to Y$ 是 F-可微的，且 $f'(x_0)$ 是 X 到 Y 上的线性同胚，则 f 是从 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 到 $y_0=f(x_0)$ 的某邻域 $V(y_0)$ 的局部同胚。

证 令 $F(x,y)=f(x)-y$，则 $F:D\times Y\to Y$ 连续，并且 $F'_x(x,y)=f'(x)$，$\forall(x,y)\in D\times Y$。由假定可知 $F'_x(x_0,y_0)=f'(x_0)$ 是 X 到 Y 上的线性同胚。根据定理 2.4.14 知，$\exists r>0,\delta>0$，使当 $y\in B(y_0,r)$ 时，方程 $F(x,y)=0$ 在 $B(x_0,\delta)$ 内具有惟一解 $x=\varphi(y)$，并且 $\varphi(y)$ 在 $B(y_0,r)$ 内连续。令 $V(y_0)=B(y_0,r)$，$U(x_0)=\varphi(V(y_0))$。显然 $U(x_0)=f^{-1}(V(y_0))$

$\cap B(x_0,\delta)$。由于 f 连续，从而 $f^{-1}(V(y_0))$ 是 D 中开集，因此 $U(x_0)$ 是 X 中开集，即它为 x_0 的一个邻域。显然 f 是 $U(x_0)$ 到 $V(y_0)$ 的一一映射，并且 f 在 $U(x_0)$ 上连续，$f^{-1}=\varphi$ 在 $V(y_0)$ 上连续，即 f 是 $U(x_0)$ 与 $V(y_0)$ 间的同胚映射。证毕。

例 2.4.6 设 λ_0 是 $A_0\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 的单重特征值，则当 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 充分接近于 A_0 时，A 亦有单重特征值 λ_A，λ_A 充分接近于 λ_0。

证 作函数 $F:\mathbf{C}\times\mathbf{C}^{n\times n}\to\mathbf{C}$ 如下

$$F(\lambda,A)=\det(\lambda I-A)$$

则 $F(\lambda_0,A_0)=0$。因为 λ_0 是 A_0 的特征多项式 $F(\lambda,A_0)$ 的单零点，故 $F_\lambda(\lambda_0,A_0)\neq 0$。由隐函数定理，在 (λ_0,A_0) 的邻域内方程 $F(\lambda,A)=0$ 有连续解 $\lambda=\lambda_A$，λ_A 是 A 的特征值。因 $F_\lambda(\lambda_A,A)\approx F_\lambda(\lambda_0,A_0)\neq 0$，故 λ_A 是 A 的单重特征值。

2.5 拓扑度理论

拓扑度理论是研究非线性算子定性理论的有力工具，用它可以推出许多著名的不动点定理。众所周知，压缩映像原理用来讨论线性算子方程解的存在性和惟一性。但是许多非线性算子方程的解并不惟一，实际问题需要估计解的个数，这时压缩映像原理就无能为力了，而常常要用到拓扑度理论。

本节主要介绍有限维赋范线性空间上的 Brouwer 度和无限维空间上的 Leray - Schauder 度理论，并给出它们的一些应用。

2.5.1 Brouwer 度

我们先定义有限维空间上 C^2 映射的拓扑度，然后用 C^2 映射去逼近连续映射，通过极限过程来定义连续映射的拓扑度。

设映射 $f:\Omega\to\mathbf{R}^n$，Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$p\in\mathbf{R}^n$。我们的目的是要对方程

$$f(x)=p \tag{2.5.1}$$

在 Ω 内解的个数进行估计，并且要求这个估计数在 f 发生微小变化时是不改变的。这里假定式(2.5.1)在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上无解，即 $p\notin f(\partial\Omega)$。我们把方程(2.5.1)在 Ω 内解的估计数记为 $\deg(f,\Omega,p)$。

在给出拓扑度的定义之前，我们先看一个例子。

例 2.5.1 f 是 $[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 上的连续可微函数，由连续函数的介值定理知，只要 $f(a)-p$ 与 $f(b)-p$ 正负相反，则方程(2.5.1)在 (a,b) 内至少有一个解。不过方程(2.5.1)在 (a,b) 内解的个数经小扰动是可能变化的。例如，求 $f(x)=x^2+\varepsilon$，$p=0$，即方程 $x^2+\varepsilon=0$ 在 $(-1,1)$ 内解的个数。当 ε 从负变到 0，再变到正时，方程的解从 2 变到 1 再变到 0。这样 ε 在 0 处的微小变化就引起解的个数的变化。因此，不能简单地把 $\deg(f,(a,b),p)$ 定义为方程(2.5.1)在 (a,b) 内解的个数。

设 x_0 是方程(2.5.1)的解，并且 $f'(x_0)\neq 0$，我们赋予"符号" $\operatorname{sgn} f'(x_0)$，并且把所有这种解的"符号"取代数和，记作

$$\deg(f,(a,b),p)=\sum_{f(x)=p}\operatorname{sgn} f'(x) \tag{2.5.2}$$

则不难验证它经过小扰动是不变的，并且有

$$\deg(f,(a,b),p)=\begin{cases}1, & 当 f(a)<p<f(b)\\ -1, & 当 f(b)<p<f(a)\\ 0, & 当 f(a)-p 与 f(b)-p 同号\end{cases}$$

对于 $n>1$ 的一般情形，由例 2.5.1 知，$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$是由矩阵$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}$确定的线性变换，因此公式(2.5.2)中的 $\mathrm{sgn}\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$应由 $\mathrm{sgn}J_f(\boldsymbol{x})$来代替。这里 $J_f(\boldsymbol{x})$表示 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi 行列式，为

$$J_f(\boldsymbol{x})=\frac{\mathrm{D}(f_1,\cdots,f_n)}{\mathrm{D}(x_1,\cdots,x_n)}=\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|$$

于是，受式(2.5.2)的启发，对于一般 $\mathbf{R}^n$ 的情形，应定义

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sgn}J_f(\boldsymbol{x}^{(i)}) \tag{2.5.3}$$

其中，$\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,2,\cdots,m)$表示方程(2.5.1)在 Ω 内的解。虽然按式(2.5.3)定义拓扑度 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$比较自然和直观，但讨论的步骤要多一些显得繁琐。因此我们宁愿采用比较直接的积分方式去定义，此后我们将发现，这两种定义是等价的。

定义 2.5.1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集，$\boldsymbol{f}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$ 是 C^2 映射(即 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}$，$f_i(x_1,\cdots,x_n)$在 $\bar{\Omega}$ 上具有连续的各二阶偏导数，$i=1,2,\cdots,n$)，$\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\setminus\boldsymbol{f}(\partial\Omega)$。于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。作连续函数 $\Phi:[0,+\infty]\to\mathbf{R}^1$，使它满足下面两个条件：

(1) 存在 σ,η，满足 $0<\sigma<\eta\leqslant\tau$，且使当 $r\notin(\sigma,\eta)$时，恒有 $\Phi(r)=0$；

(2) $\int_{\mathbf{R}^n}\Phi(\|\boldsymbol{y}\|)\mathrm{d}\boldsymbol{y}=1$。

定义 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{p}$ 处关于 Ω 的**拓扑度** $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$为

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|)J_f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.5.4}$$

注：满足定义 2.5.1 中条件(1)、(2)的连续(非负)函数 Φ 是很多的，例如，$\Phi(r)=\frac{1}{\lambda_0}\Phi_0(r)$，其中

$$\Phi_0(r)=\begin{cases}\sin\frac{\pi(r-\sigma)}{\eta-\sigma}, & 当 \sigma\leqslant r\leqslant\eta 时\\ 0, & 当 0\leqslant r<\sigma 及 \eta<r<+\infty 时\end{cases}$$

$\lambda_0=\int_{\mathbf{R}^n}\Phi_0(\|y\|)\mathrm{d}y=S_{n-1}\int_{\sigma}^{\eta}r^{n-1}\sin\frac{\pi(r-\sigma)}{\eta-\sigma}\mathrm{d}r$，$S_{n-1}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位球面积，即 $S_{n-1}=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$。

要证明上述定义的合理性，必须证明按式(2.5.4)定义的 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$与 Φ 的选取无关，同时还要证明 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$为一整数。

定理 2.5.1 (1) 定义 2.5.1 中所定义的拓扑度 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$与函数 Φ 的选取无关；

(2) 定义 2.5.1 中所定义的拓扑度 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$是一个整数，并且当 $\boldsymbol{p}\notin\boldsymbol{f}(N_f)$($N_f=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in\Omega,J_f(\boldsymbol{x})=0\}$)时，有公式

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_f(x_i) \tag{2.5.5}$$

其中，$x_i(1\leqslant i\leqslant m)$为方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}$ 在 Ω 内的解。

这个定理的证明较长，在此略去，有兴趣的读者可参看参考文献[9]或[10]。

注：当 $\boldsymbol{p}\notin f(\bar{\Omega})$时，必有

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}) = 0 \tag{2.5.6}$$

事实上，这时 $\tau_2=\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。取定义 2.5.1 中函数 Φ，使它除了满足定义 2.5.1 中条件(1)和(2)外，还满足当 $r\geqslant\tau_2$ 时，恒有 $\Phi(r)=0$。于是由式(2.5.4)即得式(2.5.6)。式(2.5.6)可视为包含在式(2.5.5)之中，即当 x_i 不存在时，把式(2.5.5)右端理解为零。

下面我们给出几个重要的定理。

定理 2.5.2(Sard 定理) 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射，令 $N_f=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\Omega,J_f(\boldsymbol{x})=0\}$，则 N_f 在映射 $\boldsymbol{f}$ 下的象 $\boldsymbol{f}(N_f)$是 $\mathbf{R}^n$ 中 Lebesgue 测度为零的集。

定理 2.5.3 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$\boldsymbol{f}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，则 $\forall\varepsilon>0$，必存在 $\boldsymbol{g}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{g}\in C^\infty$(即 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，每个 $g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都在 Ω 上具有各阶连续偏导数)，使对一切 $\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}$，都有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\varepsilon$。

定理 2.5.4 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$\boldsymbol{f}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 为 C^2映射，$\boldsymbol{p}\notin f(\partial\Omega)$，$\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|$，则当 $\boldsymbol{g}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 为 C^2 映射，且满足条件$\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\frac{\tau}{7}$时，恒有

$$\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p}) = \deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})。$$

限于篇幅，以上定理证明从略。它们的证明可参阅参考文献[9]或[10]。

注：由定理 2.5.1 和定理 2.5.4 知，定义 2.5.1 可换为下面的等价定义：

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中某有界开集，$\boldsymbol{f}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射，$\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$，于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$，则

(1) 若 $\boldsymbol{p}\notin\boldsymbol{f}(N_f)(N_f=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\Omega,J_f(\boldsymbol{x})=0\})$，则方程(2.5.1)在 Ω 内至多有有限个解，设为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$。这时定义拓扑度为

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}) = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{sgn}J_f(\boldsymbol{x}_i) \tag{2.5.7}$$

(当(2.5.1)在 Ω 内无解时，定义 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=0$)；

(2) 若 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{f}(N_f)$，由定理 2.5.2 知，存在 $\boldsymbol{p}_1\notin\boldsymbol{f}(N_f)$，使 $\|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}\|<\frac{\tau}{7}$。于是由(1)知，$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$有定义。这时，定义

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}) = \deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}_1) \tag{2.5.8}$$

由定理 2.5.4 与定理 2.5.1 易证，$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}_1)$不随 $\boldsymbol{p}_1$ 的选取而变，即若取 $\boldsymbol{p}_2\notin\boldsymbol{f}(N_f)$，$\|\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}\|<\frac{\tau}{7}$，则按式(2.5.7)定义的拓扑度，有 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}_1)=\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p}_2)$。因此，按式(2.5.8)定义的拓扑度 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$是合理的。

下面举一些计算 $\mathbf{R}^n$ 中 C^2 映射拓扑度的例子。

例 2.5.2 设 f 是常算子，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{z}_0\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$。显然 f 是 C^2 映射，并且 $J_f(\boldsymbol{x})\equiv0$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$。于是，对于 $\mathbf{R}^n$ 中任何有界开集 Ω，以及 $\mathbf{R}^n$ 中任何不等于 $\boldsymbol{z}_0$ 的 $\boldsymbol{p}$，由式(2.5.4)知都

有 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=0$。

例 2.5.3　考察 $\mathbf{R}^2$ 中算子 $f(x,y)=(e^x-1,y^2)$ 与 $g(x,y)=(y-x^3,y)$。令 $T_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r\}$，$r>0$。求 $\deg(f,T_r,(0,0))$ 与 $\deg(g,T_r,(0,0))$。

显然 $f:\overline{T}_r\to\mathbf{R}^2$，$g:\overline{T}_r\to\mathbf{R}^2$ 都是 C^2 映射。容易得到 $J_f((x,y))=2ye^x$，$J_g((x,y))=-3x^2$，因此 $J_f((0,0))=J_g((0,0))=0$，即 $(0,0)\in f(N_f)$，$(0,0)\in g(N_f)$。

对任何 $0<\varepsilon<r$，考察算子 $f_\varepsilon(x,y)=(e^x-1,y^2-\varepsilon^2)$。显然 f_ε 是 C^2 映射，并且方程 $f_\varepsilon(x,y)=(0,0)$ 只有两个解 $(0,\varepsilon)$ 与 $(0,-\varepsilon)$。由此知 $(0,0)\notin f_\varepsilon(N_{f_\varepsilon})$。由定理 2.5.1 中的公式(2.5.5)知，$\deg(f_\varepsilon,T_r,(0,0))=1-1=0$。再由定理 2.5.4 知，当 ε 充分小时，$\deg(f_\varepsilon,T_r,(0,0))=\deg(f,T_r,(0,0))$。因此 $\deg(f,T_r,(0,0))=0$。

同样，$\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，考察算子 $g_\varepsilon(x,y)=(y-x^3+\varepsilon^2x,y)$，可得到 $\deg(g_\varepsilon,T_r,(0,0))=-1$。再由定理 2.5.4 知，当 ε 充分小时，$\deg(g,T_r,(0,0))=\deg(g_\varepsilon,T_r,(0,0))=-1$。

当然，逼近映射 f_ε，g_ε 的取法是很多的。例如，可将 f 的逼近映射取成 $f_\varepsilon^*(x,y)=(e^x-1,y^2-\varepsilon y)$。这时方程 $f_\varepsilon^*(x,y)=(0,0)$ 只有两个解 $(0,0)$ 与 $(0,\varepsilon)$。容易算得 $J_\varepsilon^*((x,y))=(2y-\varepsilon)e^x$，故 $J_\varepsilon^*((0,0))=-\varepsilon<0$，$J_\varepsilon^*((0,\varepsilon))=\varepsilon>0$，于是由公式(2.5.5)知 $\deg(f_\varepsilon^*,T_r,(0,0))=-1+1=0$，从而当 ε 充分小时，有 $\deg(f,T_r,(0,0))=\deg(f_\varepsilon^*,T_r,(0,0))=0$，此与前面 f_ε 所获结果一致。

下面我们把 C^2 映射的拓扑度推广到一般的连续映射，从而得到 Brouwer 度的概念。

定义 2.5.2　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个有界开集，$\boldsymbol{f}:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，$\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\setminus\boldsymbol{f}(\partial\Omega)$。于是 $\tau=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。令

$$T=\{\boldsymbol{g}\mid\boldsymbol{g}:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n\text{ 是 }C^2\text{ 映射，且}\max_{x\in\overline{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\tau\}\tag{2.5.9}$$

由定理 2.5.3 知 T 非空。对于 $\boldsymbol{g}\in T$，有 $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|\geqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|-\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|>0$，因此 $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\setminus\boldsymbol{g}(\partial\Omega)$，$\forall\boldsymbol{g}\in T$，从而 $\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p})$ 有意义。规定 **$\boldsymbol{f}$ 关于区域 $\boldsymbol{\Omega}$ 对点 $\boldsymbol{p}$ 的 Brouwer 度** $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$ 为

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p}),\quad\forall\boldsymbol{g}\in T\tag{2.5.10}$$

定义中满足条件(2.5.9)的 $\boldsymbol{g}$ 是很多的，要使定义 2.5.10 是合理的，必须证明：当 $\boldsymbol{g}_1\in T$，$\boldsymbol{g}_2\in T$ 时，恒有 $\deg(\boldsymbol{g}_1,\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g}_2,\Omega,\boldsymbol{p})$。

事实上，令 $\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})=(1-t)\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})+t\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})$，$0\leqslant t\leqslant1$。显然，$\boldsymbol{h}_t:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射。由于

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})\|&=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-(1-t)\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-t\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\|\leqslant\\&(1-t)\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})\|+t\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\|\end{aligned}$$

从而 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})\|<\tau$，因此 $\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n\setminus\boldsymbol{h}_t(\partial\Omega)$。故按定义 2.5.2，$\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})(0\leqslant t\leqslant1)$ 有定义。由于 $\|\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}_{t'}(\boldsymbol{x})\|=|t-t'|\cdot\|\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\|$，故 $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{h}_{t'}(\boldsymbol{x})\|=M|t-t'|$，其中 $M=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x})\|$。根据定理 2.5.4，对于每个 $t'\in[0,1]$，都存在以 t' 为中心的某小开区间，当 t 在此小开区间中时，$\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 保持不变。由此，根据有限覆盖定理知，对一切 $t\in[0,1]$，$\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 均取相同的数值，故

$$\deg(\boldsymbol{h}_0,\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{h}_1,\Omega,\boldsymbol{p})$$

由此，所证结论成立。

当 Ω 为空集时，若 $\boldsymbol{f}$ 是 C^2 映射，则按定义 2.5.1 中的式(2.5.4)，$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})$ 应理解为 0；从而，若 $\boldsymbol{f}$ 为连续映射，按定义 2.5.2，也应理解为 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=0$。

下面讨论 Brouwer 度的一些性质。

定理 2.5.5 Brouwer 度具有下列基本性质：

(1) **正规性**。$\deg(\boldsymbol{I},\Omega,\boldsymbol{p})=1,\forall \boldsymbol{p}\in\Omega$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是恒等映射，即 $\boldsymbol{Ix}=\boldsymbol{x},\forall \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$；

(2) **可加性**。设 Ω_1,Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集，并且 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{f}(\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$，则

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{f},\Omega_1,\boldsymbol{p})+\deg(\boldsymbol{f},\Omega_2,\boldsymbol{p})$$

(3) **同伦不变性**。设 $\boldsymbol{H}:[0,1]\times\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，令 $\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})$，若 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{h}_t(\partial\Omega),\forall 0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 保持常数（对于 $0\leqslant t\leqslant 1$）；

(4) **可解性(Kronecker 存在定理)**。若 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})\neq 0$，则存在 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{p}$；

(5) **切除性**。设 Ω_0 为 Ω 的开子集，并且 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{f}(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)$，则 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{f},\Omega_0,\boldsymbol{p})$；

(6) 若 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega)$，则 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{p},\Omega,\boldsymbol{0})$，其中 $\boldsymbol{f}-\boldsymbol{p}$ 表映射 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}$，$\boldsymbol{0}\in\mathbf{R}^n$。

证 (1) 由于 $J_I(\boldsymbol{x})\equiv 1$，故由式(2.5.5)即得(1)。

(2) 由于 $\bar{\Omega}_0=\bar{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是有界闭集，故 $2\tau_0=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_0}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_0}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。取 C^2 映射 $\boldsymbol{g}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，使 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_0}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\tau_0$。于是，$\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_0}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>\tau_0$，并且根据定义 2.5.2 知

$$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p}),\deg(\boldsymbol{f},\Omega_1,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g},\Omega_1,\boldsymbol{p}),\deg(\boldsymbol{f},\Omega_2,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g},\Omega_2,\boldsymbol{p})$$

选取 Φ 满足定义 2.5.1 并且当 $x\geqslant\tau_0$ 时，恒有 $\Phi(x)=0$，于是

$$\begin{aligned}\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})&=\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|)J_g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\\&\left(\int_{\bar{\Omega}_1}+\int_{\bar{\Omega}_2}+\int_{\bar{\Omega}_0}\right)\Phi(\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|)J_g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\\&\left(\int_{\bar{\Omega}_1}+\int_{\bar{\Omega}_2}\right)\Phi(\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|)J_g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\\&\deg(\boldsymbol{g},\Omega_1,\boldsymbol{p})+\deg(\boldsymbol{g},\Omega_2,\boldsymbol{p})\end{aligned}$$

由此即得(2)。

(3) 由假定知 $\tau=\min\limits_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,1]\times\partial\Omega}\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。取 C^2 映射 $\boldsymbol{G}:[0,1]\times\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，使 $\max\limits_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,1]\times\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})\|<\tau$。令 $\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$，则 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{g}_t(\partial\Omega),0\leqslant t\leqslant 1$，并且由定义 2.5.2，有

$$\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g}_t,\Omega,\boldsymbol{p}),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

由 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $[0,1]\times\bar{\Omega}$ 的一致连续性知，对任何 $0\leqslant t_0\leqslant 1$，有 $\lim\limits_{t\to t_0}\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{g}_t(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}_{t_0}(\boldsymbol{x})\|=0$。于是，由定理 2.5.4 知，对每个 $t_0\in[0,1]$，存在以 t_0 为中心的小开区间，使当 t 在其中时，$\deg(\boldsymbol{g}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 不变。由此，利用有限覆盖定理知，对于一切 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\deg(\boldsymbol{g}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 都保持不变，从而证明了 $\deg(\boldsymbol{h}_t,\Omega,\boldsymbol{p})$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内保持不变。

(4) 假定 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}$ 在 Ω 内无解，于是 $\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{f}(\bar{\Omega})(\boldsymbol{p}\notin \boldsymbol{f}(\partial\Omega))$，从而 $2\tau_0=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>0$。取 C^2 映射 $\boldsymbol{g}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$，使 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\|<\tau_0$，从而 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|>\tau_0$。由定义 2.5.2 知，$\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p})$。取定义 2.5.1 中的函数 Φ，使当 $r>\tau_0$ 使 $\Phi(r)=0$，从而 $\deg(\boldsymbol{g},\Omega,\boldsymbol{p})=\int_{\bar{\Omega}}\Phi(\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|)J_g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$，由此我们推出 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{p})=0$，此与假设

矛盾。

(5) 由可加性，知 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p)+\deg(f,\Omega\backslash\bar{\Omega}_0,p)$。由于 $p\notin f(\bar{\Omega}\backslash\Omega_0)$，$\bar{\Omega}\backslash\Omega_0=\overline{\Omega\backslash\bar{\Omega}}$。故由(4)知 $\deg(f,\Omega\backslash\bar{\Omega}_0,p)=0$，由此即得 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p)$。

(6) 根据定义 2.5.1 中式(2.5.4)及定义 2.5.2，显然(6)成立。证毕。

定理 2.5.6 Brouwer 度还有下列性质：

(1) **边界值性质**。$\deg(f,\Omega,p)$ 只与 f 在 $\partial\Omega$ 上的值有关，即：若 f,g 都是映 $\bar{\Omega}$ 入 $\mathbf{R}^n$ 的连续映射，$p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$，并且当 $x\in\partial\Omega$ 时恒有 $f(x)=g(x)$，则必有 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(g,\Omega,p)$。

(2) **连通分支性质**。当 p 在 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的连通分支中变动时，$\deg(f,\Omega,p)$ 保持不变，即：若 $p_1,p_2\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的同一连通分支，那么 $\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2)$。

(3) **缺方向性质**。若存在 $y_0\in\mathbf{R}^n$，$y_0\neq 0$，使 $x\in\partial\Omega$，$\tau\geqslant 0$ 时 $f(x)\neq p+\tau y_0$，那么必有 $\deg(f,\Omega,p)=0$。

(4) **降维性质**。若 f 映 $\bar{\Omega}$ 入 $\mathbf{R}^n$ 的低维子空间 $\mathbf{R}^m(m<n)$，则对 $\forall p\in\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$，都有 $\deg(f,\Omega,p)=0$。

定理 2.5.6 的证明，请读者自己给出，这里从略。

定义 2.5.3 设 $f:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，$x_0\in\Omega$ 是 f 的孤立零点，即 $f(x_0)=\mathbf{0}$，且存在 $\delta>0$，使当 $\|x-x_0\|<\delta$，$x\neq x_0$ 时，恒有 $f(x)\neq\mathbf{0}$。根据切除性质易知，对于含于球 $B(x_0,\delta)=\{x|\ \|x-x_0\|<\delta\}$ 内且含有点 x_0 的任何区域 ω，Brouwer 度 $\deg(f,\omega,0)$ 都取相同的数值。此数值叫做 **f 的零点 x_0 的指数**，记为 $\mathrm{ind}(f,x_0)$ 即

$$\mathrm{ind}(f,x_0)=\deg(f,\omega,0),\ \forall x_0\in B(x_0,\delta) \tag{2.5.11}$$

定理 2.5.7 设 $f:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，又设 $f(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上没有零点，且在 Ω 内只有有限个零点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，则有指数公式 $\deg(f,\Omega,0)=\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{ind}(f,x_i)$。

证 对 x_i，取 ω_i 充分小，使诸 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 互不相交，且均含于 Ω 内。于是 f 在 $\Omega\backslash(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\omega_i)$ 上没有零点。由可加性及式(2.5.11)得

$$\deg(f,\Omega,\mathbf{0})=\sum_{i=1}^{m}\deg(f,\omega_i,\mathbf{0})=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{ind}(f,x_i)$$

定理 2.5.8 设 $f:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是 C^1 映射，$x_0\in\Omega$。若 $f(x_0)=\mathbf{0}$，$J_f(x_0)\neq 0$，则 x_0 是 f 的孤立零点，并且

$$\mathrm{ind}(f,x_0)=\mathrm{ind}(f'(x_0),\mathbf{0})=\mathrm{sgn}J_f(x_0)=\mathrm{sgn}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=(-1)^{\beta}$$

其中，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为线性算子 $f'(x_0):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的全部特征值(按代数重数计算)，β 为这些特征值中满足 $\lambda_i<0$ 的个数。

证 由反函数定理知 x_0 是 f 的孤立零点。由 $\deg f'(x_0)=J_f(x_0)\neq 0$ 知，有界线性算子 $f'(x_0)$ 是可逆的，从而存在常数 $\alpha>0$，使 $\|f'(x_0)h\|\geqslant\alpha\|h\|$，$\forall h\in\mathbf{R}^n$。取 $r>0$ 充分小，使当 $0\leqslant\|h\|\leqslant r$ 时，有 $f(x_0+h)\neq\mathbf{0}$，$\|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h\|<\alpha\|h\|$。令 $\omega_0=\{h|\ \|h\|<r\}$，$\omega=\{x|\ \|x-x_0\|<r\}$，则当 $h\in\partial\omega_0$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $\|f'(x_0)h+t[f(x_0+h)-f'(x_0)h]\|\geqslant\|f'(x_0)h\|-t\|f(x_0+h)-f'(x_0)h\|>\alpha\|h\|-\alpha\|h\|=0$，由同伦不变性知，$\deg(f'(x_0),\omega_0,\mathbf{0})=\deg(f,\omega,\mathbf{0})$，即 $\mathrm{ind}(f'(x_0),\mathbf{0})=\mathrm{ind}(f,x_0)$。由于 $f'(x_0)$ 是 C^2 映射，

从而

$$\mathrm{ind}(f'(x_0),\mathbf{0}) = \mathrm{sgn}\ \mathrm{deg} f'(x_0) = \mathrm{sgn} J_f(x_0)$$

又

$$\det(f'(x_0) - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

令 $\lambda=0$ 得 $\det f'(x_0)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。去掉正的 λ_i 和复数 λ_i 不影响 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的符号，因此 $\mathrm{sgn}\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = (-1)^{\beta}$。证毕。

最后，我们给出 Brouwer 度的两个重要性质，即乘积定理和简化定理，它们的证明，可参阅参考文献[9]。

定理 2.5.9(乘积定理) 设 $f:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，用 $D_i(i=1,2,\cdots)$ 表示 $\mathbf{R}^n\backslash f(\partial\Omega)$ 的连通分支。设 $g:f(\bar{\Omega})\to\mathbf{R}^n$ 连续，$p\in\mathbf{R}^n\backslash gf(\partial\Omega)$。那么，有下列公式

$$\deg(gf,\Omega,p) = \sum_{D_i\subset f(\Omega)} \deg(f,\Omega,D_i)\cdot\deg(g,D_i,p)$$

并且，当 D_i 有无穷多个时，必存在正整数 i_0，使当 $i>i_0$ 时，恒有 $\deg(g,D_i,p)=0(\forall D_i\subset f(\Omega))$，因此上式右端实际为有限项的和。其中，$\deg(f,\Omega,D_i)=\deg(f,\Omega,y)$，$y\in D_i$。由于 D_i 为连通分支，从而拓扑度 $\deg(f,\Omega,D_i)$ 与 D_i 中 y 的选取无关。

简化定理刻划的是如何将高维空间的拓扑度转化为较低维空间的拓扑度。在后面定义的 Leray - Schauder 度的时候，Brouwer 度的简化定理起了十分重要的作用。

定理 2.5.10(简化定理) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$F:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^m(m<n)$ 连续(其中 $\mathbf{R}^m$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间)。令 $f(x)=x-F(x)$，$\forall x\in\bar{\Omega}$。显然 $f:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续。设 $p\in\mathbf{R}^m\backslash f(\partial\Omega)$，用 g 表示 f 在 $\mathbf{R}^m\cap\bar{\Omega}$ 上的限制。于是，可以给出 $\mathbf{R}^n$ 中 Brouwer 度化为 $\mathbf{R}^m$ 中 Brouwer 度的公式

$$\deg_n(f,\Omega,p) = \deg_m(g,\mathbf{R}^m\cap\Omega,p)$$

2.5.2 Leray - Schauder 度

本小节的目的是把有限维连续映射的拓扑度推广到一般的 Banach 空间中的映射中去。首先，我们考虑的自然是连续映射。但是，对于一般的实 Banach 空间，有例子表明，不可能对所有的连续映射都定义拓扑度，使其具有定理 2.5.5 中的基本性质。这就要求我们是否可以从 Banach 空间的连续映射中分离出一部分性质较好的映射，来定义它的拓扑度。

由定理 2.4.2 知，实 Banach 空间 X 中的全连续算子可用有限维算子来一致逼近。这就启发我们可以用有限维空间中连续映射的拓扑度来定义 Banach 空间中全连续算子的拓扑度，这里当然要求所定义的拓扑度与逼近映射的选择无关。

如何使高维空间上的拓扑度由低维空间上的拓扑度来表示呢？简化定理启发我们应考虑形如 $f(x)=x-F(x)$ 的映射，其中 $F:\bar{\Omega}\to X$ 全连续算子(其中 X 为实 Banach 空间，Ω 为 X 中的有界开集)，令 I 表示 $\bar{\Omega}$ 中的恒等映射，$f=I-F$ 可把高维空间(无穷维空间)上的拓扑度转化为较低维空间(有限维空间)上的拓扑度。由此可得到定义在无穷维空间上拓扑度的基本想法，就是通过有限维空间上的连续映射对 Banach 空间中全连续算子定义拓扑度。

定义 2.5.4 设 X 为实 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 为有界开集。$F:\bar{\Omega}\to X$ 为全连续算子，I 为恒等映射，则称 $f=I-F$ 为**全连续场**。

引理 2.5.1 设 Ω 为实 Banach 空间 X 中的有界开集，$f=I-F:\bar{\Omega}\to X$ 是全连续场，则

(1) f 是固有映射，即任何紧集 $D\subset X$ 的原象 $f^{-1}(D)$ 都是紧集；

(2) f 是闭映射，即任何闭集 $S\subset\bar{\Omega}$ 的象 $f(S)$ 为闭集。

证 (1) 设 $x_n\in f^{-1}(D)$，则 $x_n\in\bar{\Omega}$ 且 $y_n=f(x_n)=x_n-F(x_n)\in D$，由 D 紧及 F 全连续知，存在子列 n_i，使 $y_{n_i}\to y_0\in D, F(x_{n_i})\to z_0\in X$，从而 $x_{n_i}=y_{n_i}+F(x_{n_i})\to y_0+z_0\in\bar{\Omega}$。再根据 F 的连续性知，$y_0=x_0-F(x_0)=f(x_0)$，故 $x_0\in f^{-1}(D)$。因此 $f^{-1}(D)$ 是紧集。

(2) 设 $z_n\in f(S), z_n\to z_0\in X$，要证 $z_0\in f(S)$。存在 $x_n\in S$，使 $z_n=f(x_n)=x_n-F(x_n)$。由 F 全连续，存在子列 $F(x_{n_k})\to y_0\in X$，从而，注意到 S 闭，知 $x_{n_k}=z_{n_k}+F(x_{n_k})\to z_0+y_0=x_0\in S$，再根据 F 的连续性得，$z_0=x_0-F(x_0)=f(x_0)$，故 $z_0\in f(S)$。证毕。

设 X 为实 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 为有界开集，$F:\bar{\Omega}\to X$ 为全连续算子，令 $f(x)=x-F(x)$，$\forall x\in\bar{\Omega}$，即 $f=I-F$。设 $p\in X\backslash f(\partial\Omega)$，由引理 2.5.1 知，$f$ 是闭映射，故 $f(\partial\Omega)$ 是 X 中闭集。因此，$\tau=d(p,f(\partial\Omega))=\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|f(x)-p\|>0$。由定理 2.4.2 知，存在 X 的有限维子空间 $X^{(n)}$（这里 n 与 τ 有关），使 $p\in X^{(n)}$ 及有界连续算子 $F_n:\bar{\Omega}\to X^{(n)}$，使

$$\|F(x)-F_n(x)\|<\tau, \forall x\in\bar{\Omega}$$

考察 $X^{(n)}$ 中的有界开集 $\Omega_n=X^{(n)}\cap\Omega(\partial\Omega_n\subset\partial\Omega)$ 和算子 $f_n(x)=x-F_n(x)$，显然 $f_n:\bar{\Omega}_n\to X^{(n)}$ 连续，且 $p\notin f_n(\partial\Omega_n)$（事实上，当 $x\in\partial\Omega_n\subset\partial\Omega$ 时，$\|f_n(x)-p\|=\|x-F_n(x)-p\|=\|f(x)+F(x)-F_n(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|F(x)-F_n(x)\|>\tau-\tau=0$，所以，$p\notin f_n(\partial\Omega_n)$）。于是 $X^{(n)}$ 中的拓扑度 $\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$ 有意义。

定义 2.5.5 全连续场 f 的 Leray - Schauder 度 $\deg(f,\Omega,p)$ 定义为 $\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$，即

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p) \tag{2.5.12}$$

其中，f_n,Ω_n 的意义如前所述。

要使定义式(2.5.5)合理，必须证明按照上述定义的 $\deg(f,\Omega,p)$ 与空间 $X^{(n)}$ 及算子 F_n 的选择均无关。

定理 2.5.11 按式(2.5.12)定义的拓扑度 $\deg(f,\Omega,p)$ 与 $X^{(n)}$ 及算子 F_n 的选择无关。

证 先证 $X^{(n)}$ 固定时，$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$ 与 F_n 的选择无关。设 $G_n:\bar{\Omega}\to X^{(n)}$ 有界、连续，也满足 $\|F(x)-G_n(x)\|<\tau, \forall x\in\bar{\Omega}$。令 $g_n(x)=x-G_n(x)$。又令 $H(t,x)=tf_n(x)+(1-t)g_n(x)=x-F(x)+t(F(x)-F_n(x))+(1-t)(F(x)-G_n(x)), 0\leqslant t\leqslant 1, x\in\bar{\Omega}_n$，则当 $0\leqslant t\leqslant 1, x\in\partial\Omega$时，有

$$\|H(t,x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-t\|F(x)-F_n(x)\|-(1-t)\|F(x)-G_n(x)\|>$$
$$\tau-t\tau-(1-t)\tau=0$$

故由有限维空间中拓扑度的同伦不变性知

$$\deg_n(g_n,\Omega_n,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$$

再证 $\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$ 与 $X^{(n)}$ 的选取无关。设另取 $X^{(m)}(p\in X^{(m)})$ 及 $F_m, f_m=I-F_m$，需证

$$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)=\deg_m(f_m,\Omega_m,p)$$

用 $X^{(l)}$ 表示 $X^{(n)}$ 与 $X^{(m)}$ 的线性和，则 $X^{(l)}$ 是 X 的有限维子空间，并且 $X^{(n)}\subset X^{(l)}, X^{(m)}\subset X^{(l)}$。令 $\Omega_l=X^{(l)}\cap\Omega$，则 $f_n:\bar{\Omega}_l\to X^{(l)}$。由简化定理知 $\deg_l(f_n,\Omega_l,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$。同理还有 $\deg_l(f_m,\Omega_l,p)=\deg_m(f_m,\Omega_m,p)$。由于当 $X^{(n)}$ 固定时，$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$ 与 F_n（从而 f_n）的选择无关，故 $\deg_l(f_n,\Omega_l,p)=\deg_l(f_m,\Omega_l,p)$。于是，$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)=\deg_m(f_m,\Omega_m,p)$。证毕。

下面的定理表明全连续场的 Leray - Schauder 度保持有限维空间中 Brouwer 度的基本性质。

定理 2.5.12 Leray - Schauder 度具有下列基本性质：

(1) 正规性：$\deg(I,\Omega,p)=1,\ \forall p\in\Omega$；

(2) 可加性：设 Ω_1,Ω_2 是 Ω 的两个互不相交的开子集，并且 $p\notin f(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$，那么 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p)$；

(3) 同伦不变性：设 $H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to X$ 全连续，令 $h_t(x)=x-H(t,x)$，若 $p\notin h_t(\partial\Omega)$，$\forall 0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 保持常数（$0\leqslant t\leqslant 1$）；

(4) 可解性（Kronecker 存在定理）：若 $\deg(f,\Omega,p)\neq 0$，则方程 $f(x)=p$ 在 Ω 内必有解；

(5) 切除性：设 Ω_0 是 Ω 的开子集，并且 $p\notin f(\bar{\Omega}\setminus\Omega_0)$，则 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_0,p)$；

(6) 若 $p\notin f(\partial\Omega)$，则 $\deg(f,\Omega,p)=\deg(f-p,\Omega,0)$。

证 (1)，(6)是显然的。现证(2)。由于 $\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)$ 是闭集，故 $f(\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$ 是有界闭集，从而 $\tau_0=\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)}\|f(x)-p\|>0$。

作 $X^{(n)}(p\in X^{(n)})$ 与 $F_n:\bar{\Omega}\to X^{(n)}$，使 $\|F(x)-F_n(x)\|<\tau_0,\ \forall x\in\bar{\Omega}$。令 $f_n=I-F_n$，$\Omega_n=X^{(n)}\cap\Omega,\Omega_n^{(1)}=X^{(n)}\cap\Omega_1,\Omega_n^{(2)}=X^{(n)}\cap\Omega_2$。则由定义 2.5.5 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p)$$
$$\deg(f,\Omega_1,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n^{(1)},p)$$
$$\deg(f,\Omega_2,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n^{(2)},p)$$

由于 $\Omega_n^{(1)}\subset\Omega_n,\Omega_n^{(2)}\subset\Omega_n,\Omega_n^{(1)}\cap\Omega_n^{(2)}=\Phi$，以及 $p\notin f_n(\bar{\Omega}_n\setminus(\Omega_n^{(1)}\cup\Omega_n^{(2)}))$，应用 Brouwer 度的可加性知

$$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)=\deg(f_n,\Omega_n^{(1)},p)+\deg(f_n,\Omega_n^{(2)},p)$$

于是得

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg(f,\Omega_1,p)+\deg(f,\Omega_2,p)$$

再证(3)。首先 $\tau^*=\inf\limits_{(t,x)\in[0,1]\times\partial\Omega}\|h_t(x)-p\|>0$。事实上，若 $\tau^*=0$，则存在 $0\leqslant t_n\leqslant 1$，$x_n\in\partial\Omega$，使 $h_{t_n}(x_n)=x_n-H(t_n,x_n)\to p(n\to\infty)$。再由 H 的全连续性知，存在子列 $H(t_{n_i},x_{n_i})\to z_0\in X$，且 $t_{n_i}\to t_0\in[0,1]$。由此知 $x_{n_i}\to p+z_0=x_0\in\partial\Omega$。再由 H 的连续性得 $x_0-H(t_0,x_0)=p$，此与假设矛盾。由定理 2.4.2 知，存在 X 的有限维子空间 $X^{(n)}(p\in X^{(n)})$ 及连续、有界算子 $G_n:[0,1]\times\bar{\Omega}\to X^{(n)}$，使 $\|H(t,x)-G_n(t,x)\|<\tau^*,\ \forall(t,x)\in[0,1]\times\bar{\Omega}$。令 $g_t(x)=x-G_n(t,x),\Omega_n=X^{(n)}\cap\Omega$。于是由定义 2.5.5 知 $\deg(h_t,\Omega,p)=\deg_n(g_t,\Omega_n,p)$。由前面证明知，当 $x\in\partial\Omega_n,0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $\|g_t(x)-p\|\geqslant\|h_t(x)-p\|-\|H(t,x)-G_n(t,x)\|>0$，故 $p\notin g_t(\partial\Omega),0\leqslant t\leqslant 1$。于是由 Brouwer 度的同伦不变性知，$\deg_n(g_t,\Omega_n,p)$ 保持常数，从而 $\deg(h_t,\Omega,p)$ 保持常数（$0\leqslant t\leqslant 1$）。

再证(4)。用反证法。假如 $f(x)=p$ 在 Ω 内无解，于是 $p\notin f(\bar{\Omega})$（$p\notin f(\partial\Omega)$ 是预先假定的）。由引理 2.5.1 知，$f(\bar{\Omega})$ 是 X 中闭集，故 $\tau_*=\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}}\|f(x)-p\|>0$。取 X 的有限维子空间 $X^{(n)}(p\in X^{(n)})$ 及连续，有界算子 $F_n:\bar{\Omega}\to X^{(n)}$，使 $\|F(x)-F_n(x)\|<\tau_*,\ \forall x\in\bar{\Omega}$。令 $f_n=I-F_n,\Omega_n=E^{(n)}\cap\Omega$，由定义 2.5.5 知

$$\deg(f,\Omega,p)=\deg_n(f_n,\Omega_n,p) \tag{2.5.13}$$

但当 $x\in\bar{\Omega}_n\subset\bar{\Omega}$ 时，有 $\|f_n(x)-p\|\geqslant\|f(x)-p\|-\|F(x)-F_n(x)\|>0$，故 $p\notin f_n(\bar{\Omega}_n)$。于是，由 Brouwer 度的 Kronecker 定理知，$\deg_n(f_n,\Omega_n,p)=0$。由式(2.5.13)知，$\deg(f,\Omega,p)=0$，此与假定矛盾。

至于(5)的证明，与定理 2.5.5 中(5)的证明完全一样，从略。

类似于 Brouwer 度，我们有下面的结果。

定理 2.5.13 Leray - Schauder 度具有下列性质：

(1) **边界值性质**。$\deg(f,\Omega,p)$只与 f 在$\partial\Omega$ 上的值有关，即：若 f,g 都是 $\bar{\Omega}$ 上的全连续场，$p\in X\backslash f(\partial\Omega)$，并且当 $x\in\partial\Omega$ 时，恒有 $f(x)=g(x)$，则必有 $\deg(f,\Omega,p) = \deg(g,\Omega,p)$。

(2) **连通分支性质**。当 p 在 $X\backslash f(\partial\Omega)$的连通分支中变动时，$\deg(f,\Omega,p)$保持不变，即：若 p_1,p_2 属于 $X\backslash f(\partial\Omega)$的同一连通分支，那么 $\deg(f,\Omega,p_1)=\deg(f,\Omega,p_2)$。

(3) **缺方向性质**。若存在 $y_0\in X,y_0\neq 0$，使 $x\in\partial\Omega,\tau\geqslant 0\Rightarrow f(x)\neq p+\tau y_0$，那么必有 $\deg(f,\Omega,p)=0$。

设 $f=I-F:\bar{\Omega}\to X$ 是全连续场，$x_0\in\Omega$ 是 f 的孤立零点。与定义 2.5.3 完全一样，按式(2.5.11)引入 f 在零点 x_0 处的指数 $\mathrm{ind}(f,x_0)$的概念，并可得到相应结果。

定理 2.5.14 设 $f=I-F:\bar{\Omega}\to X$ 是全连续场，又设 f 在$\partial\Omega$ 上没有零点，且在 Ω 内只有有限个零点 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，则有指数公式 $\deg(f,\Omega,0) = \sum_{i=1}^{m}\mathrm{ind}(f,x_i)$。

定理 2.5.15 设 D 是 X 中的开集，$A:D\to X$ 全连续，$x_0\in D,Ax_0=x_0$。又设 A 在 x_0 处 F - 可微，并且 1 不是导算子 $A'(x_0)$的特征值，那么 x_0 必是 A 的孤立不动点，并且指数 $\mathrm{ind}(I-A,x_0)=\mathrm{ind}(I-A'(x_0),0)=(-1)^\beta$，其中 β 表示 $A'(x_0)$的实的大于 1 的全部特征值代数重数之和。

相应于 Brouwer 度的乘积定理，对于 Leray - Schauder 度也有相应的结果。

定理 2.5.16(拓扑度乘积定理) 设 Ω 是 X 中有界开集，$f=I-F:\bar{\Omega}\to X$ 是全连续场，用$\{D_\alpha\}$表示开集 $X\backslash f(\partial\Omega)$的全部连通分支。设 $g=I-G: f(\bar{\Omega})\to X$ 是全连续场，$p\in X\backslash gf(\partial\Omega)$，那么下面的公式成立

$$\deg(gf,\Omega,p) = \sum_{D_\alpha\subset f(\Omega)}\deg(f,\Omega,D_\alpha)\cdot\deg(g,D_\alpha,p)$$

其中，$\deg(f,\Omega,D_\alpha)$表示 $\deg(f,\Omega,y)$，$\forall y\in D_\alpha$；并且当 D_α 有无穷多个时，除有限多个 D_α 外，均有 $\deg(g,D_\alpha,p)=0(D_\alpha\subset f(\Omega))$，因此，上面公式的右端实际上是有限项的和。

定理 2.5.16 的证明，可参看参考文献[9]。

2.5.3 不动点定理及其应用

在 2.1.6 中，我们介绍了一个距离空间中的不动点定理——压缩映射原理，它属于度量不动点定理。这类不动点定理的特点是依赖于空间所用的度量。下面将利用 Brouwer 度和 Leray - Schauder 度，分别建立著名的 Brouwer 不动点定理和 Schauder 不动点定理。它们属于拓扑不动点定理。尽管前者适应于有限维空间，后者是对无穷维空间而言的，但这些定理都断言每一个紧凸集到自身内的连续映射必有不动点。

定理 2.5.17(锐角定理) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$\mathbf{0}\in\Omega$，设 $\boldsymbol{f}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，并且当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ 时，恒有$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})\geqslant 0$，则方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 在 $\bar{\Omega}$ 中必有解。

证 可设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$(否则定理成立)。令 $\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega},0\leqslant t\leqslant 1$。于是，由 $\|\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})\|^2=(\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x}))=(1-t)^2\|\boldsymbol{x}\|^2+2t(1-t)(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})+t^2\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|^2$，根据假定知，当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,0\leqslant t\leqslant 1$ 时，有 $\|\boldsymbol{h}_t(\boldsymbol{x})\|^2>0$，从而 $0\notin\boldsymbol{h}_t(\partial\Omega),0\leqslant t\leqslant 1$。于是，根据 Brou-

wer 度的同伦不变性与正规性，得 $\deg(\boldsymbol{f},\Omega,\boldsymbol{0}) = \deg(\boldsymbol{h}_1,\Omega,\boldsymbol{0}) = \deg(\boldsymbol{h}_0,\Omega,\boldsymbol{0}) = \deg(\boldsymbol{I},\Omega,\boldsymbol{0}) = 1$，于是存在 $x_0\in\Omega$，使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$。证毕。

定理 2.5.18 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界开集，$\boldsymbol{0}\in\Omega$。设 $\boldsymbol{F}:\bar{\Omega}\to\mathbf{R}^n$ 连续，并且当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ 时，恒有

$$(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) \leqslant \|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{2.5.14}$$

那么 $\boldsymbol{F}$ 在 $\bar{\Omega}$ 内必有不动点，即存在 $\boldsymbol{x}_0\in\bar{\Omega}$，使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$。

证 令 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}$，则当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ 时，$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})\geqslant 0$，于是由锐角定理知，存在 $\boldsymbol{x}_0\in\bar{\Omega}$，使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$。证毕。

推论 在定理 2.5.18 中，将条件(2.5.14)换为 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$，则定理 2.5.18 的结论仍成立。

事实上，由 $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x})\leqslant\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\|\,\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2$，$\forall\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$，即知推论成立。

定理 2.5.19(Brouwer 不动点定理) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中某有界凸闭集，$\boldsymbol{F}:D\to D$ 连续，则 $\boldsymbol{F}$ 在 D 上必有不动点。

证 取球 $\Omega=B(0,R)=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n,\|\boldsymbol{x}\|<R\}$，使 $\Omega\supset D$。由定理 2.4.3 知，将 $\boldsymbol{F}$ 延拓为 $\tilde{\boldsymbol{F}}:\bar{\Omega}\to D$ 连续。显然，当 $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ 时，恒有 $\|\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x})\|<R=\|\boldsymbol{x}\|$。应用定理 2.5.18 的推论，存在 $\boldsymbol{x}_0\in\bar{\Omega}$，使 $\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$。由于 $\tilde{\boldsymbol{F}}$ 映 $\bar{\Omega}$ 入 D，故知 $\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}_0)\in D$，从而 $\boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$。证毕。

定理 2.5.20(Rothe 不动点定理) 设 Ω 是实 Banach 空间 X 中有界凸开集，$A:\bar{\Omega}\to X$ 全连续，并且 $A(\partial\Omega)\subset\bar{\Omega}$，则 A 在 $\bar{\Omega}$ 中必有不动点。

证 可设 $Ax\neq x$，$\forall x\in\partial\Omega$；否则，定理已获证。取 $x_0\in\Omega$，令 $h_t(x)=t(x-Ax)+(1-t)(x-x_0)=x-H(t,x)$，其中，$H(t,x)=tAx+(1-t)x_0$。显然 $H:[0,1]\times\bar{\Omega}\to X$ 全连续。下面证明 $0\notin h_t(\partial\Omega)$，$\forall t(0\leqslant t\leqslant 1)$。事实上，若存在 $0\leqslant t_1\leqslant 1$，$x_1\in\partial\Omega$，使 $h_{t_1}(x_1)=0$，即

$$x_1 = t_1Ax_1 + (1-t_1)x_0 \tag{2.5.15}$$

则 $t_1\neq 0$(因 $x_1\neq x_0$)，$t_1\neq 1$(因 $Ax_1\neq x_1$)，故 $0<t_1<1$。因 Ω 是开集，故存在 $r>0$，使球 $B(x_0,r)=\{x\mid\|x-x_0\|<r\}\subset\Omega$。由假定知，$Ax_1\in\bar{\Omega}$，从而存在 $z_0\in\Omega$，使

$$\|z_0 - Ax_1\| < \frac{(1-t_1)r}{t_1} \tag{2.5.16}$$

易知球 $B(t_1z_0+(1-t_1)x_0,(1-t_1)r)\subset\Omega$。这是由于若 $x\in B(t_1,z_0+(1-t_1)x_0,(1-t_1)r)$，则 $x=tz_0+(1-t_1)x_0+(1-t_1)z$，$\|z\|<r$，于是 $x=t_1z_0+(1-t_1)(x_0+z)$。由于 $z_0\in\Omega$，$x_0+z\in\Omega$，Ω 是凸集，故 $x\in\Omega$。

由式(2.5.15)可得

$$x_1 = t_1Ax_1 + (1-t_1)x_0 = t_1z_0 + (1-t_1)x_0 + t_1(Ax_1 - z_0) \tag{2.5.17}$$

由式(2.5.16)有，$\|t_1(Ax_1-z_0)\|<(1-t_1)r$，故由式(2.5.17)知，$x_1\in B(t_1z_0+(1-t_1)x_0,(1-t_1)r)\subset\Omega$，此与 $x_1\in\partial\Omega$ 矛盾。于是 $0\in h_t(\partial\Omega)$，$0\leqslant t\leqslant 1$。根据同伦不变性知，$\deg(I-A,\Omega,0)=\deg(h_1,\Omega,0)=\deg(h_0,\Omega,0)=\deg(I-x_0,\Omega,0)=\deg(I,\Omega,x_0)=1\neq 0$，因此 A 在 Ω 中有不动点。证毕。

定理 2.5.21(Schauder 不动点定理) 设 D 是 X 中的有界闭凸集(D 不一定有内点)，$A:D\to D$ 全连续，则 A 在 D 中必有不动点。

证 取球 $B=\{x\mid\|x\|<R\}(R>0)$，使 $D\subset B$。由定理 2.4.3 知，可将 A 延拓为映 $\bar{B}$ 入 $\overline{\mathrm{co}}A(D)\subset D$ 的全连续算子，于是 $A(\partial B)\subset D\subset\bar{B}$，从而由定理 2.5.20 知，$A$ 在 $\bar{B}$ 中具有不动

点 x^*。由于 $A(\bar{B})\subset D$,故必有 $x^*\in D$。证毕。

定理 2.5.22(Leray - Schauder 不动点定理) 设 $A:X\to X$ 全连续,且集 $\{x\mid x\in X, x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\}$ 是有界的,则 A 在 X 中的闭球 $\bar{B}=\{x\mid \|x\|\leqslant R\}$ 中必有不动点,这里 $R=\sup\{\|x\|\mid x=\lambda Ax, 0<\lambda<1\}$。

证 令 $B_k=\left\{x\mid x\in X, \|x\|<R+\dfrac{1}{k}\right\}$。如果 A 在 ∂B_k 上没有不动点,可令 $h_t(x)=x-tAx$。于是,$0\notin h_t(\partial B_k)(0\leqslant t\leqslant 1)$。由同伦不变性知,$\deg(I-A,B_k,0)=\deg(h_1,B_k,0)=\deg(h_0,B_k,0)=\deg(I,B_k,0)=1\neq 0$,从而 A 在 B_k 中有不动点。

综上所述,对于任何自然数 k,A 在 B_k 中必有不动点 x_k,即 $x_k=Ax_k(k=1,2,\cdots)$,$x_k\in\bar{B}_k$。由 A 的全连续性,存在 $\{x_k\}$ 的子列 $\{x_{k_i}\}$,$Ax_{k_i}\to x^*\in X$,于是 $x_{k_i}=Ax_{k_i}\to x^*$。由于 $\|x_k\|\leqslant R+\dfrac{1}{k}$,得 $\|x^*\|\leqslant R$。根据 A 的连续性,知 $x^*=Ax^*$。证毕。

应强调指出的是,定理 2.5.19 与定理 2.5.21 的惟一不同之处在于:定理 2.5.19 只需算子连续,而定理 2.5.21 则要求算子是全连续的。这说明,至少从不动点的性质来看,全连续算子起着有限维空间中连续算子的作用。

下面给出不动点定理的一些应用。

(1) 在非线性常微分方程中的应用

例 2.5.4 考察常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), & t\in[a,b],\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \boldsymbol{x}(a)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}\tag{2.5.18}$$

证明:若 $\boldsymbol{f}:[a,b]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 连续,且满足 $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|\leqslant M(1+\|\boldsymbol{x}\|)$,$\forall t\in[a,b]$,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,其中 $M>0$ 为某一常数,则问题(2.5.18)必有属于 $C^1[a,b]$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)$,满足 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant[\|\boldsymbol{x}_0\|+M(b-a)]e^{M(b-a)}$,$\forall t\in[a,b]$。

事实上,问题(2.5.18)等价于下列积分方程组

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_a^t\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds$$

的连续解。于是我们只需证明算子 $A\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_a^t\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds$ 在连续函数空间 $C[a,b]$ 中存在不动点。应用定理 2.5.22,分为以下两个步骤进行:

(Ⅰ) 证 A 为全连续算子。

由于 $C[a,b]$ 为 Banach 空间,范数 $\|\boldsymbol{x}\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|\boldsymbol{x}(t)\|$,则 $A:C[a,b]\to C[a,b]$ 为连续算子。

事实上,对任意 $\boldsymbol{x}_k\in C[a,b]$,$\boldsymbol{x}\in C[a,b]$,$t\in[a,b]$,$\|A\boldsymbol{x}(t)-A\boldsymbol{x}_k(t)\|=\left\|\int_a^t(\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_k(s)))ds\right\|\leqslant\int_a^t\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_k(s))\|ds$。由于 $\boldsymbol{f}:[a,b]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 上连续,从而当 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{x}$ 时,$\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_k(s))\|\to 0(k\to 0)$,因此 A 为连续算子。因为连续算子为紧算子,从而 A 为 $C[a,b]$ 中的紧算子。故 $A:C[a,b]\to C[a,b]$ 为全连续算子。

(Ⅱ) 由定理 2.5.22 知,还要证明集合 $\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}(t)\in C[a,b],\boldsymbol{x}(t)=\lambda A\boldsymbol{x}(t),0<\lambda<1\}$ 有界。

设 $\boldsymbol{x}(t)\in C[a,b]$ 满足 $\boldsymbol{x}(t)=\lambda A\boldsymbol{x}(t)$,$0<\lambda<1$。于是 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\|A\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_0\|+$

$M\int_a^t(1+\|\boldsymbol{x}(s)\|)\mathrm{d}s\leqslant\|\boldsymbol{x}_0\|+M(b-a)+M\int_a^t\|\boldsymbol{x}(s)\|\mathrm{d}s$。令 $\varphi(t)=\|\boldsymbol{x}_0\|+M(b-a)+M\int_a^t\|\boldsymbol{x}(t)\|\mathrm{d}s$，则 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varphi(t),t\in[a,b]$。于是 $\varphi'(t)=M\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\varphi(t)$。取 $g(t)=\varphi(t)\mathrm{e}^{-Mt}$，则 $g'(t)=\varphi'(t)\mathrm{e}^{-Mt}-\varphi(t)\mathrm{e}^{-Mt}M=M\|x(t)\|\mathrm{e}^{-Mt}-\varphi(t)\mathrm{e}^{-Mt}M\leqslant M\mathrm{e}^{-Mt}(\varphi(t)-\varphi(t))=0$，因此 $\varphi(t)\mathrm{e}^{-Mt}$ 为$[a,b]$上的减函数。所以 $\varphi(t)\mathrm{e}^{-Mt}\leqslant\varphi(a)\mathrm{e}^{-Ma}$，$\forall t\in[a,b]$，即 $\varphi(t)\leqslant\varphi(a)\mathrm{e}^{Mt-Ma}\leqslant\varphi(a)\mathrm{e}^{M(b-a)}$。于是 $\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(a)\mathrm{e}^{M(b-a)}=(\|\boldsymbol{x}_0\|+M(b-a))\mathrm{e}^{M(b-a)}\triangleq M_0$，所以 $\|\boldsymbol{x}\|=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M_0$，即集合$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}(t)\in C[a,b],\boldsymbol{x}(t)=\lambda A\boldsymbol{x}(t),0<\lambda<1\}$有界，所以算子 A 在 $C[a,b]$中有不动点。

(2) 在非线性积分方程上的应用

例 2.5.5 考虑含小参数的非线性积分方程

$$x(s)=\mu\int_a^b F(s,t,x(t))\mathrm{d}t+\int_a^b G(s,t,x(t))\mathrm{d}t+\alpha g(s) \tag{2.5.19}$$

这里 F,G 和 g 均为已知连续函数，μ,α 为实参数。如果 $G(s,t,x)=0$，则方程(2.5.19)退化为通常的 Urysohn 方程，记 $Q=\{(s,t,x)\in\mathbf{R}^3\mid a\leqslant s,t\leqslant b,|x|\leqslant r_0\}$。设函数 $F(s,t,x)$和 $G(s,t,x)$在 Q 上连续，$g(s)$在$[a,b]$上连续，且存在 $\rho>1$ 和 $K>0$，使$|G(s,t,x)|\leqslant K|x|^\rho$，当$(s,t,x)\in Q$，则存在 $\mu_0,\alpha_0>0$，使当$|\mu|\leqslant\mu_0$，$|\alpha|\leqslant\alpha_0$ 时，方程组(2.5.19)有解。

事实上，作算子

$$Tx(s)=\mu\int_a^b F(s,t,x(t))\mathrm{d}t+\int_a^b G(s,t,x(t))\mathrm{d}t+\alpha g(s)$$

由例 2.4.3 知，上式右端的每个积分算子都是全连续算子，因此 T 为全连续算子。要使方程(2.5.19)有解，由 Schauder 定理，还要证明 $T:\bar{B}(0,r)\to\bar{B}(0,r)$。

因为 $\rho>1$，可取 $0<r<1$，使$(b-a)Kr^\rho<\frac{r}{2}$，于是对任何 $x\in\bar{B}(0,r)\subset C[a,b]$，有

$$\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b G(s,t,x(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant(b-a)Kr^\rho\leqslant\frac{r}{2}$$

由于函数 F 在有界闭集 Q 上连续，g 在$[a,b]$上连续，所以它们都是有界的。因而存在 $\mu_0>0$，$\alpha_0>0$，使当$|\mu|<\mu_0$，$|\alpha|<\alpha_0$ 时，有 $\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\mu\int_a^b F(s,t,x(t))\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{r}{4}$，$\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}|\alpha g(s)|\leqslant\frac{r}{4}$。于是 $\|Tx\|=\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}|T(x(s))|\leqslant\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\mu\int_a^b F(s,t,x(t))\mathrm{d}t\right|+\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\int_a^b G(s,t,x(t))\mathrm{d}t\right|+\max\limits_{a\leqslant s\leqslant b}|\alpha g(s)|\leqslant\frac{r}{4}+\frac{r}{2}+\frac{r}{4}=r$，所以 $Tx\in\bar{B}(0,r)$，即算子 $T:\bar{B}(0,r)\to\bar{B}(0,r)$。

应用 Schauder 不动点定理，方程(2.5.19)有解。

习　题

1. 设 $C^\infty[a,b]$是区间$[a,b]$上无限次可微函数的全体，定义

$$\rho(f,g)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\frac{|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}{1+|f^{(r)}(t)-g^{(r)}(t)|}$$

证明：$C^\infty[a,b]$按 $\rho(f,g)$为一距离空间。

2. 证明 Cauchy 列是有界的。

3. 证明完备距离空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一距离空间中完备子空间是闭的子集。

4. 证明列紧集的闭包必是自列紧集。

5. 设 T 为完备距离空间 X 到 X 的映射，若在开球 $B(x_0,r)(r>0)$ 内适合 $\rho(Tx,Tx')<\theta\rho(x,x')$，$0<\theta<1$，又 T 在闭球 $\overline{B}(x_0,r)=\{x|\rho(x,x_0)\leqslant r\}$ 上连续，且 $\rho(x_0,Tx_0)\leqslant\theta(1-\theta)r$。证明：$T$ 在 $\overline{B}(x_0,r)$ 中有惟一不动点。

6. 设 M_0 是$[a,b]$上有界函数的全体，线性运算的定义与 $C[a,b]$中的相同。在 M_0 中定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$。求证 M_0 是 Banach 空间。

7. 证明 l^p 为可分的 Banach 空间。

8. 设 l^∞ 为一切有界数列组成的集，线性运算与 l^p 相同，在 l^∞ 中令 $\|x\|=\sup\limits_{n\geqslant1}|\xi_n|$，其中 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}\in l^\infty$，则 l^∞ 为不可分的 Banach 空间。

9. 设无穷矩阵 $(a_{ij})(i,j=1,2,\cdots)$ 满足$\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<\infty$。作 l^∞ 到 l^∞ 中算子如下：

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\quad y=(\eta_1,\eta_2,\cdots),\quad Tx=y$$

则

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,i=1,2,\cdots$$

证明：$\|T\|=\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$。

10. 设 X 是 n 维向量空间，在 X 中取一组基 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$，$(t_{\mu\nu})$ 是 $n\times n$ 矩阵，作 X 到 X 中算子 T 如下：当 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{\nu=1}^{n}x_\nu\boldsymbol{e}_\nu$ 时，$y=T\boldsymbol{x}=\sum\limits_{\mu=1}^{n}y_\mu\boldsymbol{e}_\mu$，其中 $y_\mu=\sum\limits_{\mu=1}^{n}t_{\mu\nu}x_\nu$，$\mu=1,2,\cdots,n$。若规定向量$\boldsymbol{x}$ 的范数为 $\|\boldsymbol{x}\|=\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，证明上述算子的范数满足

$$\max_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\|T\|\leqslant\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|t_{\mu\nu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

11. 作 $l^p(1<p<\infty)$中算子如下：当 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$ 时，$T\boldsymbol{x}=(y_1,y_2,\cdots)$，其中 $y_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}t_{nm}x_m$，$n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}|t_{nm}|^q\right)^{\frac{p}{q}}<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。证明：$T$ 是有界线性算子。

12. 设 $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为一有界线性算子，求 A^*。

13. 设$\{x_n\}$为 Banach 空间 X 中的一个点列，如果对于每个 $f\in X^*$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<\infty$，则必存在正数 u，使对一切 $f\in X^*$，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\leqslant u\|f\|$。

14. 证明：全连续线性算子的线性组合仍为全连续线性算子。

15. 证明：全连续线性算子与有界线性算子的复合是全连续线性算子。

16. 证明定理 2.2.21。

17. 设 X 为复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，μ_0 是 T^n 的特征值，则 μ_0 的 n 次方根至少有一个是 T 的特征值。

18. 设 X 为复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X)$，则 $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\|R_\lambda(T)\|=0$。

19. 设 X 为复 Banach 空间，$T_n,T\in\mathscr{B}(X)$，$\|T_n-T\|\to 0$。若 $\lambda\in\rho(T)$，则当 n 足够大时，$\lambda\in\rho(T_n)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda I-T_n)^{-1}=(\lambda I-T)^{-1}$。

20. 对于 $T:l^2\to l^2$，$T(x_1,x_2,x_3,\cdots)=\left(x_1,\dfrac{x^2}{2},\dfrac{x^3}{3},\cdots\right)$，证明：$\sigma_p(T)=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$。

21. 设 T 为复内积空间 X 上的有界线性算子，那么 $T=0$ 的充要条件是对一切 $x\in X$，成立 $(Tx,x)=0$。

22. 证明：$\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin nt;n\in N\right\}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 中的标准正交基。

23. 证明定理 2.3.11。

24. 设 T 为 Hilbert 空间 X 上的自共轭算子，证明 $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|(Tx,x)|$。

25. 设 X,Y 是实 Banach 空间，$D\subset X$ 是有界开集，则下述三个结论等价：

(1) 算子 $f:D\to Y$ 全连续；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists f_\varepsilon:D\to Y_\varepsilon$ 连续有界，使对一切 $x\in D$，有 $\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$，这里 Y_ε 是 Y 的某个有限维子空间；

(3) f 可表为 $f(x)=f_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，$\forall x\in D$，这里 $f_n:D\to Y_n^{(0)}$ 连续有界，$Y_n^{(0)}$ 表示 Y 的某有限维子空间，$n=0,1,2,\cdots$，且 $\|f_n\|\leqslant\dfrac{1}{2^n}(n=0,1,2,\cdots)$，$\forall x\in D$。

26. 证明定理 2.4.3。

27. 考察 Urysohn 算子：

$$K\varphi(\boldsymbol{x})=\int_G k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}\boldsymbol{y}\tag{E1}$$

其中 G 表示 R^n 中某有界闭集，$k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$ 与 $k'_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$ 都在 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in G\times G=\hat{G}$，$|u|<\infty$ 上连续。由例 2.4.3 知，Urysohn 算子 $K:C(G)\to C(G)$ 全连续。现在证明，在任何点 $\varphi_0(\boldsymbol{x})\in C(G)$ 处，算子 K 是F-可微的，并且有表达式 $K'(\varphi_0)h(\boldsymbol{x})=\int_G k'_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varphi_0(\boldsymbol{y}))h(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$。

28. 考察 Urysohn 算子(E1)。设 $k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$，$k'_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$ 以及 $k''_{uu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$ 均在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in G$，$|u|<\infty$ 上连续。证明：在任何点 $\varphi_0(\boldsymbol{x})\in C(G)$ 处，二阶 F 导算子 $K''(\varphi_0)$ 都存在，并且有表达式 $K''(\varphi_0)hk=\int_G k''_{uu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varphi_0(\boldsymbol{y}))h(\boldsymbol{y})k(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$。

29. 在定理 2.4.15 的条件下，证明 f 在 x_0 处局部微分同胚且 $(f^{-1}(y_0))'=(f'(x_0))^{-1}$。

30. 证明定理 2.4.14。

31. 证明定理 2.5.6。

32. 写出定理 2.5.12 中(1)，(5)，(6)的证明。

33. 证明定理 2.5.13。

34. 证明定理 2.5.14 和定理 2.5.15。

35. 考察 Urysohn 积分方程 $\varphi(\boldsymbol{x})=\int_G k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\varphi(\boldsymbol{y}))\mathrm{d}y$，其中 G 为 $\mathbf{R}^N$ 中某有界闭集。设 $k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)$ 在 $\boldsymbol{x}\in G,\boldsymbol{y}\in G$，$|u|<\infty$ 上连续，且满足不等式 $|k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u)|\leqslant a+b|u|$，$\forall\boldsymbol{x}$，

$y \in G$, $|u| < \infty$,其中 $a > 0, b > 0, b\ \mathrm{mes}G < 1$。则该积分方程必具有连续解。

36. 考察一阶常微分方程的初值问题如下

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 (x_0 \in \mathbf{R}^1) \end{cases} \tag{E2}$$

记矩形 $Q = \{(t,x) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \mid |t-t_0| \leqslant a, |x-x_0| \leqslant b\}$。

设 $f: Q \to \mathbf{R}^1$ 连续且存在 $K>0$,使当 $(t,x) \in Q$ 时,$|f(t,x)| \leqslant K$,则当 C 满足 $0<C\leqslant a$ 且 $CK \leqslant b$ 时,问题(E2)在$[t_0-C, t_0+C]$上有界。

参考文献

[1] Taylor A E. Introduction to Functional Analysis. New York: John Wiley & Sons Inc. , 1958

[2] Rudin W. Real and Complex Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company, 1966

[3] Yosida K. Functional Analysis. sixth edition. Berlin: Springer-Verlay, 1980.

[4] Kreyszig E. 泛函分析导论及应用. 蒋正新等译. 北京:北京航空学院出版社,1987

[5] 郑维行,王声望. 实变函数与泛函分析概要(第二册). 北京:人民教育出版社,1980

[6] 夏道行,吴卓人,严绍宗等. 实变函数与泛函分析(上、下册). 北京:人民教育出版社,1979

[7] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京:北京大学出版社,1987

[8] 刘斯铁尔尼克 Л А,索伯列夫 ВИ. 泛函分析概要. 第二版. 北京:科学出版社,1985

[9] 郭大钧. 非线性泛函分析. 第二版. 济南:山东科技出版社,2001

[10] 陈文嫄. 非线性泛函分析. 兰州:甘肃人民出版社,1982

[11] 赵义纯. 非线性泛函分析及其应用. 北京:高等教育出版社,1989

[12] 刘培德. 泛函分析基础. 修订本. 武汉:武汉大学出版社,2001

第三章 微分流形及其应用

随着科学技术的飞速发展，流形、微分形式、Lie 群、纤维丛及联络等不仅成为现代数学的一个活跃的研究领域，而且在其他数学分支、力学、物理、控制、优化、经济理论等方面都有广泛而深入的应用。在欧氏空间中建立的经典微积分学、向量和张量分析等都要求一个统一的整体坐标系，但它们不能直接用于微分流形，因为整个流形不可能用单个坐标系去覆盖。为此，在流形研究中需要根据几何和拓扑的思想，建立一种不依赖于局部坐标系的内蕴描述，使其成为研究大范围非线性问题的重要工具。本章按照大范围分析的观点，有重点地初步介绍有限维微分流形上的微积分学及一些应用，包括微分流形和可微映射、切向量和余切向量、微分形式和有关运算、Lie 导数和 Lie 代数、微分形式的应用、流形上的积分和 Stokes 定理等，最后简单提及临界点理论的一些重要结果。

3.1 微分流形与可微映射

3.1.1 微分流形

我们知道，欧氏空间具有线性结构，从而可以在全空间上定义一个整体坐标系，使得空间中的每个点都可用统一的坐标去描述。从这个意义上讲，欧氏空间是最简单的空间。

在实际问题中，许多动态系统的位形空间或状态空间(相空间)往往不是整个欧氏空间，而是限制在某些曲线或曲面上，例如，单摆限制在圆周上运动，球面摆的运动轨迹在球面上，平面双摆的位形空间是二维环面等等。在它们上面往往无法建立单个的整体坐标系去进行统一的描述。例如，通常用经度和纬度去描述地球表面上点的位置，但是在北极和南极处的经度是不确定的；此外，在东经 180°(或西经 180°)处经度的变化是不连续的。这意味着经纬度并非是适用于地球表面每一点的整体坐标系。从拓扑的观点来看，球面不可能与欧氏平面内的任何一个连通开子集同胚，因此自然不存在覆盖整个球面的整体坐标系。对于圆周、环面等也有类似情况。

一般地说，有约束的动态系统的状态空间通常具有比欧氏空间复杂得多的拓扑结构，其动力学性态的研究也比在欧氏空间中的系统更为困难。为了解决不存在整体坐标系所带来的困难，人们利用"流形"的概念引入局部坐标系，于是系统的状态需要采取两种描述方式，即适用于局部分析的坐标描述和适用于大范围分析的内蕴描述。前者依赖于局部坐标系的选取，后者则与坐标系的选取无关。

流形可以大致地看作由一些变形的局部欧氏空间块通过适当方式拼接而成的。通常的圆周、球面、环面和射影平面等都是典型的流形。一般有如下定义：

定义 3.1.1 设 M 是一个有可数的拓扑基的 Hausdorff 拓扑空间，且为开集族 $\{U_\alpha\}$ 所覆盖。如果对每一 U_α 存在同胚 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to U'_\alpha$，$U'_\alpha$ 是 $\mathbf{R}^m$ 的开子集，则称 M 为一**拓扑流形**(图 3.1)，其维数 $\dim M = m$。

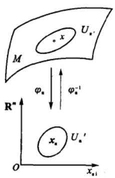


图 3.1　拓扑流形

这时，每个 U_α 连同其对应的同胚 φ_α 一起称为流形 M 的一张**图**(chart)，记为 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$。所有图的集合 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 称为 M 的一个**图集**(atlas)。由于在 $U_\alpha'\subset\mathbf{R}^m$ 中可建立坐标，并通过 φ_α^{-1} 将其输送到 $U_\alpha\subset M$ 上，因此 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 亦称为 M 上的一个坐标邻域。对于每个 $x\in U_\alpha$，我们把 $\varphi_\alpha(x)\in U_\alpha'$ 的坐标 $\boldsymbol{x}_\alpha=(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m})$ 称为 x 关于图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的**局部坐标**，其中 $x_{\alpha i}=\varphi_{\alpha i}(x)$，$i=1,\cdots,m$。于是 $(U_\alpha,x_{\alpha i})$ 给出 M 的一个局部坐标系。

下面给出一些拓扑流形的例子。

例 3.1.1　欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 是一个 m 维流形，此时只需取一张图 $(\mathbf{R}^m,\mathrm{id})$，其中 id 为恒同映射。同理，$\mathbf{R}^m$ 的任何开子集都是 m 维流形。

例 3.1.2　圆周 $S^1=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\,|\,x_1^2+x_2^2=1\}$ 是一个拓扑流形。通常可取以下几种图集

(1) 取四个开集 U_1,U_2,U_3,U_4 分别为 $x_1>0,x_1<0,x_2>0,x_2<0$ 部分的半圆周，它们构成 S^1 的开覆盖。相应的同胚 $\varphi_i(i=1,\cdots,4)$ 取为 U_i 到区间 $(-1,1)\subset\mathbf{R}$ 的投影，即 $\varphi_1(x_1,x_2)=\varphi_2(x_1,x_2)=x_2,\varphi_3(x_1,x_2)=\varphi_4(x_1,x_2)=x_1$。则 $\{(U_i,\varphi_i)\,|\,i=1,\cdots,4\}$ 构成 S^1 的一个图集。

(2) 取两个开集和相应的同胚如下

$$U_1=S^1\backslash\{e^{i\cdot 0}\},\qquad \varphi_1:U_1\to(0,2\pi)\subset\mathbf{R}$$
$$\varphi_1(e^{i\theta})=\theta\quad(0<\theta<2\pi)$$
$$U_2=S^1\backslash\{e^{i\pi}\},\qquad \varphi_2:U_2\to(\pi,3\pi)\subset\mathbf{R}$$
$$\varphi_2(e^{i\eta})=\eta\quad(\pi<\eta<3\pi)$$

易知 $\{(U_i,\varphi_i)\,|\,i=1,2\}$ 构成 S^1 的一个图集。

(3) 取两个开集 $U_+=S^1\backslash\{A\}$ 和 $U_-=S^1\backslash\{B\}$(图 3.2)。相应的同胚 φ_+,φ_- 取为球极投影。以 φ_+ 为例，对任一点 $P(x_1,x_2)\in U_+$，取 AP 连线，它与 x_1 轴交于 P' 点，其 x_1 坐标就是 $\varphi_+(x_1,x_2)$。由相似三角形关系易见 $\varphi_+(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{1+x_2}$。类似地，$\varphi_-(x_1,x_2)=\dfrac{x_1}{1-x_2}$。于是 $\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$ 构成 S^1 的一个图集。

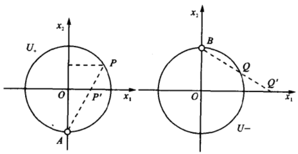


图 3.2

由此可知 S^1 是一个一维流形。上述结果可推广到高维情形，m 维球面

$$S^m=\left\{(x_1,\cdots,x_{m+1})\in\mathbf{R}^{m+1}\,\middle|\,\sum_{i=1}^{m+1}x_i^2=1\right\},\ m=2,3,\cdots$$

是一个 m 维流形。

例 3.1.3 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维拓扑流形，则拓扑积 $M\times N$ 为 $(m+n)$ 维流形（$M\times N$称为 M 和 N 的**积流形**）。由 M 的图集 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 和 N 的图集 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ 可得 $M\times N$ 的图集 $\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}$，其中 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta$ 为积映射。特别地，柱面 $H=S^1\times\mathbf{R}^1$ 是一个二维流形，m 维环面 $T^m=S^1\times\cdots\times S^1$（$m$ 个）是一个 m 维流形。

例 3.1.4 设 m 维流形 M 的一个图集为 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，$S$ 为 M 的一个开子集。若取 $\{(S\cap U_\alpha,\varphi_\alpha|_{S\cap U_\alpha})\}$ 为 S 的一个图集，则 S 也是一个 m 维流形，称为 M 的**开子流形**。

例 3.1.5 闭区间 $[a,b]$ 不是流形，因为其端点的邻域不能同胚于任何 $\mathbf{R}^1$ 的开子集。

例 3.1.6 平面上自相交的曲线不是一个拓扑流形。为此，只需说明交点 p 的邻域不能同胚于 $\mathbf{R}^1$ 的任何开子集（图 3.3）。因为 p 点将此十字形邻域分为四个不相交的开子集，而 $\mathbf{R}^1$ 上任何一点只能将其连通邻域分为两个开子集，显然它们之间不存在同胚关系。

对流形 M 的两张图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β)，如果 $W=U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则这两张图在公共区域 W 上叠置。记 $W_\alpha=\varphi_\alpha(W)$，$W_\beta=\varphi_\beta(W)$（图 3.4）。$\varphi_{\beta\alpha}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 $W_\alpha\to W_\beta$ 的同胚，称为**叠置映射**。同样地，$\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_{\beta\alpha}^{-1}=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:W_\beta\to W_\alpha$ 也是叠置映射。它们给出 W 的两个局部坐标系之间的坐标变换关系，即 $\boldsymbol{x}_\beta=\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)$，$\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_\beta)$。这些叠置映射的性质反映图集中不同的图粘接在一起所成流形的性质。叠置映射是连续的，但是为了能在流形上进行微分运算，当然还需要叠置映射是可微的，以保证流形的映射可微性与图集中图的选取无关。由此引入图的相容性概念。

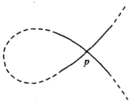


图 3.3 自相交曲线

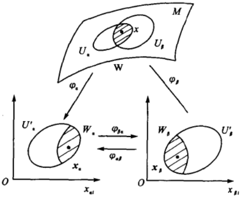


图 3.4 叠置映射

定义 3.1.2 设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是流形 M 的两张图，如果 $U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$，或者当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，叠置映射 $\varphi_{\beta\alpha}$ 和 $\varphi_{\alpha\beta}$ 都是 $C^k(k\geqslant1)$ 的，则称该两图是 $\boldsymbol{C^k}$**相容的**。设 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是流形 M 的一个图集，且其中任何两图都是 C^k 相容的，则称 $\mathscr{A}$ 为一个 $\boldsymbol{C^k}$**图集**。如果 $\mathscr{A}$ 包含了一切与 $\mathscr{A}$ 中的图都是 C^k 相容的图，则称 $\mathscr{A}$ 为一个**极大** $\boldsymbol{C^k}$**图集**。

于是我们可以建立微分结构和微分流形的概念。

定义 3.1.3 设 M 为拓扑流形。M 上的一个极大 C^k 图集 $\mathscr{A}$ 称为 M 的一个 $\boldsymbol{C^k}$**微分结构**（$k\geqslant1$）。具有 C^k 微分结构 $\mathscr{A}$ 的流形 M 称为 $\boldsymbol{C^k}$**（微分）流形**，记为 $(M,\mathscr{A})$。通常将 C^∞ 流形称为**光滑流形**，C^ω 流形（即叠置映射是解析的）称为**解析流形**。

由此可见，对微分流形来说，除拓扑性质之外，还必须具有微分结构。微分结构有三个重要的性质，即覆盖性、相容性和极大性。

可以证明，如果知道拓扑流形 M 的一个 C^k 图集 $\mathscr{A}$，则它惟一地确定了流形 M 的一个 C^k 微分结构 $\mathscr{A}^*$，且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*$。这表示在构造微分流形时，只需找出流形的一个 C^k 图集。注意，并非每个拓扑流形都可以建立微分结构。一个拓扑流形也可以有多个彼此不相容的微分结构。此外，有时亦将拓扑流形称为 **C^0 流形**。

Whitney 定理指出，对任何 C^k 流形 $M(k\geqslant 1)$，总可找到与其 C^k 微分结构是 C^k 相容的 C^∞ 微分结构，从而使 M 成为 C^∞ 流形。因此，以后除专门指明之外，通常假设微分流形是 C^∞ 的，即光滑流形。

前述例 3.1.1～例 3.1.3 中的流形都是 C^∞ 流形，我们只要验证其叠置映射都是 C^∞ 的即可。

例 3.1.1 显然成立。

例 3.1.2 中取图集 $\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$。因为 $t=\varphi_+(x_1,x_2)=x_1/(1+x_2)$，$s=\varphi_-(x_1,x_2)=x_1/(1-x_2)$，考虑到 $x_1^2+x_2^2=1$，故有

$$\varphi_+^{-1}:t\mapsto(2t/(1+t^2),\ (1-t^2)/(1+t^2))$$
$$\varphi_-^{-1}:s\mapsto(2s/(1+s^2),\ (s^2-1)/(1+s^2))$$

由此得知 $\varphi_+\circ\varphi_-^{-1}:s\mapsto 1/s$，$\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}:t\mapsto 1/t$。当 $(x_1,x_2)\in U_+\cap U_-=S^1\setminus\{(0,1),(0,-1)\}$ 时，$t\neq 0$，$s\neq 0$，从而叠置映射 $\varphi_+\circ\varphi_-^{-1}$ 和 $\varphi_-\circ\varphi_+^{-1}$ 都是 C^∞ 的。$\{(U_+,\varphi_+),(U_-,\varphi_-)\}$ 是 S^1 的一个 C^∞ 图集，故 S^1 是一个 C^∞ 流形。

例 3.1.3 中的积流形 $M\times N$，如果 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 和 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ 分别为 C^k 流形 M 和 N 的 C^k 图集，易知 $\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}$ 为积流形 $M\times N$ 的一个 C^k 图集，故 $M\times N$ 为 $(m+n)$ 维 C^k 流形。由此可知柱面 $S^1\times\mathbf{R}^1$，m 维环面 T^m 等都是 C^∞ 流形。

图的 C^k 相容性可用局部坐标表示。设 M 为 m 维流形，$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$(U_\beta,\varphi_\beta)$ 为 M 的两张图，$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$。对每一点 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$（图 3.4），它在图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 中有局部坐标 $\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi_\alpha(x)=(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m})$，它又在图 (U_β,φ_β) 中有局部坐标 $\boldsymbol{x}_\beta=\varphi_\beta(x)=(x_{\beta1},\cdots,x_{\beta m})$。于是有 $\boldsymbol{x}_\beta=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)$，即叠置映射 $\varphi_{\beta\alpha}:\boldsymbol{x}_\alpha\mapsto\boldsymbol{x}_\beta$ 由下列局部坐标函数表示

$$\begin{cases}x_{\beta1}=x_{\beta1}(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m})\\ \vdots\\ x_{\beta m}=x_{\beta m}(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m})\end{cases}\tag{3.1.1}$$

由此可知，当且仅当式(3.1.1)中的每个函数都有直到 k 阶的连续偏导数时，映射 $\varphi_{\beta\alpha}$ 就是 C^k 的，从而图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^k 相容的。此外，为了保证 $\varphi_{\beta\alpha}$ 是可逆的，通常假设 Jacobi 矩阵 $\varphi'_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)=(\partial x_{\beta i}/\partial x_{\alpha j})_{\boldsymbol{x}_\alpha}$（亦可记为 $\mathrm{D}\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)$）在 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 上非奇异，即 $\det\varphi'_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)\neq 0$。

把线性子空间的概念引伸于流形，可以得到正则子流形的概念。

定义 3.1.4　设 N 是 n 维 C^k 流形，M 是 N 的子集。如果对任何 $x\in M$，存在 N 的图 (U,φ)，$x\in U$，$\varphi:U\to U'\subset\mathbf{R}^n$，使得当 $M\cap U\neq\varnothing$ 时有 $\varphi(M\cap U)=U'\cap\mathbf{R}^m(m\leqslant n)$，这里 $\mathbf{R}^m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的 m 维子空间，则称 M 为流形 N 的 m 维 C^k **正则子流形**。数 $q=n-m$ 称为子流形 M 的**余维数**，记作 $\mathrm{codim}M$。

不失一般性，可取 $\mathbf{R}^n$ 的 m 维线性子空间为 $\mathbf{R}^m=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$。于是对 $x\in U\cap M$，有局部坐标 $\varphi(x)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)$。

N 的正则子流形 M 有一个由 N 诱导的自然微分结构。如果 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 为 N 的微分结构,则 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha\cap M,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap M})\}$ 就是 M 的一个微分结构。正则子流形可以是开的或闭的,其维数可以等于或小于原来流形的维数。作为例子,微分流形的开子流形(见例 3.1.4)显然是正则子流形,其维数与原来流形的维数相同。圆周 S^1 是 $\mathbf{R}^2$ 的一维正则子流形;同理,n 维球面 S^n 和 n 维环面 T^n 都是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的 n 维正则子流形。它们都是闭流形,且其维数低于原来流形的维数。

3.1.2 可微映射

设 M,N 分别为 m 维和 n 维微分流形,$F:M\to N$ 是连续映射。设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (V_β,ψ_β) 分别为 M 和 N 上包含 x 和 $y=F(x)$ 的坐标图,且有 $F(U_\alpha)\subset V_\beta$(图 3.5)。我们把映射 $F_{\beta\alpha}\stackrel{\mathrm{d}}{=}\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\psi_\beta(V_\beta)$,$\boldsymbol{x}_\alpha\mapsto\boldsymbol{y}_\beta$ 称为映射 F 的局部表示,它由函数

$$\begin{cases} y_{\beta1}=F_{\beta\alpha1}(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m}) \\ \vdots \\ y_{\beta n}=F_{\beta\alpha n}(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha m}) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

给出,其中 $F_{\beta\alpha i}(i=1,\cdots,n)$ 是映射 $F_{\beta\alpha}$ 的第 i 个分量。

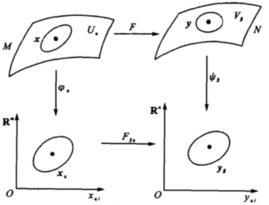


图 3.5 可微映射

定义 3.1.5 如果映射 $F:M\to N$ 关于 M 和 N 的图的局部表示 $F_{\beta\alpha}$ 在 $\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi_\alpha(x)$ 处是 C^r(即 r 次连续可微)的,则称 F 在 x 处是 C^r(可微)的。如果 F 在 M 上处处是 C^r 的,则称 F 是从 M 到 N 的 **C^r 映射**。C^∞ 映射亦称为**光滑映射**,C^ω 亦称为**解析映射**。从 M 到 N 的全体 C^r 映射的集合记作 $C^r(M,N)$。

当 $N=\mathbf{R}$ 时,就有 C^r 函数的概念。设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是连续函数,$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 为 M 上包含 x 的坐标图(图 3.6)。函数 $f_\alpha\stackrel{\mathrm{d}}{=}f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbf{R}$ 称为函数 f 的**局部表示**。

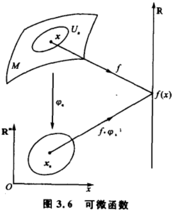


图 3.6 可微函数

定义 3.1.6 如果函数 $f:M\to\mathbf{R}$ 关于 M 的图的

局部表示 f_α 在 $x_\alpha=\varphi_\alpha(x)$ 处是 C^r 的，则称 f 在 x 处是 C^r 的。如果 f 在 M 上处处是 C^r 的，则称 f 是 M 上的 **C^r 函数**。M 上全体 C^r 函数的集合记作 $C^r(M,\mathbf{R})$，或简记为 $C^r(M)$。C^∞ 函数亦称为**光滑函数**。

定义 3.1.7　设 $f\in C^r(M,\mathbf{R})$。函数 f 在 $x\in M$ 处关于局部坐标 $x_{\alpha i}$ 的**偏导数**定义为

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha i}}(x)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha),\quad i=1,\cdots,m \tag{3.1.3}$$

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 M 上两个坐标图，$x\in U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，$f\in C^r(M,\mathbf{R})$。$f$ 在 x 处对于不同坐标图的偏导数有如下变换关系

$$\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha i}}(x)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_{\beta j}}(x)\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{3.1.4}$$

其中，$\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{x}_\beta$ 为坐标图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 中的局部坐标，$\boldsymbol{x}_\beta=\varphi_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha)$，$(\partial x_{\beta j}/\partial x_{\alpha i})(\boldsymbol{x}_\alpha)$ 是叠置映射 $\varphi_{\beta\alpha}$ 在 $\boldsymbol{x}_\alpha$ 处 Jacobi 矩阵的转置。事实上，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_{\alpha i}}(x)&=\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}(f\circ\varphi_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x}_\alpha)=\\&\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}[(f\circ\varphi_\beta^{-1})\circ(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})](\boldsymbol{x}_\alpha)=\\&\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}(f_\beta\circ\varphi_{\beta\alpha})(\boldsymbol{x}_\alpha)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_{\beta j}}(\boldsymbol{x}_\beta)\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\\&\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_{\beta j}}(x)\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha)\end{aligned}$$

不难利用局部坐标表示去证明，设 $F:M\to N$，$G:N\to P$ 都是微分流形间的 C^r 映射，则复合映射 $G\circ F:M\to P$ 也是 C^r 映射(见习题 4)。

定义 3.1.8　设 $F:M\to N$ 为同胚，且 F 及其逆 F^{-1} 都是 C^r 映射，则称 F 为从 M 到 N 的 **C^r 微分同胚**。从 M 到 N 的全体 C^r 微分同胚的集合记作 $\mathrm{Diff}^r(M,N)$。如果流形 M,N 间存在微分同胚，则称 M 和 N 是**微分同胚的**。

微分同胚是微分流形的一个重要概念。微分同胚的流形必定是同维数的。微分同胚又是流形间的一个等价关系，因此可以利用它对各种流形进行分类。例如，可以证明所有的一维微分流形皆与 $\mathbf{R}^1$ 或 S^1 微分同胚。

接着研究流形之间的可微映射的局部性质。

定义 3.1.9　设 $F\in C^r(M,N)$，它在 $x\in M$ 处关于局部坐标的 Jacobi 矩阵定义为

$$F'_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)\stackrel{\mathrm{d}}{=}(\partial y_{\beta i}/\partial x_{\alpha j})(\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{3.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{y}_\beta=F_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)$ 见式(3.1.2)。其秩称为 **F 在 x 处的秩**，记为

$$\mathrm{rank}F(x)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\mathrm{rank}F'_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{3.1.6}$$

易见 $\mathrm{rank}F(x)\leqslant\min(m,n)$，且可证 $\mathrm{rank}F(x)$ 与坐标图的选取无关。

于是我们可将欧氏空间中关于函数的局部性质的定理推广到流形上去。

定理 3.1.1(秩定理)　设 M,N 分别为 m 维和 n 维微分流形，$F:M\to N$ 为 C^r 映射($r\geqslant1$)。如果在 $p\in M$ 的某邻域内 $\mathrm{rank}F=k$，则可找到 M 和 N 上分别包含 p 和 $q=F(p)$ 的图 (U,φ) 和 (V,ψ)，满足 $\varphi(p)=\mathbf{0}$，$\psi(q)=\mathbf{0}$，$F(U)\subset V$，使 F 的局部表示 $\widetilde{F}=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ 将 $\mathbf{R}^m$ 中的原点的邻域映为 $\mathbf{R}^n$ 中的原点的适当邻域，且有 $\widetilde{F}(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_k,0,\cdots,0)$。

此定理的证明从略，其含义由图 3.7 说明。

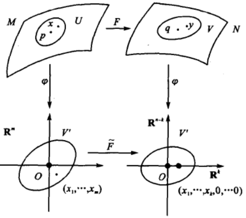


图 3.7　秩定理

秩定理表明：若 $m\leqslant n$，且 $\operatorname{rank}F(p)=k$，则 F 局部地将点 $p\in M$ 的某邻域映为 N 的 k 维正则子流形；若 $m\geqslant n$，且 $\operatorname{rank}F(p)=k$，则对点 $F(p)$ 的某邻域内的每一点 y，其原像 $F^{-1}(y)=\{x\in M\,|\,F(x)=y\}$ 是 M 的 $(m-k)$ 维正则子流形。特别地，当 $m=n=k$ 时有如下定理。

定理 3.1.2(逆映射定理)　设 M,N 是 n 维微分流形，$F:M\to N$ 是 C^r 映射。如果在 $p\in M$ 处 $\operatorname{rank}F(p)=n$，则存在点 p 的邻域 U，使 $F:U\to F(U)$ 是一个（局部）C^r 微分同胚，即 $F:U\to F(U)$ 和 $F^{-1}:F(U)\to U$ 都是 C^r 映射。

最后研究可微映射的全局性质，介绍浸没、浸入和嵌入的概念，并讨论子流形的条件。

定义 3.1.10　设 M,N 分别为 m 维和 n 维微分流形，$F:M\to N$ 是 C^r 映射，有如下定义：

(1) 如果 $\forall x\in M$，$\operatorname{rank}F(x)=n(m\geqslant n)$，则称 F 为从 M 到 N 的 **C^r 浸没(submersion)**。

(2) 如果 $\forall x\in M$，$\operatorname{rank}F(x)=m(m\leqslant n)$，则称 F 为从 M 到 N 的 **C^r 浸入(immersion)**。

(3) 如果 $F:M\to N$ 是 C^r 浸入，且 $F:M\to F(M)\subset N$ 是同胚，其中 $F(M)$ 取为 N 的拓扑子空间（即 $F(M)$ 具有 N 的相对拓扑），则称 F 为从 M 到 N 的 **C^r 嵌入(embedding)**，并称 $F(M)$ 为 N 的**嵌入子流形**①（显然它是 N 的正则子流形）。

根据前面所述，显然得知：

(1) 如果 $F:M\to N$ 是浸没，则 $F(M)$ 中的每一点 q 关于 F 的原像 $F^{-1}(q)$ 都是 M 的 $(m-n)$ 维正则子流形。

例 3.1.7　投影映射 $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1,(x,y)\mapsto x$。显然 F 的 Jacobi 矩阵为 $(1,0)$，其秩等于 1，故 F 为浸没。对给定 $a\in\mathbf{R}$，它关于 F 的原像是 $\{(a,y)\,|\,y\in\mathbf{R}^1\}$，这是 $\mathbf{R}^2$ 的一维正则子流形。

(2) 如果 $F:M\to N$ 是浸入，虽然 F 将 M 的每一点的邻域都局部地映为 N 的 m 维正则子流形，但从全局来看，$F(M)$ 未必是 N 的正则子流形。

例 3.1.8　映射 $F:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2,t\mapsto(\cos t,\sin 2t)$。它的 Jacobi 矩阵为 $(-\sin t,2\cos 2t)$，其秩等于 1，故 F 为浸入。$F(\mathbf{R}^1)$ 的图形见图 3.8，它在原点处自相交。由例 3.1.6 知 $F(\mathbf{R}^1)$

① 有些著作（例如参考文献[10,12]）中关于嵌入的定义略有不同，那里的“正则嵌入”才对应本书的“嵌入”概念。

不是流形。因 $F(\mathbf{R}^1)$ 与 $\mathbf{R}^1$ 不同胚，故 F 不是嵌入。

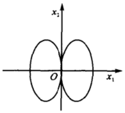


图 3.8

例 3.1.9　映射 $F:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2, t\mapsto(\cos t,\sin t)$。它的 Jacobi 矩阵为 $(-\sin t,\cos t)$，其秩等于 1，故 F 为浸入。$F(\mathbf{R}^1)$ 的图形是圆周 S^1，它是 $\mathbf{R}^2$ 的正则子流形。但 $F(\mathbf{R}^1)$ 与 $\mathbf{R}^1$ 不同胚，故 F 不是嵌入。

例 3.1.10　映射 $F:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^2, x\mapsto(x,x^2)$。它的 Jacobi 矩阵为 $(1,2x)$，其秩等于 1，故 F 是浸入。此时 $F(\mathbf{R}^1)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 平面上的抛物线，它是 $\mathbf{R}^2$ 的一个正则子流形。应当指出，由于 $F(\mathbf{R}^1)$ 作为 $\mathbf{R}^2$ 的拓扑子空间是与 $\mathbf{R}^1$ 同胚的，故 F 也是嵌入。

上面例子表明浸入映射图像的复杂性。即使 $F:M\to N$ 是浸入，且是 $M\to F(M)\subset N$ 的全局一一映射（此时称 F 为**一一浸入或单射浸入**），仍不能保证 $F(M)$ 是 N 的正则子流形。但当 F 为嵌入时就能做到这一点。

(3) 如果 $F:M\to N$ 是嵌入，则 $F(M)$ 是 N 的正则子流形。

例 3.1.11　属于这种情形。若在例 3.1.8 和 3.1.9 中改取 $F:(0,\pi)\to\mathbf{R}^2$，则 F 是嵌入，其图像是 $\mathbf{R}^2$ 的正则子流形。

流形在欧氏空间中的嵌入是一类很重要的流形嵌入问题，这样就可以将流形视为欧氏空间中的低维曲面进行研究。Whitney 证明了：任何一个 m 维光滑流形可以浸入到 $2m$ 维欧氏空间中；任何一个 m 维光滑紧流形可以嵌入到 $(2m+1)$ 维欧氏空间中。尽管如此，流形概念本身并不涉及嵌入，将流形嵌入到欧氏空间中毕竟是人为的，况且维数增高也会带来研究的困难，因此直接从流形本身用内蕴方式进行研究具有根本的意义。

3.1.3　切向量和切空间

微分流形是欧氏空间的推广，但由于它的复杂拓扑结构，因此流形一般没有欧氏空间那样的全局线性空间结构，这给流形上分析学的建立带来很大困难。为此，我们先在流形上每一点建立局部线性空间结构——切空间，然后再将 $\mathbf{R}^m$ 上的微积分学推广到流形上去。

流形上一点的切空间是由在该点的全体切向量组成的线性空间。我们先利用在流形上过一点的光滑曲线的切等价类去定义切向量。

设 M 是 m 维微分流形，x 是其上一点。M 上过 x 的**一条光滑曲线**是指一个光滑映射 $\gamma:J\to M$，$J\subset\mathbf{R}$ 是包含原点 O 的开区间，且 $\gamma(0)=x$。取 M 在 x 处的一个坐标图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$。$\gamma$ 的局部表示为 $\gamma_\alpha:J\to\mathbf{R}^m, t\mapsto\gamma_\alpha(t)=\varphi_\alpha(\gamma(t))$。$\gamma_\alpha(t)$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 中的过 $\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi_\alpha(x)$ 的一条光滑曲线。利用通常的求导运算，可得到 $\gamma_\alpha(t)$ 在 $\boldsymbol{x}_\alpha$ 处的切向量

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_\alpha(t)\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\alpha(\gamma(t))\Big|_{t=0}\qquad(3.1.7)$$

在流形上一般无法用通常欧氏空间的方式去定义向量，我们采用另外的描述方式去建立流形的切向量概念。由上面知道，流形上的光滑曲线与其局部表示的切向量之间有紧密联系。然而，在 $\mathbf{R}^m$ 中过 $\boldsymbol{x}_\alpha$ 并以 $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ 为切向量的光滑曲线有无穷多条，它们对应 M 上的不同曲线。这就产生流形上曲线相切的概念。

定义 3.1.11　如果过 $x\in M$ 的两条光滑曲线 γ_1 和 γ_2 满足 $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=x$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\alpha(\gamma_1(t))\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_\alpha(\gamma_2(t))\Big|_{t=0}$，则称 γ_1 和 γ_2 在 x 处**相切**（图 3.9）。

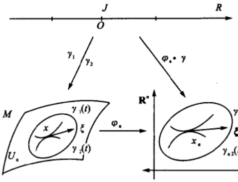


图 3.9 切向量

由于在 M 上 x 处相切的所有曲线 γ 都对应相同的 $\boldsymbol{\xi}_a$，因此 $\gamma \mapsto \boldsymbol{\xi}_a$ 是多一映射。为了得到一一对应关系，考虑到曲线相切是一种等价关系，我们引进曲线的切等价类的概念。

定义 3.1.12 若流形 M 上的两条光滑曲线 γ_1, γ_2 在 x 处相切，则称 γ_1 与 γ_2 **切等价**。在 M 上 x 处与曲线 γ 切等价的全体曲线组成的等价类称为 M 上的一个曲线**切等价类**，记作$[\gamma]$。

设 S 为流形 M 上过 x 的曲线的全体切等价类组成的集合。显然 $\sigma: S \to \mathbf{R}^m, [\gamma] \mapsto \boldsymbol{\xi}_a$ 是一一映射。此外，易证 σ 是满射。于是 σ 是一一满射（即双射），其逆 $\sigma^{-1}: \mathbf{R}^m \to S, \boldsymbol{\xi}_a \mapsto [\gamma]$ 存在，且可把 $\mathbf{R}^m$ 的线性空间结构移植到 S 上，从而在 S 中定义线性运算：若$[\gamma] = \sigma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_a)$，$[\delta] = \sigma^{-1}(\boldsymbol{\eta}_a)$，令

$$[\gamma] + [\delta] = \sigma^{-1}(\boldsymbol{\xi}_a + \boldsymbol{\eta}_a), \quad \lambda[\gamma] = \sigma^{-1}(\lambda\boldsymbol{\xi}_a), \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{3.1.8}$$

于是 S 与 $\mathbf{R}^m$ 线性同构，成为一个 m 维实线性空间。

定义 3.1.13 m 维流形 M 上过 x 的曲线的一个切等价类 $\xi = [\gamma]$ 称为 M 在 x 处的一个**切向量**①。在 x 处的全体切向量组成的 m 维线性空间 S 称为 M 在 x 处的**切空间**，通常记作 T_xM（图 3.10）。$\dim T_xM = \dim M = m$。

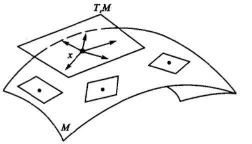


图 3.10 切丛

作为特例，如果 M 是欧氏空间中的（超）曲面，则 T_xM 就是过 $x \in M$ 的切平面，在 x 处与曲面 M 相切的向量都是切向量。

取 $\mathbf{R}^m$ 的一个基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$，并将切向量 ξ 的局部表示 ξ_a 写成

$$\xi_a = \sum_{i=1}^{m} \xi_{ai} \boldsymbol{e}_i \tag{3.1.9}$$

令 $\varepsilon_i = \sigma^{-1}(\boldsymbol{e}_i), i = 1, \cdots, m$。若取$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m\}$作为 T_xM 的一个基底，并将切向量 ξ 写成

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \varepsilon_i \tag{3.1.10}$$

① 切向量是由曲线的切等价类（或方向微分算子，见后面）定义的抽象“向量”，为了与通常向量有所区别，故不用黑体字符表示。

由于 $\xi=\sigma^{-1}(\xi_\alpha)=\sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_{\alpha i}e_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\xi_{\alpha i}\sigma^{-1}(e_i)=\sum_{i=1}^{m}\xi_{\alpha i}\varepsilon_i$，因此有

$$\xi_i=\xi_{\alpha i}\quad (i=1,\cdots,m) \tag{3.1.11}$$

下面利用方向微分算子去给出流形的切向量和切空间的另一种描述。

设 $\gamma:J\subset\mathbf{R}\to M$ 是 M 上过 x 的一条光滑曲线，$\gamma(0)=x$；$f:M\to\mathbf{R}$ 是 M 上的一个可微函数。f 在 x 处沿 γ 的方向导数定义为

$$Xf(x)\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t))\bigg|_{t=0} \tag{3.1.12}$$

其中，X 称为在 x 处沿 γ 的**方向微分算子**。

取 x 处的坐标图 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$。考虑到 $f(\gamma(t))=(f\circ\varphi_\alpha^{-1}\circ\varphi_\alpha\circ\gamma)(t)=f_\alpha(\gamma_\alpha(t))$，由式(3.1.11)和式(3.1.7)可得 $Xf(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_\alpha(\gamma_\alpha(t))\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_\alpha(x_\alpha)}{\partial x_{\alpha i}}\xi_{\alpha i}$。利用 $\xi_i=\xi_{\alpha i}$ 和式(3.1.3)，有

$$Xf(x)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_{\alpha i}} \tag{3.1.13}$$

由于上式对任何可微函数 f 成立，故得到

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\bigg|_x \tag{3.1.14}$$

记 T 为在 x 处全体方向微分算子组成的集合。在 T 上定义线性运算如下：对 $X=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\Big|_x$，$Y=\sum_{i=1}^{m}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\Big|_x$，有

$$X+Y=\sum_{i=1}^{m}(\xi_i+\eta_i)\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\bigg|_x,\qquad \lambda X=\sum_{i=1}^{m}(\lambda\xi_i)\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\bigg|_x,\qquad \lambda\in\mathbf{R}$$

此外，微分算子 $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}\Big|_x,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\Big|_x$ 是线性无关的。事实上，若有一组数 $c_1,\cdots,c_m$ 使 $c_1\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}\Big|_x+\cdots+c_m\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\Big|_x=0$，则对于任何可微函数 $f(x)$，都有 $c_1\frac{\partial f(x)}{\partial x_{\alpha 1}}+\cdots+c_m\frac{\partial f(x)}{\partial x_{\alpha m}}=0$。特别地，取 $f(x)=x_{\alpha i}(i=1,\cdots,m)$，由上式可得 $c_i=0(i=1,\cdots,m)$。

由此可知，T 是一个 m 维实线性空间，它的一个基底是 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}\Big|_x,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\Big|_x\right\}$。比较式(3.1.10)和式(3.1.14)后进一步发现，若取映射 $\tau:T\to T_xM$，$X\mapsto\xi$，则 τ 是从 T 到 T_xM 的一个线性同构，且有基向量的对应关系 $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\Big|_x\mapsto\varepsilon_i$，$i=1,\cdots,m$。于是在线性同构的意义下，我们将方向微分算子 X 与切等价类 ξ 视为同一，都定义为流形 M 在 x 处的**切向量**。线性空间 T 也称为 M 在 x 处的**切空间**，同样记作 T_xM。因此式(3.1.14)是切向量的局部表达式，$\left\{\frac{\partial}{\partial x_{\alpha 1}}\Big|_x,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{\alpha m}}\Big|_x\right\}$ 是切空间 T_xM 的一个基底，称为**自然基**。

上述关于切向量和切空间的两种等价的定义各有特点。利用曲线的切等价类给出的切向量定义有明显的几何直观性，便于理解；而利用方向微分算子给出的切向量定义适合进行分析运算，便于应用。

由于方向微分算子在实际应用中的重要性，这里再作两点说明，其证明留作习题。

(1) 方向微分算子 X 具有线性性质

$$X(f+g)=Xf+Xg,X(\lambda f)=\lambda Xf,\quad (\lambda\in\mathbf{R}) \tag{3.1.15}$$

和 Leibniz 性质

$$X(fg)=fXg+gXf \tag{3.1.16}$$

(2) 坐标变换关系。若$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$,$(U_\beta,\varphi_\beta)$是 M 上含 x 的两个坐标图，它们分别有局部坐标$\{x_{\alpha i}\}$和$\{x_{\beta j}\}$，则在 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 处的切空间的两个基底$\{\partial/\partial x_{\alpha i}|_x\}$和$\{\partial/\partial x_{\beta j}|_x\}$满足关系式

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\right|_x=\sum_{j=1}^m\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha)\left.\frac{\partial}{\partial x_{\beta j}}\right|_x \tag{3.1.17}$$

若切向量 X 在这两个局部坐标系中分别表示为 $X=\sum_{i=1}^m\xi_{\alpha i}\left.\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\right|_x=\sum_{j=1}^m\xi_{\beta j}\left.\frac{\partial}{\partial x_{\beta j}}\right|_x$，则其分量之间满足关系式

$$\xi_{\alpha i}=\sum_{j=1}^m\xi_{\beta j}\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial x_{\beta j}}(\boldsymbol{x}_\beta) \tag{3.1.18}$$

通常将满足分量变换关系(3.1.18)的向量称为**逆变(即反变)向量**。

最后简单介绍切丛和向量场的概念。上面讨论的切空间 T_xM 是对流形上一点 x 而言的，不同的点的切空间应当理解为不同的线性空间。把流形上各点的切空间结合起来，就得到切丛的概念(图 3.10)。

定义 3.1.14 流形 M 上各点的切空间的并集称为 M 的**切丛**，记作 TM，即 $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$。

可以证明，当 M 是 m 维 C^k 流形时$(k\geqslant1)$，TM 是 $2m$ 维 C^{k-1} 流形。TM 不是紧致的，因为每个 T_xM 都同构于 $\mathbf{R}^m$。

例 3.1.12 设积流形 $M=M_1\times M_2$，则 $TM=T(M_1\times M_2)=TM_1\times TM_2$。例如，对 $M=T^2=S^1\times S^1$，有 $TM=TS^1\times TS^1$。

例 3.1.13 设 U 为 $\mathbf{R}^m$ 的一个开子集，则 TU 具有整体拓扑积结构，即 $TU=U\times\mathbf{R}^m$。特别地，$T\mathbf{R}^m=\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^m=\mathbf{R}^{2m}$。

例 3.1.14 设 M 为 m 维球面 S^m，则仅当 $m=1,3,7$ 时才有 $TS^m=S^m\times\mathbf{R}^m$。特别地，$TS^1=S^1\times\mathbf{R}^1$，它与柱面同胚。

切丛 TM 由流形 M 上各点的全体切向量构成。考虑到在不同点处的切向量属于不同的线性空间，因此切丛的元素不仅要指明切向量 ξ 本身，还应给出切点 x 的位置。设点 x 的局部坐标为$(x_1,\cdots,x_m)$，切向量 ξ 的分量为$(\xi_1,\cdots,\xi_m)$，则切丛 TM 的元素的局部坐标为$(x_1,\cdots,x_m;\xi_1,\cdots,\xi_m)$。

设 m 个自由度的力学系统所在的位形空间是微分流形 M，其维数为 m。在流形 M 的开子集 U 上取局部坐标$(q_1,\cdots,q_m)$，通常称为**广义坐标**。如果系统在时刻 t 的位置由$(q_1(t),\cdots,q_m(t))$确定，则当 t 变化时，它给出流形 M 上的一条曲线 $\gamma(t)$。在时刻 t 沿曲线 γ 的一个切向量为 $\xi(t)=\sum_{i=1}^m\dot{q}_i\left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_{\gamma(t)}$，其分量为$(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m)$，通常称为**广义速度**。由此可见切向量在力学上表示系统的运动速度。在流形 M 上某点处，系统的所有可能的广义速度向量组成 M 在该点的切空间。M 上各点的速度空间全体构成切丛 TM，其元素的局部坐标取为$(q_1,\cdots,q_m;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m)$。我们知道，在 Lagrange 力学体系中，一个力学系统的运动状态是由广义坐标

和广义速度共同描述的，因此切丛是力学系统在 Lagrange 体系中的状态空间。

例 3.1.15 考虑球面摆的运动，其位形空间是二维球面 S^2。它是一个二维流形，其上不能建立一个整体坐标系。如果在 S^2 的开子集 U 上用球坐标角 (φ,θ) 作为描述摆的位置的广义坐标，则摆的广义速度为 $(\dot{\varphi},\dot{\theta})$。于是球面摆在拉格朗日力学体系中的一个状态空间是 4 维的切丛 TS^2，其运动状态由切丛元素 $(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta})$ 描述。

当然我们也可以将球面摆的运动看作在 $\mathbf{R}^3$ 中的约束运动。这时摆的位形空间是 $\mathbf{R}^3$，从而状态空间是 $T\mathbf{R}^3=\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3=\mathbf{R}^6$，它是 6 维的。若在 $\mathbf{R}^3$ 中取直角坐标系 $\{x_1,x_2,x_3\}$，则摆的状态由 $(x_1,x_2,x_3,v_1,v_2,v_3)$ 描述，其中 $v_i=\dot{x}_i(i=1,2,3)$，并满足约束条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 和 $x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3=0$（即 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{v}$）。显然前一种描述方式要比后一种方式简便，并且更自然地将约束考虑进去。考虑到 S^2 是 $\mathbf{R}^3$ 的二维正则子流形，故 TS^2 是 $\mathbf{R}^6$ 的四维正则子流形。

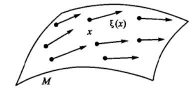


图 3.11 向量场

定义 3.1.15 如果对每点 $x\in M$ 给定一个切向量 $\xi(x)$，则称映射 $\xi:x\to\xi(x)$ 为**流形 M 上的一个向量场**（图 3.11）。若映射 ξ 是 C^r 的，则称**其为 C^r 向量场**。流形 M 上的全体 C^r 向量场的集合记为 $\mathscr{X}^r(M)$，并将 M 上全体 C^∞ 向量场的集合记为 $\mathscr{X}(M)$。

若取 $\{\partial/\partial x_i|_x\}$ 作为切空间 T_xM 的基底，则向量场可由方向微分算子表示为

$$X(x)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x,\qquad x\in M \tag{3.1.19}$$

顺便指出，切丛 TM 可理解为从 M 上每一点 x 张出去的一个线性空间 T_xM 共同组成的，因此切丛可以看作一种纤维丛，而向量场是切丛的一个截面。

3.1.4 映射的微分、余切向量和余切空间

流形的切空间是线性空间，我们可在其上建立一种线性运算——流形上映射的微分运算。

设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维微分流形，$F:M\to N$ 是可微映射。M 上过 x 的一条曲线 $\gamma:J\to M$ 被 F 映成 N 上过 $y=F(x)$ 的一条曲线 $\bar{\gamma}=F\circ\gamma:J\to N$。由 M 在 x 处的切向量 $\xi=[\gamma]$ 和 N 在 y 处的切向量 $\eta=[\bar{\gamma}]$ 之间的对应关系便引进流形之间映射的微分概念（图 3.12）。

定义 3.1.16 映射 $\mathrm{d}F(x):T_xM\to T_{F(x)}N,\xi=[\gamma]\mapsto\eta=[\bar{\gamma}]$ 称为**映射 F 在 x 处的微分**或**切映射**，亦可记作 $F'(x)$ 或 $F_*|_x$。

可以证明，映射的微分具有下列性质：

(1) 映射微分是线性的，即若 $F:M\to N$ 是可微映射，则

$$\mathrm{d}F(x)(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2)=\lambda_1\mathrm{d}F(x)\xi_1+\lambda_2\mathrm{d}F(x)\xi_2 \tag{3.1.20}$$

其中，$\xi_1,\xi_2\in T_xM,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$。

(2) 复合映射的微分满足链式法则，即

$$\mathrm{d}(G\circ F)(x)=\mathrm{d}G(F(x))\circ\mathrm{d}F(x) \tag{3.1.21}$$

其中，$F:M\to N,G:N\to P$ 皆为可微映射。

(3) 若 $F:M\to N$ 是 C^r 映射，则 $\mathrm{d}F(x):T_xM\to T_{F(x)}N$ 是 C^{r-1} 映射。

在实际应用中往往用方向微分算子去表示切向量。令 X 和 Y 分别代表与切向量 $\xi=[\gamma]$

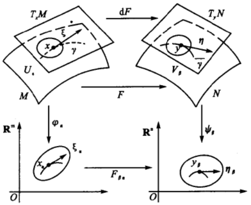


图 3.12 切映射

$\in T_xM$ 和 $\eta=[F\circ\gamma]\in T_{F(x)}N$ 相应的方向微分算子。设 $f:N\to\mathbf{R}$ 是 N 上的可微函数。于是 f 在 $y=F(x)$ 处沿 $\bar{\gamma}=F\circ\gamma$ 的方向导数为

$$Yf(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\bar{\gamma}(t))\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(F\circ\gamma(t))\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ F)(\gamma(t))\Big|_{t=0}=X(f\circ F)(x)\tag{3.1.22}$$

考虑到 $\eta=\mathrm{d}F(x)\xi$，即 $Y=\mathrm{d}F(x)X$，故

$$Yf(y)=(\mathrm{d}F(x)X)f(y)\tag{3.1.23}$$

比较式(3.1.22)和式(3.1.23)的右端可得关系式

$$(\mathrm{d}F(x)X)f(y)=X(f\circ F)(x)\tag{3.1.24}$$

即

$$(F_*X)f(y)=X(f\circ F)(x)$$

其中，$X\in T_xM$，$y=F(x)$。式(3.1.25)亦可作为映射微分 $\mathrm{d}F(x)$ 的另一定义。

设 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (V_β,ψ_β) 分别为 M 和 N 上包含 x 和 $y=F(x)$ 的坐标图，$F(U_\alpha)\subset V_\beta$。它们分别有局部坐标 $\{x_{\alpha i}\}$ 和 $\{y_{\beta j}\}$，记 $\boldsymbol{y}_\beta=F_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha)=\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1}(\boldsymbol{x}_\alpha)$。取切空间 T_xM 的基底 $\{\partial/\partial x_{\alpha i}|_x\}$ 和 $T_{F(x)}N$ 的基底 $\{\partial/\partial y_{\beta j}|_y\}$，方向微分算子 X 和 $Y=\mathrm{d}F(x)X$ 分别写成 $X=\sum_{i=1}^m\xi_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}\Big|_x$，$Y=\sum_{j=1}^n\eta_{\beta j}\frac{\partial}{\partial y_{\beta j}}\Big|_y$。

我们建立 X 和 Y 的分量 $\{\xi_{\xi i}\}$ 和 $\{\eta_{\beta j}\}$ 之间的关系。设 $f:N\to\mathbf{R}$ 是 N 上的任何可微函数。一方面，由式(3.1.3)有

$$Yf(y)=\sum_{j=1}^n\eta_{\beta j}\frac{\partial f}{\partial y_{\beta j}}(y)=\sum_{j=1}^n\eta_{\beta j}\frac{\partial f_\beta}{\partial y_{\beta j}}(\boldsymbol{y}_\beta)\tag{3.1.25}$$

另一方面，由式(3.1.22)有

$$Yf(y)=X(f\circ F)(x)=X((f\circ\psi_\beta^{-1})\circ(\psi_\beta\circ F\circ\varphi_\alpha^{-1})\circ\varphi_\alpha(x))=\sum_{i=1}^m\xi_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha i}}(f_\beta\circ F_{\beta\alpha}(\boldsymbol{x}_\alpha))=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial y_{\beta j}}(\boldsymbol{y}_\beta)\frac{\partial y_{\beta j}}{\partial x_{ai}}(\boldsymbol{x}_a)\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\frac{\partial y_{\beta j}}{\partial x_{ai}}(\boldsymbol{x}_a)\right)\frac{\partial f_\beta}{\partial y_{\beta j}}(\boldsymbol{y}_\beta) \tag{3.1.26}$$

比较式(3.1.25)和式(3.1.26)便得到关系式

$$\eta_{\beta j}=\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\frac{\partial y_{\beta j}}{\partial x_{ai}}(\boldsymbol{x}_a) \tag{3.1.27}$$

它亦可写成

$$\boldsymbol{\eta}_\beta=F'_{\beta a}(\boldsymbol{x}_a)\boldsymbol{\xi}_a \tag{3.1.28}$$

这表明 Jacobi 矩阵 $F'_{\beta a}(\boldsymbol{x}_a)$是映射 F 的微分 $\mathrm{d}F(x)$的局部表示。

利用式(3.1.27)可给出另一个重要公式

$$\mathrm{d}F(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_{ai}}\bigg|_x\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_{\beta j}}{\partial x_{ai}}(\boldsymbol{x}_a)\frac{\partial}{\partial y_{\beta j}}\bigg|_y \tag{3.1.29}$$

其证明留作习题。

$N=\mathbf{R}$ 是一种重要的情形，此时可建立流形上的函数的微分概念。设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是可微函数。对 $x\in M$，记 $s=f(x)\in\mathbf{R}$。设(U_a,φ_a)为 M 上包含 x 的坐标图，局部坐标为$\{x_{ai}\}$。取切空间 T_xM 的基底$\{\partial/\partial x_{ai}|_x\}$和 $T_{f(x)}\mathbf{R}$ 的基底$\{\mathrm{d}/\mathrm{d}s|_s\}$。对于 $X\in T_xM$，因为 $\mathrm{d}f(x)X\in T_{f(x)}\mathbf{R}$，故按定义 3.1.16 有

$$\mathrm{d}f(x)X=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_s,\quad \mu\in\mathbf{R} \tag{3.1.30}$$

为了确定 μ，记函数 $I(s)=s$，$\forall s\in\mathbf{R}$，于是 $\mu=\mu\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}I(s)=(\mathrm{d}f(x)X)I(s)$。再利用式(3.1.24)，得到 $\mu=X(I\circ f)(x)=Xf(x)$。

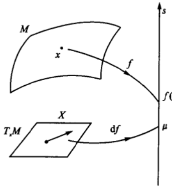


图 3.13　函数微分

考虑到切空间 $T_{f(x)}\mathbf{R}$ 是与 $\mathbf{R}$ 同构的一维线性空间，习惯上为简便起见，我们可将 $T_{f(x)}\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 等同起来(即令 $\mathrm{d}f(x)X$ 直接等于数 μ)去重新建立函数微分的概念，于是有如下定义。

定义 3.1.17　映射 $\mathrm{d}f(x):T_xM\to\mathbf{R},X\mapsto\mu$ 称为**函数 f 在 x 处的微分**，即有

$$\mathrm{d}f(x)X\overset{\mathrm{d}}{=}Xf(x),\quad \forall X\in T_xM \tag{3.1.31}$$

按式(3.1.31)定义的函数微分与式(3.1.30)略有差别，但与经典分析中函数微分的定义保持一致。下面建立函数微分的局部表示。

令 $X=\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\dfrac{\partial}{\partial x_{ai}}\bigg|_x$，则由式(3.1.31)有

$$\mathrm{d}f(x)X=Xf(x)=\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\frac{\partial f(x)}{\partial x_{ai}} \tag{3.1.32}$$

若在式(3.1.32)中取 $f(x)=x_{aj}(x)$(局部坐标函数)，可得

$$\mathrm{d}x_{aj}(x)X=\sum_{i=1}^{m}\xi_{ai}\frac{\partial x_{aj}}{\partial x_{ai}}=\xi_{aj},\qquad j=1,\cdots,m \tag{3.1.33}$$

将式(3.1.33)代入式(3.1.32)，得到

$$\mathrm{d}f(x)X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_{ai}} \mathrm{d}x_{ai} X$$

上式对任何 $X \in T_x M$ 成立，故有局部表达式

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_{ai}} \mathrm{d}x_{ai} \tag{3.1.34}$$

这个公式显然是微积分学中多元函数的微分公式在流形上的推广。

由函数微分的定义(3.1.31)知，对于函数 f, g 可以得到以下性质：

(1) $\mathrm{d}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) = \lambda_1 \mathrm{d}f(x) + \lambda_2 \mathrm{d}g(x)$，其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$。

(2) $\mathrm{d}(fg)(x) = f\mathrm{d}g(x) + g\mathrm{d}f(x)$。

最后，类似切空间和切丛那样，我们建立流形的余切空间和余切丛的概念。

定义 3.1.18　m 维微分流形 M 在 x 处的切空间 $T_x M$ 上的一个齐次线性函数 $\omega: T_x M \to \mathbf{R}, X \mapsto \omega(X)$ 称为 M 在 x 处的一个**余切向量**(后面亦称为 **1 次微分形式**)①。在 x 处的全体余切向量组成的集合是切空间 $T_x M$ 的对偶空间，因此它也是一个 m 维线性空间，称为 M 在 x 处的**余切空间**，记作 $T_x^* M$。$\dim T_x^* M = \dim M = m$。$\omega(X)$ 就是余切向量 ω 与切向量 X 的对偶积，亦可记为 $\langle \omega, X \rangle$。

余切向量 ω 具有线性性质，即对于任何切向量 $X_1, X_2 \in T_x M$，有

$$\omega(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 \omega(X_1) + \lambda_2 \omega(X_2), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R} \tag{3.1.35}$$

为了寻求余切空间的基底和余切向量的分量表达式，考虑 M 上包含 x 的坐标图 (U_a, φ_a)，局部坐标为 $\{x_{ai}\}$。由函数微分的定义(见定义 3.1.17)和线性性质知道，流形 M 上的函数 f 在 x 处的微分 $\mathrm{d}f(x)$ 是 $T_x M$ 上的一个齐次线性函数，即 $\mathrm{d}f(x) \in T_x^* M$。事实上，对任何切向量 $X_1, X_2 \in T_x M$ 和 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x)(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) &= (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) f(x) = \\ &\lambda_1 X_1 f(x) + \lambda_2 X_2 f(x) = \\ &\lambda_1 \mathrm{d}f(x) X_1 + \lambda_2 \mathrm{d}f(x) X_2\end{aligned}$$

特别地，各局部坐标函数的微分 $\mathrm{d}x_{ai}(x) \in T_x^* M, i = 1, \cdots, m$。我们在下面证明，$\mathrm{d}x_{a1}(x), \cdots, dx_{am}(x)$ 是线性无关的。事实上，若有一组数 $c_1, \cdots, c_m$ 使 $c_1 \mathrm{d}x_{a1}(x) + \cdots + c_m \mathrm{d}x_{am}(x) = 0$。令上式分别作用在切向量 $\partial/\partial x_{ai}|_x$ 上 $(i = 1, \cdots, m)$。考虑到由式(3.1.33)有对偶正交关系

$$\mathrm{d}x_{aj}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_{ai}} \right) \bigg|_x = \delta_{ij} \tag{3.1.36}$$

其中，δ_{ij} 为 Kronecker 记号，于是可知 $c_j = 0 (j = 1, \cdots, m)$。故 $\{\mathrm{d}x_{ai}\}$ 的线性无关性得证。

因为余切空间 $T_x^* M$ 是 m 维的，所以 $\{\mathrm{d}x_{a1}(x), \cdots, \mathrm{d}x_{am}(x)\}$ 是它的一个基底，也是切空间 $T_x M$ 的基底 $\{\partial/\partial x_{a1}|_x, \cdots, \partial/\partial x_{am}|_x\}$ 的对偶基。$\{\mathrm{d}x_{a1}, \cdots, \mathrm{d}x_{am}\}$ 称为**余切空间 $T_x^* M$ 的自然基**。显然式(3.1.34)就是函数微分 $\mathrm{d}f(x)$ 在此基底中的局部表达式。一般地，任何余切向量 $\omega \in T_x^* M$ 有局部表达式

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{d}x_{ai} \tag{3.1.37}$$

容易证明，若 $(U_a, \varphi_a), (U_\beta, \varphi_\beta)$ 是 M 上含 x 的两个坐标图，它们分别有局部坐标 $\{x_{ai}\}$ 和 $\{x_{\beta j}\}$，

① 余切向量是由切空间上的齐次线性函数定义的抽象"向量"。类似切向量那样，余切向量亦不用黑体字符表示。

则对 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，余切空间 T_x^*M 的两个基底 $\{\mathrm{d}x_{\alpha i}\}$ 和 $\{\mathrm{d}x_{\beta j}\}$ 之间满足关系式

$$\mathrm{d}x_{\alpha i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial x_{\beta j}}(\boldsymbol{x}_\beta)\mathrm{d}x_{\beta j}\tag{3.1.38}$$

若余切向量 ω 在这两个局部坐标系中分别表示为 $\omega=\sum_{i=1}^{m}a_i\mathrm{d}x_{\alpha i}=\sum_{j=1}^{m}b_j\mathrm{d}x_{\beta j}$，则其分量之间满足关系式

$$a_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}(\boldsymbol{x}_\alpha)b_j\tag{3.1.39}$$

通常称满足分量变换关系(3.1.39)的向量为**协变(即共变)向量**。

定义 3.1.19　流形 M 上各点的余切空间的并集称为 M 的**余切丛**，记作 T^*M，即 $T^*M=\bigcup_{x\in M}T_x^*M$。

可以证明，当 M 是 m 维 C^k 流形时($k\geqslant1$)，T^*M 是 $2m$ 维 C^{k-1} 流形。T^*M 不是紧致的。余切丛 T^*M 由流形 M 上各点的全体余切向量构成。设点 x 的局部坐标为 $(x_1,\cdots,x_m)$，余切向量 ω 的分量为 $(a_1,\cdots,a_m)$，则余切从 T^*M 的元素的局部坐标为 $(x_1,\cdots,x_m;a_1,\cdots,a_m)$。

我们还可以类似定义 3.1.15 那样去定义流形 M 上的余切向量场。

设 m 个自由度的保守力学系统的位形空间是 m 维微分流形 M。在 M 的开子集 U 上取局部坐标 $(q_1,\cdots,q_m)$(即广义坐标)，则系统的速度分量为 $(\dot q_1\cdots,\dot q_m)$(即广义速度)。设该力学系统有 Lagrange 函数 $L(q_1,\cdots,q_m;\dot q_1,\cdots,\dot q_m)$。在 Hamilton 力学体系中，引入**广义动量** $p_i=\partial L/\partial\dot q_i(i=1,\cdots,m)$，于是一个力学系统的运动状态可由广义坐标和广义动量共同描述。考虑到 L 中与 $\{\dot q_i\}$ 有关的部分通常是关于 $\{\dot q_i\}$ 的二次齐次函数，故 p_i 是关于 $\{\dot q_i\}$ 的线性齐次函数。若取 $(p_1,\cdots,p_m)$ 作为分量去构造流形 M 在某点的一个余切向量 $\sum_{i=1}^{m}p_i\mathrm{d}q_i$，于是 M 在该处的余切空间在力学上表示动量空间。M 上各点的动量空间全体组成余切丛 T^*M，其元素的局部坐标为 $(q_1,\cdots,q_m;p_1,\cdots,p_m)$，称为**正则变量**。由此可见余切丛是力学系统在 Hamilton 体系中的状态空间(即**相空间**)。

其实力学系统的状态变量还有其他可能的选取方式，但是采用 Hamilton 正则变量去描述保守力学系统是最适宜的，因为此时系统的动力学方程(即 Hamilton 正则方程)具有简单的反对称形式

$$\dot q_i=\partial H/\partial p_i,\quad \dot p_i=-\partial H/\partial q_i,\qquad i=1,\cdots,m$$

其中，$H=H(q,p)$ 为 Hamilton 函数。它反映保守力学系统在取余切丛 T^*M 作为状态空间时，具有一种独特的几何结构——辛几何结构。这种性质对保守力学系统动力学理论研究和数值计算的发展有着十分重要的作用(参看 3.2.10)。

3.1.5　Riemann 流形

Riemann 流形是一类重要的微分流形，在其上可定义内积、弧长、距离、交角、曲率等几何概念，因此它是欧氏内积空间的一种自然推广。

定义 3.1.20　设 M 为 m 维微分流形。对每一点 $x\in M$ 的切空间 T_xM 赋予一个内积 $g_x(X,Y)$，$\forall X,Y\in T_xM$，使其成为一个内积空间。此外，还要求 g_x 作为 x 的函数是光滑的。我们称内积函数 g_x 为 M 上的一个 **Riemann 结构**(或 **Riemann 度量**)，于是 M 成为一个 **Riemann**

流形，记为(M,g)。

根据上述定义，内积 $g_x: T_xM\times T_xM\to\mathbf{R}$ 是一个对称正定双线性型，且是 x 的光滑函数，因此它应具有如下性质：

(1) 对任何切向量 $X,Y\in T_xM$ 有

$g_x(X,Y)$关于 X,Y 都是线性的(双线性)；

$g_x(X,Y)=g_x(Y,X)$(对称性)；

$g_x(X,X)\geqslant 0$，且 $g_x(X,X)=0$ 当且仅当 $X=0$ 时才成立(正定性)。

(2) 对 M 上任何光滑向量场 $X(x),Y(x)$，有

$$g_x(X(x),Y(x))\in C^\infty(M)$$

Riemann 流形是具有 Riemann 结构的微分流形，除了流形本身的微分结构之外，还增加了一个 Riemann 结构。可以证明，对一个给定的微分流形 M，总能赋予一个 Riemann 结构 g_x，使其成为一个 Riemann 流形，且有无穷多种方式去选取 Riemann 结构。

下面讨论 Riemann 结构的局部坐标表示。设 U 为 M 上含 x 的坐标邻域，局部坐标为 $\{x_i\}$。取切空间 T_xM 的一个基底$\{\partial/\partial x_i|_x\}$，并记

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x\right)\tag{3.1.40}$$

对 $X,Y\in T_xM$，如果 $X=\sum\limits_{i=1}^m\xi_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x,Y=\sum\limits_{j=1}^m\eta_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x$，则有

$$\begin{aligned}g_x(X,Y)&=g_x\left(\sum_{i=1}^m\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x,\sum_{j=1}^m\eta_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x\right)=\\&\sum_{i,j=1}^m g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x,\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x\right)\xi_i\eta_j=\\&\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x)\xi_i\eta_j\end{aligned}\tag{3.1.41}$$

我们还可以利用内积 g_x 去定义 T_xM 的范数如下

$$\|X\|_x\overset{\mathrm{d}}{=}(g_x(X,X))^{1/2}=\left(\sum_{i,j=1}^m g_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{1/2}\tag{3.1.42}$$

由此可见流形 M 的 Riemann 结构由 Riemann 度量矩阵$(g_{ij}(x))$决定。可以证明式(3.1.41)和式(3.1.42)的表达式与局部坐标系的选取无关，即有坐标不变性。此外，由 Riemann 结构的对称性和正定性知道$(g_{ij}(x))$是一个对称正定矩阵。

设 $\gamma(t)(t\in J=[a,b])$是 Riemann 流形 M 上的一条光滑曲线，则在 M 上沿曲线 γ 的切向量为 $X=\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$，其长度为 $\|X\|=\left(\sum\limits_{i,j=1}^m g_{ij}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}$，其中各量在曲线 $\gamma(t)$上取值。曲线 γ 的弧长定义为

$$s(\gamma)\overset{\mathrm{d}}{=}\int_a^b\|X\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\sum_{i,j=1}^m g_{ij}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right)^{1/2}\mathrm{d}t\tag{3.1.43}$$

显然，曲线 γ 的弧长微分的平方为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^m g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j\tag{3.1.44}$$

设 p,q 为 Riemann 流形 M 上的任意两点，则把在 M 上连接 p,q 两点的所有可能的分段

光滑曲线γ_{pq}的长度中最短者定义为点p与q之间的距离

$$d(p,q)\stackrel{\mathrm{d}}{=}\inf s(\gamma_{pq}) \tag{3.1.45}$$

在上述距离定义下，Riemann 流形成为一个度量空间。

在 Riemann 流形的切空间上，我们可以利用内积去定义两个切向量X和Y的交角θ，使得

$$\cos\theta=\frac{g_x(X,Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|},\qquad X,Y\in T_xM \tag{3.1.46}$$

例 3.1.15 欧氏内积空间 $\mathbf{R}^m$ 是一个最简单的m维 Riemann 流形。对于直角坐标系$\{x_i\}$，其 Riemann 结构由$g_{ij}=\delta_{ij}(i,j=1,\cdots,m)$给出，并有$\mathrm{d}s^2=\sum\limits_{i=1}^{m}\mathrm{d}x_i^2$。欧氏内积空间的任何一个(嵌入)子流形都是 Riemann 流形，其 Riemann 结构可由所嵌入的欧氏空间的度量诱导而成。例如二维单位球面$M=S^2$是$\mathbf{R}^3$的子流形。在$\mathbf{R}^3$中取直角坐标系$\{x_1,x_2,x_3\}$，则有

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2 \tag{3.1.47}$$

在M的开集U上取局部球坐标系$\{u_1,u_2\}$，其中$u_1=\varphi,u_2=\theta$。根据$x_1=\cos\varphi\sin\theta,x_2=\sin\varphi\sin\theta,x_3=\cos\theta$，我们由式(3.1.47)得到

$$\mathrm{d}s^2=\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\theta^2 \tag{3.1.48}$$

由此可见M是一个 Riemann 流形，且$g_{11}=\sin^2\theta,g_{22}=1,g_{12}=g_{21}=0$。

最后指出，按照上面的定义，切向量的范数、交角和曲线的弧长都与坐标邻域的取法无关，因而都是几何不变量。由此可见 Riemann 流形的上述几何概念是合理的。

一般地说，我们要在微分流形上作大范围分析的研究，单靠流形本身的微分结构还是不够的，通常还需要在流形上给出一个 Riemann 结构，从而可以建立曲线的弧长、切向量场的协变微分、Riemann 曲率张量和仿射联络等概念，因此 Riemann 流形在大范围分析研究中占有特别重要的地位。

3.2 微分形式

3.2.1 Grassmann 代数

作为微分形式的预备知识，先介绍 Grassmann 代数的概念。

设V是一个n维实线性空间，现在构造一个包含V和$\mathbf{R}$元素的代数$G(V)$。我们对V的元素引进一种满足反交换关系的乘法运算$\wedge$①，即对任何$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$，其乘积满足

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{x} \tag{3.2.1}$$

此外它还满足乘法的分配律和结合律：对$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$有

$$\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{z},(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z} \tag{3.2.2}$$

$$(\lambda\boldsymbol{x})\wedge\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\wedge(\lambda\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}),\quad\lambda\in\mathbf{R} \tag{3.2.3}$$

$$(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\wedge(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z} \tag{3.2.4}$$

---

① 我们在本章中用的符号“$\wedge$”是 E. Cartan 在发展外微分方法中所约定的记号，它表示一种专门的乘法运算——外积，这与通常在数理逻辑中的$\wedge$含意不同。

在(3.2.1)中令 $y=x$，可得

$$x \wedge x = 0, \qquad \forall x \in V \tag{3.2.5}$$

满足关系式(3.2.1)～(3.2.4)的乘法称为**外积**，又称**楔积**。下面设在 V 中存在一个基底$\{e_1, \cdots, e_n\}$，使得 $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0$。

例 3.2.1 设 V 是一个二维线性空间。取 V 的一个基底$\{e_1, e_2\}$，使得 $e_1 \wedge e_2 \neq 0$。对于 $x, y \in V$，有 $x = a_1 e_1 + a_2 e_2$，$y = b_1 e_1 + b_2 e_2$。于是利用式(3.2.1)～式(3.2.3)和式(3.2.5)可得外积表达式为

$$x \wedge y = (a_1 e_1 + a_2 e_2) \wedge (b_1 e_1 + b_2 e_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2$$

我们知道，在平面解析几何中矢积 $x \times y$ 亦有类似的表达式，因此我们可以认为两个向量的外积与矢积其实是一致的。这个结论对 n 维线性空间亦成立。

利用 1 和 V 的基底$\{e_1, \cdots, e_n\}$，我们可得下列不同的非零元素：

1；$e_i (i=1, \cdots, n)$；

$e_{i_1} \wedge e_{i_2} (1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n)$；

$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge e_{i_3} (1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n)$；

$\vdots$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$

这些元素全体组成一个集合 B，其中的元素的总个数为

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

现在取集 B 的元素的实系数有限线性组合去构成一个实线性空间 $G(V)$。可以证明集 B 的元素是线性无关的，从而集 B 可以作为 $G(V)$ 的一个基底，且 $\dim G(V) = 2^n$。接着在 $G(V)$ 中利用外积去定义乘法运算，并取 1 作为乘法恒等元，于是在 $G(V)$ 中可进行元素的加法、数乘和外积三种运算，使之成为一个代数。通常称 $G(V)$ 为线性空间 V 的**外代数**，或称 **Grassmann代数**。

$G(V)$ 可以表示为一组线性子空间的直和。为此引进如下的子空间定义：

V^0 为由 1 张成的子空间(即 $\mathbf{R}$)，$\dim V^0 = 1$。

V^1 为由全体 $e_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 张成的子空间(即 V)，$\dim V^1 = n$。

$\vdots$

V^p 为由全体 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n)$ 张成的子空间，$\dim V^p = \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\ (n-p)!}$。

$\vdots$

V^n 为由 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ 张成的子空间，$\dim V^n = 1$。于是有

$$G(V) = V^0 \oplus V^1 \oplus \cdots \oplus V^n \tag{3.2.6}$$

我们把 $V^p (0 \leqslant p \leqslant n)$ 中的元素称为 **p 次外代数式**。对 $1 \leqslant p \leqslant n$，$V^p$ 的元素可写成如下的标准形式：

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \quad a_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}\in V^p$，$\boldsymbol{\beta}\in V^q$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=(-1)^{pq}\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha} \tag{3.2.7}$$

事实上，由于线性性质，只需对单项式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p}$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_q}$ 加以证明即可。于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\beta}=&(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\boldsymbol{e}_{i_p})\wedge(\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_q})=\\&(-1)^p\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p})\wedge(\boldsymbol{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_q})=\\&\vdots\\&(-1)^{pq}(\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_q})\wedge(\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p})=\\&(-1)^{pq}\boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

外代数与行列式有密切的关系。设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p\in V(1\leqslant p\leqslant n)$，它们可写成 $\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_j$，$i=1,\cdots,p$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\alpha}_p=\sum_{j_1<\cdots<j_p}\begin{vmatrix}a_{1j_1}&\cdots&a_{1j_p}\\\vdots&&\vdots\\a_{pj_1}&\cdots&a_{pj_p}\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_p} \tag{3.2.8}$$

特别是当 $p=n$ 时有

$$\boldsymbol{\alpha}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n \tag{3.2.9}$$

上述结果的证明留作习题。例 3.2.1 是式(3.2.9)的特殊情形。

3.2.2 微分形式

设 M 是一个 n 维微分流形，$x\in M$，U 为 M 上含 x 的一个坐标邻域，x 的局部坐标为 $(x_1,\cdots,x_n)$。令 $\Lambda_x(M)=T_x^*M$ 为 M 在 x 处的余切空间，它的一个基底为 $\{dx_1,\cdots,dx_n\}$。取 T_x^*M 的 Grassmann 代数，则有

$$G(T_x^*M)=\Lambda_x^0(M)\oplus\Lambda_x^1(M)\oplus\cdots\oplus\Lambda_x^n(M)$$

其中，$\Lambda_x^0(M)=\mathbf{R}$ 是一维线性子空间，其元素为 a。

$\Lambda_x^1(M)=T_x^*M$ 是以 $\mathrm{d}x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为基底的 n 维线性子空间，其元素为 $\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}x_i$。

$\vdots$

$\Lambda_x^p(M)$ 是以 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n)$ 为基底的 $n!/[p!(n-p)!]$ 维线性子空间，其元素为 $\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$。

$\vdots$

$\Lambda_x^n(M)$ 是以 $\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 为基底的一维线性子空间，其元素为 $a_{1\cdots n}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$。

定义 3.2.1 $\Lambda_x^p(M)$ 的元素 $(1\leqslant p\leqslant n)$

$$\omega^p=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} \tag{3.2.10}$$

称为 M 在 x 处的一个 p 次(外)微分形式(以后简称 p-形式)。$\Lambda_x^p(M)$ 称为 M 在 x 处的 p-形式空间。

定义 3.2.2 流形 M 上各点的 p -形式空间的并集称为 **M 的 p -形式丛**，记作 $\Lambda^p(M)$，即 $\Lambda^p(M)=\bigcup_{x\in M}\Lambda_x^p(M)$。$\Lambda^p(M)$ 由流形 M 上各点的全体 p -形式构成。

定义 3.2.3 设对每点 $x\in M$ 给定一个 p -形式 $\omega^p(x)$，则称映射 $\omega^p:M\to\Lambda^p(M)$，$x\mapsto(x,\omega^p(x))$ 为**流形 M 上的一个 p -形式（场）**。流形 M 上全体 p -形式（场）的集合记为 $\mathscr{F}^p(M)$。

在坐标邻域 U 内，M 上的 p -形式 $\omega^p(1\leqslant p\leqslant n)$ 有局部表达式

$$\omega^p(x)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

以后假设在 M 的各个坐标邻域中，$\omega^p(x)$ 的系数函数 $a_{i_1\cdots i_p}(x)$ 都是 C^∞ 的。有时 $\omega^p(1\leqslant p\leqslant n)$ 也写成另一局部表达式

$$\omega^p(x)=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

其中，$i_1,\cdots,i_p$ 互不相同，系数满足关系式 $a_{\sigma(j_1,\cdots,j_p)}(x)=(-1)^{s(\sigma)}a_{j_1,\cdots,j_p}(x)$，其中 $\sigma(j_1,\cdots,j_p)$ 是 $\{j_1,\cdots j_p\}$ 的一个置换，$j_1<\cdots<j_p$，$s(\sigma)$ 为 $\sigma(j_1,\cdots,j_p)$ 中逆序的数目。

特别地，M 上的 1 -形式 $\omega^1(x)=\sum_{i=1}^n a_i(x)\mathrm{d}x_i$，它就是 M 上的余切向量场，亦称为 Pfaff **形式**。M 上的 n -形式为 $\omega^n(x)=a_{1\cdots n}(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$，亦称为**体形式**。通常还将 M 上的实 C^∞ 函数 $f(x)$ 称为 M 上的 **0 -形式**。此外规定：当 $p>n$ 时，$\omega^p(x)=0$。

M 上的微分形式可以定义下列代数运算。设 ω,η 是 M 上的 p -形式①，则定义以下线性运算：

$$(\omega+\eta)(x)=\omega(x)+\eta(x)$$
$$(\lambda\omega)(x)=\lambda\omega(x),\quad \lambda\in\mathbf{R}$$
$$(f\omega)(x)=f(x)\omega(x),\quad f\in C^\infty(M)$$

设 ω,θ 分别是 M 上的 p -形式 q -形式，则定义外积

$$(\omega\wedge\theta)(x)=\omega(x)\wedge\theta(x)$$

易见 $(\omega\wedge\theta)(x)$ 是 M 上的 $(p+q)$ -形式。外积运算满足乘法的分配律和结合律，且由式(3.2.7)有

$$\omega\wedge\theta(x)=(-1)^{pq}\theta\wedge\omega(x)\tag{3.2.11}$$

如果 $\omega(x)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$，$\theta(x)=\sum_{j_1<\cdots<j_q}b_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$，则有

$$(\omega\wedge\theta)(x)=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p\\ j_1<\cdots<j_q}}a_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_q}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\tag{3.2.12}$$

M 上的微分形式还可定义为 M 上的切向量场的多重反对称线性函数。

首先，考虑 M 上的 1 -形式 ω（即余切向量场），并取 M 上的向量场 X。对给定的 $x\in M$，有 $X(x)\in T_xM$，$\omega(x)\in T_x^*M$。于是由定义 3.1.18 可以给出

① 以后除非必要，一般不在微分形式的记号上标明其次数 p。

$$\omega(X)(x) = \omega(x)(X(x)), \qquad x \in M \tag{3.2.13}$$

因此 ω 是 X 的线性函数，且易证对函数 $f,g\in C^{\infty}(M)$ 和 M 上的向量场 X,Y 有

$$\omega(fX + gY) = f\omega(X) + g\omega(Y) \tag{3.2.14}$$

其次，令 $\omega_1,\cdots,\omega_p$ 为 M 上的 1 -形式，$X_1,\cdots X_p$ 为 M 上的向量场。根据外积的反对称性，我们定义 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p$ 为 $X_1,\cdots,X_p$ 的 p 重反对称线性函数

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(X_1,\cdots,X_p) \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{\sigma\in\varphi(p)} (-1)^{s(\sigma)}\omega_1(X_{i_1})\cdots\omega_p(X_{i_p}) = \det(\omega_i(X_j)) \tag{3.2.15}$$

其中，$\varphi(p)$是$\{1,\cdots,p\}$的置换群，$\sigma=\{i_1,\cdots,i_p\}$，$s(\sigma)$是 σ 中的逆序数。

再次，由于任何 p -形式都可以分解为 p 个 1 -形式的外积之和，故对 $\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}$ 有 $\omega(X_1,\cdots,X_p) = \sum_{i_1,\cdots,i_p}(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p})(X_1,\cdots X_p)$。由此可见，$p$ -形式 ω 是 $X_1,\cdots,X_p$ 的 p 重反对称线性函数。

最后，可以证明，设 ω 和 θ 分别为 M 上的 p -形式和 q -形式，则有

$$(\omega \wedge \theta)(X_1,\cdots,X_{p+q}) = \sum_{\sigma\in\varphi(p+q)} (-1)^{s(\sigma)}\omega(X_{i_1},\cdots,X_{i_p})\cdot\theta(X_{i_{p+1}},\cdots,X_{i_{p+q}}) \tag{3.2.16}$$

例 3.2.2 设 p -形式 $\omega=\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$，则

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\right)=(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_{j_p}}\right)= \det\left(\mathrm{d}x_{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_l}}\right)\right)=(-1)^{s_1+s_2}\delta_{i_1j_1}\cdots\delta_{i_pj_p}$$

其中，s_1 为$\{i_1,\cdots,i_p\}$中的逆序数，s_2 为$\{j_1,\cdots,j_p\}$中的逆序数。上式是式(3.1.36)的推广。

设 U_α，U_β 是 M 上含 x 的两个坐标邻域，它们分别有局部坐标$\{x_{\alpha i}\}$和$\{x_{\beta j}\}$。如果 M 上的 p -形式 $\omega(x)$在这两个局部坐标系中分别表示为 $\omega(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{\alpha i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\alpha i_p} = \sum_{j_1<\cdots<j_p} b_{j_1\cdots j_p}(x)\mathrm{d}x_{\beta j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\beta j_p}$，则有变换关系式

$$b_{j_1\cdots j_p}(x) = \sum_{i_1<\cdots<i_p}\frac{\partial(x_{\alpha i_1},\cdots,x_{\alpha i_p})}{\partial(x_{\beta j_1},\cdots,x_{\beta j_p})}a_{i_1\cdots i_p}(x) \tag{3.2.17}$$

3.2.3 外微分

外微分是微分形式的最重要的基本运算。它是微分与外积相结合的一种运算，也是通常的函数微分概念的自然推广。

我们知道，对流形 M 上的 0 -形式 f(即 $f\in C^{\infty}(M)$)，由函数微分的表达式(3.1.34)得

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \tag{3.2.18}$$

可知 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的 1 -形式。上式表明 d 是一个由 $\mathscr{F}^0(M)$到 $\mathscr{F}^1(M)$的映射。下面将 d 推广为从 p -形式到(p+1)-形式的运算。

定义 3.2.4 设 U 为流形 M 上含 x 的坐标邻域，局部坐标为$\{x_i\}$。如果 M 上的 p -形式

在 U 中写成 $\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$，则定义**外微分** $\mathrm{d}\omega$ 如下：

$$\mathrm{d}\omega \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i_1<\cdots<i_p} \mathrm{d}a_{i_1\cdots i_p}(x) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} =$$

$$\sum_{i_1<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \tag{3.2.19}$$

易见 $\mathrm{d}\omega$ 是一个 $(p+1)$-形式。

我们可以证明式(3.2.19)不依赖于局部坐标的选择，且它在 M 的任一个坐标邻域都成立，因此可以逐步将 d 的定义延拓到整个流形 M 上，从而给出映射 $\mathrm{d}:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{p+1}(M)$，$\omega\mapsto \mathrm{d}\omega$ 在整个流形上的定义。式(3.2.18)可看作式(3.2.19)在 $p=0$ 时的特殊情形。

外微分算子 d 有下列重要性质：

(1) 对 $\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$ 有

$$\mathrm{d}(\lambda_1\omega+\lambda_2\theta) = \lambda_1\mathrm{d}\omega+\lambda_2\mathrm{d}\theta \tag{3.2.20}$$

这表明 d 是线性算子。式(3.2.20)可由定义 3.2.4 直接证得。

(2) 对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，$\theta\in\mathscr{F}^q(M)$，有

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta) = \mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta \tag{3.2.21}$$

由于算子 d 的线性性质，我们只需对单项式 $\omega=a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$，$\theta=b(x)\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ 证之。于是有

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta) = \mathrm{d}(ab\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a\frac{\partial b}{\partial x_k}+b\frac{\partial a}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q} =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)\wedge(b\,\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q})+$$

$$(-1)^p(a\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p})\wedge\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\right)=$$

$$\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\theta$$

特别地，当 $p=q=0$ 时，即对 $f,g\in C^\infty(M)$，式(3.2.21)写成 $\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$，这就是通常函数乘积的微分公式(**Leibniz 法则**)。

(3) $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$，即对任何 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，都有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0 \tag{3.2.22}$$

我们只需对单项式 $\omega=a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ 证之。事实上，一方面有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\right)=$$

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 a}{\partial x_k\partial x_j}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

另一方面，在上式中互换 j,k 记号的位置，有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 a}{\partial x_j\partial x_k}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p} =$$

$$-\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_j}\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

比较上述两式可得 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$。

此外，容易由式(3.2.19)证明，当 $p\geqslant n$ 时，对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 必有 $\mathrm{d}\omega=0$。

作为外微分的一个重要应用，我们用算子 d 去表示向量分析的概念。

例 3.2.3　考虑 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$，取它的一个直角坐标系 (x,y,z)。我们列出所有的微分形式及其外微分如下：

0-形式　$\omega^0=f(x,y,z),f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\mathrm{d}\omega^0=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{3.2.23}$$

1-形式　$\omega^1=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z,\ a,b,c\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^1 &=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial a}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x+\\ &\left(\frac{\partial b}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial b}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial b}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y+\\ &\left(\frac{\partial c}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial c}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial c}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z=\\ &\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

2-形式　$\omega^2=a\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+b\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+c\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\ a,b,c\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^2 &=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial a}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial a}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\\ &\left(\frac{\partial b}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial b}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial b}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+\\ &\left(\frac{\partial c}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial c}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial c}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y=\\ &\left(\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

3-形式　$\omega^3=a\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\ a\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$

$$\mathrm{d}\omega^3=0 \tag{3.2.26}$$

利用上述结果，我们可以将向量分析中的梯度、散度和旋度等概念用微分形式统一表示。例如函数 f 的微分 $\mathrm{d}f$ 的系数构成的向量(见式(3.2.23)) $(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y,\partial f/\partial z)$ 就是函数 f 的梯度 $\mathbf{grad}f$。1-形式 $\omega^1=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}x+c\mathrm{d}z$ 的外微分 $\mathrm{d}\omega^1$ 的系数构成的向量(见式(3.2.24)) $(\partial c/\partial y-\partial b/\partial z,\partial a/\partial z-\partial c/\partial x,\partial b/\partial x-\partial a/\partial y)$ 就是向量场 $\mathbf{A}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\mathbf{A}$。2-形式 $\omega^2=a\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+b\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+c\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的外微分 $\mathrm{d}\omega^2$ 的系数(见式(3.2.25))等于向量场 $\mathbf{A}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 的散度，即 $\operatorname{div}\mathbf{A}=\partial a/\partial x+\partial b/\partial y+\partial c/\partial z$。

利用外微分的运算法则还可以推导许多向量分析中的相应公式。例如，由

$$\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g,\ f,g\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$$

可得到相应的公式

$$\mathbf{grad}(fg)=g\,\mathbf{grad}f+f\,\mathbf{grad}g$$

由

$$\mathrm{d}(f\omega^1)=\mathrm{d}f\wedge\omega^1+f\mathrm{d}\omega^1$$

得到
$$\mathbf{rot}(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad}f \times \mathbf{A} + f\mathbf{rot}\mathbf{A}$$
由
$$\mathrm{d}(f\omega^2) = \mathrm{d}f \wedge \omega^2 + f\mathrm{d}\omega^2$$
得到
$$\mathrm{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{grad}f \cdot \mathbf{A} + f\mathrm{div}\mathbf{A}$$
又由
$$\mathrm{d}(\omega^1 \wedge \theta^1) = \mathrm{d}\omega^1 \wedge \theta^1 + (-1)\omega^1 \wedge \mathrm{d}\theta^1 = \mathrm{d}\omega^1 \wedge \theta^1 - \omega^1 \wedge \mathrm{d}\theta^1$$
得到
$$\mathrm{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{B}$$
等等。

此外，由 $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0$ 可得到 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}f)=0$；由 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega^1)=0$ 可得到 $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\mathbf{A})=0$。这些都是向量分析中熟知的结果。

利用外微分去表示向量分析中的概念，不但能够得到简便易记的统一表达方式，而且适用于在流形上进行整体性的内蕴描述，因此有着重要的理论和应用价值。微分形式还有其他的多种运算，它们在数学、力学、物理和技术科学中有广泛的应用，我们将在后面介绍其中的一些结果。有兴趣的读者还可进一步参考有关书籍。

最后给出一个很有用的公式。设 ω 是流形 M 上的 1-形式，X 和 Y 是 M 上的两个向量场，则
$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \tag{3.2.27}$$
其中，$[X,Y]=XY-YX$ 称为向量场 X,Y 的 Lie 括号(参看 3.2.7)。

为了证明式(3.2.27)，不妨设 $\omega=g\mathrm{d}f$，其中 $f,g\in C^\infty(M)$。于是 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f$。由式(3.2.16)和式(3.1.31)得到
$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = (\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}f)(X,Y) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}g(X) & \mathrm{d}g(Y) \\ \mathrm{d}f(X) & \mathrm{d}f(Y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Xg & Yg \\ Xf & Yf \end{vmatrix} = Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf$$
此外 $X\omega(Y)=X(g\mathrm{d}f(Y))=X(g(Yf))=Xg\cdot Yf+g\cdot X(Yf)$，同理 $Y\omega(X)=Yg\cdot Xf+g\cdot Y(Xf)$。因此
$$\begin{aligned} X\omega(Y) - Y\omega(X) &= Xg \cdot Yf - Yg \cdot Xf + g \cdot (XY - YX)f = \\ &\mathrm{d}\omega(X,Y) + g \cdot [X,Y]f = \\ &\mathrm{d}\omega(X,Y) + g\mathrm{d}f([XY]) = \\ &\mathrm{d}\omega(X,Y) + \omega([X,Y]) \end{aligned}$$
从而得到式(3.2.27)。

3.2.4 Poincaré 引理和逆命题

定义 3.2.5 设 M 是 n 维微分流形，$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$。如果 $\mathrm{d}\omega=0$，则称 ω 为**闭微分形式**(简称**闭形式**)。如果存在 $\theta\in\mathscr{F}^{p-1}(M)$ 使得 $\omega=\mathrm{d}\theta$，则称 ω 为**恰当微分形式**(简称**恰当形式**)。

我们由式(3.2.22)得知，对于任何恰当形式 ω，总有 $\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}(\mathrm{d}\theta)=0$，即 ω 是闭形式。于是有下面定理。

定理 3.2.1(Poincaré 引理) 设 ω 是 M 上的 p-形式，且是恰当的，则 ω 必为闭形式。

然而 Poincaré 引理的逆命题并不一定成立，即从整体来说，闭形式不一定是恰当形式。为了说明这个问题，先看下面的简单例子。

例 3.2.4 考虑在 $M=\mathbf{R}^2\backslash\{0,0\}$ 上定义的 1-形式

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

显然 ω 是 M 上的闭形式，因为

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \wedge (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + (-1)^0 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) =$$

$$\frac{-2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

我们用反证法去证明 ω 不是 M 上的恰当形式。假设存在 M 上的函数 $f(x,y)$，使 $\omega=\mathrm{d}f$，则有 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$。于是 $f(x,y)=\arctan(y/x)+g(x)$，其中 $g(x)$ 待定。由该式及 ω 的表达式可知 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}+g'(x)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，故 $g'(x)=0$，即 $g(x)=$ 常数。

我们得到 $f(x,y)=\arctan(y/x)+$ 常数。因为极角 $\varphi=\arctan(y/x)$ 在整个 $M=\mathbf{R}^2\setminus\{0,0\}$ 上的多值性，从而 f 在 M 上不是 C^∞ 函数。由此可见在 M 上不存在 C^∞ 函数 f，使 $\omega=\mathrm{d}f$ 成立。

从上面的反例看到，流形上的闭形式不一定是恰当的。深入分析表明，产生上述问题的原因与区域 $\mathbf{R}^2\setminus\{0,0\}$ 不能缩为一点有关。因此 Poincaré 引理的逆命题对那些有“良好”拓扑结构的流形才能成立。为此要先介绍同伦的概念。

定义 3.2.6 设 M,N 是微分流形，t 是参数。我们称一族映射 $h_t:M\to N, t\in I=[0,1]$ 是**一个 C^∞ 同伦**，如果由 $H(x,t)=h_t(x), x\in M, t\in I$ 定义的映射 $H:M\times I\to N$ 是 C^∞ 的。**两个 C^∞** 映射，$f,g:M\to N$ 称为**同伦的**，如果存在一个同伦 $h_t:M\to N$，使得 $h_0=f, h_1=g$。h_0 和 h_1 分别称为同伦 h_t 的**初始映射和终止映射**。

直观地说，映射 f 和 g 同伦意味着它们中间的任一个可以连续地变换为另一个。

定义 3.2.7 微分流形 M 称为**可缩为一点** $x_0\in M$ **的**，如果存在一个同伦映射 $H:M\times I\to M$，使得对任何 $x\in M$ 有 $H(x,1)=x$ 和 $H(x,0)=x_0$。对开集 $U\subset M$ 亦可建立类似定义。

例如，$\mathbf{R}^n$ 可缩为原点 O。事实上，取 $H(\boldsymbol{x},t)=t\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n, t\in I$ 即可证明。又如，设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，$\boldsymbol{x}_0\in U$。若连接点 $\boldsymbol{x}_0$ 和任一点 $\boldsymbol{x}\in U$ 的线段完全位于 U 内，则称 U 为关于 $\boldsymbol{x}_0$ 的**星形集**。取 $H(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x}\in U, t\in I$，就能证明星形集 U 可缩为点 $\boldsymbol{x}_0$。

定理 3.2.2(Poincaré 引理的逆命题) 设开集 $U\subset M$ 可收缩为一点，ω 是 U 上的 p -形式，且是闭的(即 $\mathrm{d}\omega=0$)，则 ω 是 U 上的恰当形式(即存在 $(p-1)$-形式 θ，使得 $\omega=\mathrm{d}\theta$)。

定理的证明从略，读者可参看参考文献[1]。定理 3.2.2 给出了闭形式是恰当形式的一个充分条件。关于这方面问题的深入研究导致上同调理论的发展，并在微分几何和物理学中有重要应用。

3.2.5 对偶微分

定义 3.2.8 设 M,N 分别为 m 维和 n 维微分流形，ω 是 N 上的一个 p -形式($0\leqslant p\leqslant n$)，$F:M\to N$ 是 C^∞ 映射。定义映射 $F^*:\Lambda^p_{F(x)}(N)\to\Lambda^p_x(M), \omega\mapsto F^*\omega$，使得对任何 $x\in M, X_1, \cdots, X_p\in T_xM$ 有

$$(F^*\omega)(x)(X_1,\cdots,X_p) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \omega(F(x))(F_*(x)X_1,\cdots,F_*(x)X_p) \qquad (3.2.28)$$

其中，F_*(即 dF)是映射 F 的切映射(即微分)。F^* 称为映射 F 的**对偶微分**。有时，我们亦称

F^* 为映射 F 的拉回，并称 F_* 为映射 F 的推前。

特别地，当 $p=0$ 时，取 N 上的可微函数 f。这时由定义 3.2.8 有

$$(F^* f)(x) = f(F(x)) = (f \circ F)(x),\ x \in M$$

由此可知，$F^* f = f \circ F$，从而 $F^*: C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ 将 N 上的可微函数 f 变为 M 上的可微函数 $f \circ F$，即起着函数拉回映射的作用。定义 3.2.8 就是函数的拉回映射概念对微分形式的推广。

对偶微分有以下性质：

(1) F^* 是线性映射，即对 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \omega_1, \omega_2 \in \mathscr{F}^p(N)$ 有

$$F^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 F^* \omega_1 + \lambda_2 F^* \omega_2$$

(2) 对 $\omega \in \mathscr{F}^p(N), \theta \in \mathscr{F}^q(N)$ 有

$$F^*(\omega \wedge \theta) = F^* \omega \wedge F^* \theta \tag{3.2.29}$$

(3) $\mathrm{d} \circ F^* = F^* \circ \mathrm{d}$，即对 $\omega \in \mathscr{F}^p(N)$ 有

$$\mathrm{d}(F^* \omega) = F^*(\mathrm{d}\omega) \tag{3.2.30}$$

(4) 若 $F: M \to N, G: N \to P$ 是 C^∞ 映射，则有

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* \tag{3.2.31}$$

公式(3.2.29)～(3.2.31)的证明留作习题。

设(U,φ)和(V,ψ)分别为 M 和 N 上包含 x 和 $y=F(x)$ 的坐标图，$F(U) \subset V$，它们分别有局部坐标$\{x_i\}$和$\{y_j\}$。如果 $\omega(y) = \sum\limits_{i_1 < \cdots < i_p} b_{i_1 \cdots i_p}(y) \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_p}$，则有局部表达式

$$F^* \omega(x) = \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p \\ j_1 < \cdots < j_p}} b_{i_1 \cdots i_p}(F(x)) \frac{\partial(y_{i_1}, \cdots, y_{i_p})}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{i_p})} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \tag{3.2.32}$$

现在证明公式(3.2.32)。由式(3.2.29)有

$$F^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} F^*(b_{i_1 \cdots i_p})(x) F^* \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge F^* \mathrm{d}y_{i_p}$$

再由式(3.2.30)有

$$F^* \mathrm{d}y_{i_k} = \mathrm{d}F^* y_{i_k} = \mathrm{d}(y_{i_k} \circ F) = \mathrm{d}F_{i_k} =$$

$$\sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial F_{i_k}(x)}{\partial x_{j_k}} \mathrm{d}x_{i_k},\quad 1 \leqslant k \leqslant p$$

其中，$F_{i_k}(x) = (y_{i_k} \circ F)(x) = y_{i_k}(F(x))$是 $y=F(x)$ 的第 i_k 个坐标，可得到

$$F^* \omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{j_1, \cdots, j_p = 1}^{m} b_{i_1 \cdots i_p}(F(x)) \cdot \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_{j_1}} \cdots \frac{\partial F_{i_p}}{\partial x_{j_p}} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p} =$$

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{j_1 < \cdots < j_p} b_{i_1 \cdots i_p}(F(x)) \frac{\partial(y_{i_1}, \cdots, y_{i_p})}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_p})} \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_p}$$

其中，$\dfrac{\partial(y_{i_1}, \cdots, y_{i_p})}{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_p})}$是局部坐标变换函数 $y_{i_1}(x), \cdots, y_{i_p}(x)$关于 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_p}$ 的 Jacobi 行列式。

例 3.2.5 设 $\omega = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 1-形式，$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ 是由 $F(t) = (\cos t, \sin t)$给出的光滑映射。于是

$$\theta = F^* \omega = -\sin t \frac{\mathrm{d}(\cos t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t + \cos t \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t =$$

$$(\sin^2 t + \cos^2 t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$$

3.2.6 微分形式与向量场的内积

定义 3.2.9 设 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 是 n 维微分流形 M 上的一个 p-形式，$X,X_i\in\mathscr{X}(M)(i=1,\cdots,p-1)$ 是 M 上的一组向量场。定义映射 $i_X:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{p-1}(M),\omega\mapsto i_X\omega$ 为

$$(i_X\omega)(X_1,\cdots,X_{p-1})\overset{\mathrm{d}}{=}\omega(X,X_1,\cdots,X_{p-1})\tag{3.2.33}$$

我们称 $i_X\omega$ 为微分形式 ω 与向量场 X 的**内积**，或 ω 对 X 的**缩并**。$i_X\omega$ 亦可记为 $X\rfloor\omega$。

作为特殊情形，当 $p=1$ 时，ω 是 M 上的 1-形式(即余切向量场)，此时有 $i_X\omega=\omega(X)=\langle\omega,X\rangle$，即 $i_X\omega$ 是 ω 与 X 的对偶积。此外还规定当 $p=0$ 时，即对函数 $f\in\mathscr{F}^0(M)=C^\infty(M)$ 有 $i_Xf=0$。

映射 i_X 有以下性质：

(1) i_X 是线性映射，即对 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R},X\in\mathscr{X}(M),\omega_1,\omega_2\in\mathscr{F}^p(M)$ 有

$$i_X(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1 i_X\omega_1+\lambda_2 i_X\omega_2\tag{3.2.34}$$

(2) 对 $X\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M),\theta\in\mathscr{F}^q(M)$ 有

$$i_X(\omega\wedge\theta)=i_X\omega\wedge\theta+(-1)^p\omega\wedge i_X\theta\tag{3.2.35}$$

(3) 对 $X,Y\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 有

$$i_{X+Y}\omega=i_X\omega+i_Y\omega\tag{3.2.36}$$

即 $i_{X+Y}=i_X+i_Y$。

(4) 对 $X\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 和 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$i_{fX}\omega=fi_X\omega\tag{3.2.37}$$

即 $i_{fX}=fi_X$。

(5) 对 $X\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 有

$$(i_X)^2\omega=i_X(i_X\omega)=0\tag{3.2.38}$$

即 $(i_X)^2=i_X\circ i_X=0$。

设 $\omega\in\mathscr{F}^p(M),X\in\mathscr{X}(M)$，且它们在局部坐标系 $\{x_i\}$ 中分别表示为

$$\omega(x)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\quad\text{和}\quad X(x)=\sum_{j=1}^n\xi_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

则有

$$i_X\omega(x)=\sum_{i_2<\cdots<i_p}\sum_{j=1}^n\xi_j(x)a_{ji_2\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\tag{3.2.39}$$

上述公式的证明留作习题。

例 3.2.6 设 $X=\sum_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\mathscr{X}(M),f\in\mathscr{F}^0(M)$，由式(3.2.33)有

$$i_X\mathrm{d}f=\mathrm{d}f(X)=Xf\tag{3.2.40}$$

即 $i_X\mathrm{d}f$ 亦表示函数 f 沿 X 的方向导数。此外，由于在局部坐标系 $\{x_i\}$ 下有 $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$，故由式(3.2.39)亦可得局部表达式 $i_X\mathrm{d}f=\sum_{j=1}^n\xi_j\frac{\partial f}{\partial x_j}$。

例 3.2.7 设 $X=\sum_{i=1}^n\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in\mathscr{X}(M),\omega=\sum_{i=1}^n a_i\mathrm{d}x_i\in\mathscr{F}^1(M)$，则由式(3.2.19)有

$$d\omega = \sum_{i<j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)dx_i \wedge dx_j$$

从而由式(3.2.39)得到

$$i_X d\omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)dx_j$$

3.2.7 Lie 导数和 Lie 代数

本小节讨论光滑向量场的几个基本问题，主要有向量场的积分曲线，由向量场生成的单参数变换群(流)，函数、微分形式和向量场的 Lie 导数等，最后顺带介绍与此有关的 Lie 括号和 Lie 代数的初步概念。

1. 向量场的积分曲线和单参数变换群(流)

定义 3.2.10　设 M 是 n 维微分流形，$X\in\mathscr{X}(M)$是定义在流形 M 上的光滑向量场，$\gamma: J=(a,b)\to M, t\mapsto\gamma(t)$是流形 M 上的一条光滑曲线。如果曲线 γ 在 $\gamma(t)$处的切向量就是 $X(\gamma(t))$，则称 γ 是向量场 X 的**积分曲线或轨线**。

设 U 是 M 上包含点 $\gamma(t)$的一个坐标邻域，在其上取局部坐标$\{x_i\}$。设点 $\gamma(t)$的局部坐标为$\{x_i(t)\}$。再设向量场 X 在 U 中的局部表达式为 $X(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$。于是曲线 γ 是向量场 X 的积分曲线的充分必要条件是对 $t\in J$ 有

$$\frac{dx_i}{dt} = \xi_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,n \tag{3.2.41}$$

根据常微分方程的解的存在惟一性定理，对于给定点 $p\in M$，存在点 p 的一个邻域 U 和常数 $\varepsilon>0$，使得对 $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$，方程(3.2.41)有局部光滑解 $x_i=x_i(t)$；且满足 $x_i(0)=x_{p_i}, i=1,\cdots,n$，其中$\{x_{p_i}\}$是点 p 的局部坐标。于是对流形 M 上给定的向量场 X，我们得到一条当 $t=0$ 时经过点 p 的局部积分曲线 $\gamma_p(t)$。利用解的延拓技巧，可得向量场 X 的一条饱和积分曲线 $\gamma_p: J=(a,b)\to M$，且满足 $\gamma_p(0)=p$，则称 $J=(a,b)$为 γ_p 的最大存在区间。

一般地，对应饱和积分曲线 γ_p 的最大存在区间 J 不一定是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，且 J 往往与初始时刻 t_0 和初值 p 有关。如果对任何 $p\in M$，某向量场 X 经过点 p 的积分曲线的最大存在区间都是$(-\infty,+\infty)$，则称该向量场是**完备**的。向量场的完备性对应着常微分方程(3.2.41)的解的整体适定性问题，故有着重要的意义。

流形 M 上的向量场 X 的**支集**是指 $X(x)\neq 0$ 的点集的闭包，即

$$\operatorname{supp} X = \overline{\{x\in M \mid X(x)\neq 0\}}$$

可以证明，流形 M 上有紧支集的向量场是完备的。特别地，紧流形 M 上的向量场都是完备的。此外，有界向量场也必定是完备的。

对于 M 上的完备光滑向量场 X，令 $\gamma_p(t)(t\in\mathbf{R})$为 $t=0$ 时经过点 $p\in M$ 的积分曲线。记

$$\psi_t(p) = \gamma_p(t),\ p\in M,\ t\in\mathbf{R} \tag{3.2.42}$$

我们得到以 t 为参数的映射 $\psi_t: M\to M$。对于固定的 t，ψ_t 是一个从流形 M 到自身的一个光滑映射，且可以证明它具有下列性质：

(1) $\psi_0=\mathrm{id}$；

(2) $\psi_s\circ\psi_t=\psi_{s+t}, \forall s,t\in\mathbf{R}$。

一般地，满足性质(1)和(2)的映射集合$\{\psi_t \mid t\in\mathbf{R}\}$称为流形 M 上的一个**单参数变换群**，也

称为**流或动力系统**。事实上，在集合$\{\psi_t\}$中取映射的复合运算作为乘法，由性质(2)得知，$\{\psi_t\}$关于这个乘法是封闭的，且乘法结合律成立。再由性质(1)得知，ψ_0 可作为单位元素。此外，由性质(1)和(2)有

$$\psi_{-t}\circ\psi_t=\psi_t\circ\psi_{-t}=\psi_0,\forall t\in\mathbf{R}$$

因此每个元素 ψ_t 都有逆元素 $\psi_t^{-1}=\psi_{-t}$。这表明 ψ_t 是一个微分同胚。于是$\{\psi_t\}$全体构成一个变换群。顺便指出，它是一个交换群，这是因为由性质(2)有

$$\psi_s\circ\psi_t=\psi_{s+t}=\psi_{t+s}=\psi_t\circ\psi_s,\forall s,t\in\mathbf{R}$$

接着讨论流形 M 上的向量场与单参数变换群之间的关系。由前面得知，流形 M 上完备的光滑向量场 X 可以生成一个单参数变换群$\{\psi_t\}$。反过来，流形 M 上的单参数变换群$\{\psi_t|t\in\mathbf{R}\}$也可以生成一个完备向量场 X，使得它在 M 上的积分曲线对应单参数变换群的轨线，即式(3.2.42)成立。事实上，对点 $p\in M$，我们取单参数变换群经过点 p 的轨线 $\psi_t(p)$，它在点 p 处的切向量作为 $X(p)$，即对任何 $f\in C^\infty(M)$有方向导数

$$Xf(p)=\lim_{t\to0}\frac{f(\psi_t(p))-f(p)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\psi_t)(p)\Big|_{t=0}\tag{3.2.43}$$

若取点 p 的邻域 U 内的局部坐标系$\{x_i\}$，令点 p 的坐标为$\{x_{pi}\}$，点 $\psi_t(p)$的坐标为$\{\psi_{ti}(x_{p1},\cdots,x_{pn})\}$，则单参数变换群$\{\psi_t\}$生成的向量场 X 的局部坐标表达式为

$$X(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\psi_{ti}(x_{p1},\cdots,x_{pn})}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\tag{3.2.44}$$

我们把单参数变换群$\{\psi_t\}$生成的向量场 X 亦称为该单参数变换群的**无穷小生成元**。

2. Lie 导数

现在考虑在流形 M 上的函数、微分形式和向量场沿着给定向量场 X 的积分曲线的变化率，即它们关于向量场 X 的 Lie 导数问题。

(1) 函数的 Lie 导数

定义 3.2.11　设函数 $f\in C^\infty(M)$，完备向量场 $X\in\mathscr{X}(M)$，$\{\psi_t\}$是 X 生成的单参数变换群，$x\in M$。定义映射 $L_X:C^\infty(M)\to C^\infty(M),f\mapsto L_Xf$ 如下

$$L_Xf(x)=\lim_{t\to0}\frac{f(\psi_t(x))-f(x)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\psi_t(x))\Big|_{t=0}\tag{3.2.45}$$

并称其为**函数 f 在 $x\in M$ 处(即 $t=0$ 时)关于向量场 X 的 Lie 导数**。

显然，利用函数的拉回映射 $\psi_t^*:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$和式(3.2.45)，$L_Xf$ 亦可定义为

$$L_Xf(x)=\lim_{t\to0}\frac{\psi_t^*f(x)-f(x)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^*f(x)\Big|_{t=0}\tag{3.2.46}$$

此外，由式(4.2.43)和式(4.2.45)还有

$$L_Xf(x)=Xf(x)=\mathrm{d}f(X)(x)\tag{3.2.47}$$

这表明函数 f 关于向量场 X 的 Lie 导数就是函数 f 在 X 方向上的方向导数。在局部坐标系$\{x_i\}$下，如果 $X(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$，则 L_Xf 有局部表达式

$$L_Xf(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\tag{3.2.48}$$

函数 f 的 Lie 导数 L_Xf 有下列基本性质：

① 对 $f,g\in C^\infty(M),\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$，有

$$L_X(\lambda_1 f+\lambda_2 g)=\lambda_1 L_X f+\lambda_2 L_X g \tag{3.2.49}$$

这表明 L_X 是线性算子。

② 对 $f\in C^\infty(M)$，$X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$，有

$$L_{(\lambda_1 X+\lambda_2 Y)}f=\lambda_1 L_X f+\lambda_2 L_Y f \tag{3.2.50}$$

③ 对 $f,g\in C^\infty(M)$有

$$L_X(fg)=gL_X f+fL_X g \tag{3.2.51}$$

上述公式可通过定义直接证明。关于函数的 Lie 导数的其他重要性质将在后面进一步介绍，可参看式(3.2.58)、式(3.2.61)和式(3.2.64)。

此外，对任何 $t\in\mathbf{R}$ 和 $x\in M$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^* f(x)=\psi_t^* L_X f(x) \tag{3.2.52}$$

现在证明如下。利用式(3.2.43)可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^* f(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\psi_t)(x)=\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\psi_t(x))=Xf(\psi_t(x))=\\ &L_X f(\psi_t(x))=\psi_t^* L_X f(x)\end{aligned}$$

式(3.2.46)就是式(3.2.52)当 $t=0$ 时的特殊情形。

作为式(3.2.52)的一个应用，考虑一阶偏微分方程初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ u(x,0)=g(x) \tag{3.2.53}$$

其中，自变量 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$t\in\mathbf{R}$，未知函数 $u=u(x,t)$，$a_i(x)(i=1,\cdots,n)$和 $g(x)$是已知的 C^∞ 函数。如果 $X(x)=(a_1(x),\cdots,a_n(x))$是完备向量场，它生成的单参数变换群是$\{\psi_t\}$，则 $u(x,t)=g(\psi_t(x))$是定解问题(3.2.54)的解。事实上，将它代入方程(3.2.53)有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(\psi_t(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^* g(x)=\\ &\psi_t^* L_X g(x)=L_X g(\psi_t(x))=\\ &L_X u(x,t)=Xu=\sum_{i=1}^n a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\end{aligned}$$

和

$$u(x,0)=g(\psi_0(x))=g(x)$$

例 3.2.8 求解一阶偏微分方程$\frac{\partial u}{\partial t}=(x+y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，$u(x,y,0)=x^2+y^2$ 的初值问题。

取向量场 $X=(x+y,-x-y)$，并建立相应的一阶常微分方程组(见式(3.2.41))

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-y$$

该方程组有初值$(x,y)|_{t=0}=(x_0,y_0)$的解为 $x(t)=(x_0+y_0)t+x_0$，$y(t)=-(x_0+y_0)t+y_0$。这个解对任何初值$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 都在$-\infty<t<+\infty$上存在，从而向量场 X 是完备的。由式(3.2.42)得到 X 生成的单参数变换群为

$$\psi_t(x,y)=((x+y)t+x,-(x+y)t+y)$$

根据前述结果，这里的初值问题的解为

$$u(x,y,t)=[(x+y)t+x]^2+[-(x+y)t+y]^2=$$
$$2(x+y)^2t^2+2(x^2-y^2)t+x^2+y^2$$

(2) 微分形式的 Lie 导数

考虑到流形上的 C^∞ 函数就是 M 上的 0 -形式，因此可以把上面给出的函数关于向量场的 Lie 导数概念推广到一般的微分形式。

定义 3.2.12　设 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)(0\leqslant p\leqslant n)$ 是 n 维流形 M 上的一个 p -形式，$X\in\mathscr{X}(M)$ 是 M 上的一个完备向量场，$\{\psi_t\}$ 是 X 生成的单参数变换群，$x\in M$。定义映射 $L_X:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^p(M)$，$\omega\mapsto L_X\omega$ 为

$$L_X\omega(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\psi_t^*\omega(x)-\omega(x)}{t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^*\omega(x)\Big|_{t=0}\tag{3.2.54}$$

并称其为 **p -形式 ω 在 $x\in M$ 处关于向量场 X 的 Lie 导数**。当 $p=0$ 时，式(3.2.54)就给出函数的 Lie 导数定义，即式(3.2.46)。

设 γ 是向量场 X 在 M 上的一条积分曲线，当 $t=0$ 时经过点 $x\in M$。于是在 t 时刻到达的位置为 $\psi_t(x)$。由于映射 ψ_t^* 把点 $\psi_t(x)$ 处的 p -形式 $\omega(\psi_t(x))\in\Lambda^p_{\psi_t(x)}(M)$ 拉回空间 $\Lambda^p_x(M)$ 中，成为在 $\Lambda^p_x(M)$ 上的一个依赖于参数 t 的 p -形式 $\psi_t^*\omega(x)$。因此，由式(3.2.54)给出的 $L_X\omega(x)$ 反映 p -形式 ω 沿向量场 X 的积分曲线的变化率。

微分形式 ω 的 Lie 导数 $L_X\omega$ 有下列基本性质：

① L_X 是线性算子，即对 $\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$，有

$$L_X(\lambda_1\omega+\lambda_2\theta)=\lambda_1L_X\omega+\lambda_2L_X\theta\tag{3.2.55}$$

② 对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，$X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$，有

$$L_{(\lambda_1X+\lambda_2Y)}\omega=\lambda_1L_X\omega+\lambda_2L_Y\omega\tag{3.2.56}$$

③ 对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，$\theta\in\mathscr{F}^q(M)$，有

$$L_X(\omega\wedge\theta)=L_X\omega\wedge\theta+\omega\wedge L_X\theta\tag{3.2.57}$$

④ 对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$L_X(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(L_X\omega)\tag{3.2.58}$$

这同样表明算子 L_X 与 d 是可交换的，即 $L_X\circ\mathrm{d}=\mathrm{d}\circ L_X$。

性质(1)～(3)是前面关于函数的 Lie 导数性质的推广，其证明也是类似的。在证明式(3.2.58)时要用到 ψ_t^* 与 d 的交换性(见式(3.2.30))。后面还要介绍微分形式的 Lie 导数的其他重要运算性质(见式(3.2.60)、式(3.2.62)和式(3.2.63))。

同样地，类似式(3.2.52)，对任何 $t\in\mathbf{R}$ 和 $x\in M$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t^*\omega(x)=\psi_t^*L_X\omega(x)\tag{3.2.59}$$

现在讨论微分形式的 Lie 导数的局部表达式。首先考虑 1 -形式 ω。在局部坐标系 $\{x_i\}$ 下，令 $\omega(x)=\sum_{i=1}^n a_i(x)\mathrm{d}x_i$，$X(x)=\sum_{i=1}^n\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$。由式(3.2.57)和式(3.2.58)得到局部表达式为

$$L_X\omega(x)=\sum_{i=1}^n(L_Xa_i(x)\mathrm{d}x_i+a_i(x)L_X\mathrm{d}x_i)=$$
$$\sum_{i=1}^n(L_Xa_i(x)\mathrm{d}x_i+a_i(x)\mathrm{d}(L_Xx_i))=$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(\xi_j(x)\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j}+a_j(x)\frac{\partial \xi_j(x)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i$$

其中用到了 $L_X x_i(x)=\xi_i(x)$。我们利用上述结果和式(3.2.57)，可以得到 p-形式的 Lie 导数的局部表达式。最后，对于标准 n-形式 $\Omega(x)=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$，由式(3.2.57)和式(3.2.58)得到

$$\begin{aligned}L_X\Omega(x)=&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge L_X\mathrm{d}x_i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\\&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\xi_i(x)\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\\&\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\\&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\\&(\mathrm{div}\ X)\Omega(x)\end{aligned}$$

其中，div X 为向量场 X 的散度。由此可见 Lie 导数 $L_X\Omega$ 描述沿向量场 X 的方向上的体积变化率，因此该结果反映了向量场的散度的几何意义。

下面再介绍 Lie 导数算子的其他重要性质。它们给出了算子 L_X，i_X 和 d 的关系，并在有关 Lie 导数的运算和计算中有重要作用。令 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)(p=0,1,\cdots,n)$，$X\in\mathscr{X}(M)$，则有如下性质：

①
$$L_X\omega=i_X(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}(i_X\omega)\tag{3.2.60}$$
这表明算子 L_X，i_X 和 d 满足同伦恒等式 $L_X=i_X\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ i_X$。特别地，当 $\omega=f\in\mathscr{F}^0(M)$（即 $C^\infty(M)$）时，有
$$L_Xf=i_X\mathrm{d}f\tag{3.2.61}$$

②
$$L_X(i_X\omega)=i_X(L_X\omega)\tag{3.2.62}$$
这表明算子 L_X 与 i_X 是可交换的，即 $L_X\circ i_X=i_X\circ L_X$。

③ 对 $f\in C^\infty(M)$，有
$$L_{fX}\omega=fL_X\omega+\mathrm{d}f\wedge i_X\omega\tag{3.2.63}$$
由此可见，当 $f\neq\mathrm{const}$ 且 $p\neq0$ 时，一般地 $L_{fX}\neq fL_X$。然而，当 $p=0$ 时，即 $\omega=g\in C^\infty(M)$，则有
$$L_{fX}g=fL_Xg\tag{3.2.64}$$
同样地，当 $f=\lambda=\mathrm{const}$ 时，有
$$L_{\lambda X}\omega=\lambda L_X\omega\tag{3.2.65}$$
即前面的式(3.2.56)的结果。

现在给出上述公式的证明。先证明性质①。我们利用归纳法。当 $p=0$ 时，即对函数 $f\in\mathscr{F}^0(M)$，因 $i_Xf=0$，故由式(3.2.40)和(3.2.47)有
$$i_X(\mathrm{d}f)+\mathrm{d}(i_Xf)=i_X(\mathrm{d}f)=Xf=L_Xf\tag{3.2.66}$$
再设式(3.2.60)对 p-形式 θ 成立。由于任何 $(p+1)$-形式都可写成 $\sum\limits_i\mathrm{d}f_i\wedge\theta_i$ 的形式，其中 $f_i\in\mathscr{F}^0(M)$，$\theta_i\in\mathscr{F}^p(M)$，并考虑到 L_X 是线性算子，只需证明式(3.2.60)对 $\omega=\mathrm{d}f\wedge\theta$ 成立即

可，其中 $f\in\mathscr{F}^0(M)$，$\theta\in\mathscr{F}^p(M)$。一方面，由式(3.2.57)有

$$L_X\omega = L_X(\mathrm{d}f\wedge\theta) = (L_X\mathrm{d}f)\wedge\theta + \mathrm{d}f\wedge L_X\theta \tag{3.2.67}$$

另一方面，由式(3.2.21)、式(3.2.22)和式(3.2.35)有

$$\begin{aligned} i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega = & i_X\mathrm{d}(\mathrm{d}f\wedge\theta) + \mathrm{d}i_X(\mathrm{d}f\wedge\theta) = \\ & -i_X(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\theta) + \mathrm{d}((i_X\mathrm{d}f)\wedge\theta - \mathrm{d}f\wedge i_X\theta) = \\ & -(i_X\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}f\wedge(i_X\mathrm{d}\theta) + \\ & \mathrm{d}(i_X\mathrm{d}f)\wedge\theta + (i_X\mathrm{d}f)\wedge\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}f\wedge(\mathrm{d}i_X\theta) \end{aligned}$$

将上式的第一项和第四项相消，再由归纳法的假设，以及式(3.2.58)和式(3.2.66)有

$$\begin{aligned} i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega = & \mathrm{d}f\wedge(i_X\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}i_X\theta) + \mathrm{d}(i_X\mathrm{d}f)\wedge\theta = \\ & \mathrm{d}f\wedge L_X\theta + \mathrm{d}(i_X\mathrm{d}f)\wedge\theta = \\ & \mathrm{d}f\wedge L_X\theta + \mathrm{d}(L_Xf)\wedge\theta = \\ & \mathrm{d}f\wedge L_X\theta + (L_X\mathrm{d}f)\wedge\theta \end{aligned} \tag{3.2.68}$$

比较式(3.2.67)和式(3.2.68)后得到 $L_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega$，从而式(3.2.60)得证。

再证明性质②。由式(3.2.60)和式(3.2.38)，一方面，有

$$L_X(i_X\omega) = i_X\mathrm{d}i_X\omega + \mathrm{d}i_Xi_X\omega = i_X\mathrm{d}i_X\omega$$

另一方面，有

$$i_X(L_X\omega) = i_Xi_X\mathrm{d}\omega + i_X\mathrm{d}i_X\omega = i_X\mathrm{d}i_X\omega$$

比较上面的结果，即得式(3.2.62)。

最后证明性质③。由式(3.2.60)和式(3.2.37)有

$$\begin{aligned} L_{fX}\omega = & i_{fX}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_{fX}\omega = \\ & fi_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(fi_X\omega) = \\ & fi_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}f\wedge i_X\omega + f\mathrm{d}i_X\omega = \\ & f(i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega) + \mathrm{d}f\wedge i_X\omega = \\ & fL_X\omega + \mathrm{d}f\wedge i_X\omega \end{aligned}$$

从而式(3.2.63)得证。对 $g\in C^\infty(M)$，考虑到 $i_Xg=0$，即得式(3.2.64)。

(3) 向量场的 Lie 导数

设 $X\in\mathscr{X}(M)$是流形 M 上的一个完备向量场，$\{\psi_t\}$是 X 生成的单参数变换群。如果另有 $Y\in\mathscr{X}(M)$，现在考虑向量场 Y 关于 X 的 Lie 导数，即沿着 X 的积分曲线 $\psi_t(x)$分布的切向量 $Y(\psi_t(x))$的变化率。为此我们利用切映射$(\psi_{-t})_*$把点 $\psi_t(x)$处的切向量 $Y(\psi_t(x))$映到点 x 的切空间 T_xM 上，成为在 T_xM 上一个依赖于参数 t 的切向量$(\psi_{-t})_*Y(\psi_t(x))$，然后定义向量场的 Lie 导数。

定义 3.2.13 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$是流形 M 上的向量场，$\{\psi_t\}$是 X 生成的单参数变换群，$x\in M$。定义映射 $L_X:\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$，$Y\mapsto L_XY$ 为

$$\begin{aligned} L_XY(x) = & \lim_{t\to0}\frac{(\psi_{-t})_*Y(\psi_t(x)) - Y(x)}{t} = \\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_{-t})_*Y(\psi_t(x))\Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{3.2.69}$$

并称其为**向量场** Y 在 $x\in M$ 处**关于向量场 X 的 Lie 导数**。

定义 3.2.14 设 $X,Y\in\mathscr{X}(M)$，$x\in M$。定义映射$[\cdot,\cdot]:\mathscr{X}(M)\times\mathscr{X}(M)\to\mathscr{X}(M)$，$(X,Y)$

$\mapsto [X,Y]$，使得对任何 $f\in C^\infty(M)$ 有

$$[X,Y]f(x) = X(Yf)(x) - Y(Xf)(x) \tag{3.2.70}$$

$[X,Y]\in \mathscr{X}(M)$ 称为向量场 X 和 Y 的 **Lie 括号**（亦称为 **Lie - Poisson 括号**）。它也可写成

$$[X,Y] = XY - YX \tag{3.2.71}$$

此外，$[X,Y]$ 亦可记作 $\mathrm{ad}_X Y$。

定理 3.2.3 对 $X,Y\in \mathscr{X}(M)$ 有

$$L_X Y = [X,Y] \tag{3.2.72}$$

证 任取 $f\in C^\infty(M)$。考虑到 $\psi_0=\mathrm{id}$，对应的切映射 $(\psi_0)_*=\mathrm{id}$，于是式(3.2.70)可写成

$$\begin{aligned}(L_X Y)f(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{(\psi_{-t})_* Y(\psi_t(x)) - Y(x)}{t}f(x) = \\ &\lim_{t\to 0}(\psi_t)_* \frac{(\psi_{-t})_* Y(\psi_t(x)) - Y(x)}{t}f(\psi_t(x)) = \\ &\lim_{t\to 0}\frac{Y(\psi_t(x)) - (\psi_t)_* Y(x)}{t}f(\psi_t(x))\end{aligned} \tag{3.2.73}$$

现在定义函数 $g_t\in C^\infty(M)$ 如下：对 $x\in M$ 有 $g_t(x) \stackrel{\mathrm{d}}{=\!=} \frac{1}{t}(f(\psi_t(x)) - f(x))$，$t\neq 0$。显然有 $g_0(x) = Xf(x)$，而且 $f(\psi_t(x)) = (f+tg_t)(x)$。

此外，由式(3.1.25)还有 $((\psi_t)_* Y(x))f(\psi_t(x)) = Y(f\circ\psi_t)(x)$。将上述结果代入式(3.2.73)，有

$$\begin{aligned}(L_X Y)f &= \lim_{t\to 0}\frac{Yf(\psi_t(x)) - Y(f+tg_t)(x)}{t} = \\ &\lim_{t\to 0}\frac{Yf(\psi_t(x)) - Yf(x)}{t} - Y(x)\lim_{t\to 0}g_t(x) = \\ &L_X(Yf)(x) - Y(Xf)(x) = \\ &X(Yf)(x) - Y(Xf)(x) = \\ &[X,Y]f(x)\end{aligned}$$

由 f 的任意性，式(3.2.72)得证。

根据式(3.2.72)和式(3.2.70)容易得到向量场的 Lie 导数的局部表达式。在局部坐标系 $\{x_i\}$ 下，令 $X(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$，则有

$$L_X Y = [X,Y] = \sum_{i=1}^n \zeta_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.2.74}$$

其中

$$\zeta_i(x) = \sum_{j=1}^n\left(\xi_j(x)\frac{\partial \eta_i(x)}{\partial x_j} - \eta_j(x)\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x_j}\right) \tag{3.2.75}$$

向量场的 Lie 导数的运算性质可用 Lie 括号表示如下：

① 对 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$，有

$$[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1,Y] + \lambda_2[X_2,Y] \tag{3.2.76}$$

$$[X,\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1[X,Y_1] + \lambda_2[X,Y_2] \tag{3.2.77}$$

即 $[\cdot,\cdot]$ 是双线性的。

②
$$[X,Y] = -[Y,X] \tag{3.2.78}$$

即[·,·]有反交换性。显然有$[X,X]=0$。

③ 对 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$,有

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{3.2.79}$$

即[·,·]满足 Jacobi 恒等式。

④ 对 $f,g\in C^\infty(M)$,有

$$[fX,gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y] \tag{3.2.80}$$

上述公式可利用定义 3.2.14 直接证明。

向量场的 Lie 导数还有下列性质:

① 对 $X,Y_1,\cdots,Y_p\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M)$,有

$$(L_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_p)=L_X(\omega(Y_1,\cdots,Y_p))-\sum_{i=1}^{p}\omega(Y_1,\cdots,L_XY_i,\cdots,Y_p) \tag{3.2.81}$$

现在对 $p=1$ 的情形给出证明,至于一般情形可进一步用归纳法证明。为方便起见,记对偶积 $\omega(Y)=\omega\cdot Y$。其中,$Y\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^1(M)$。我们先证

$$L_X(\omega\cdot Y)=(L_X\omega)\cdot Y+\omega\cdot(L_XY) \tag{3.2.82}$$

这表明 Lie 导数关于对偶积的作用满足 Leibniz 法则。在局部坐标系$\{x_i\}$下,令 $X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\frac{\partial}{\partial x_i},Y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial}{\partial x_i},\omega=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}x_i$,于是 $\omega\cdot Y=\sum_{i=1}^{n}a_i\eta_i$。由式(3.2.48),有

$$\begin{aligned}L_X(\omega\cdot Y)&=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\eta_i\Big)=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[\Big(\xi_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\Big)\eta_i+a_i\Big(\xi_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\Big)\Big]=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\xi_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+a_j\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big)\eta_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\Big(\xi_j\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}-\eta_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\Big)=\\&(L_X\omega)\cdot Y+\omega\cdot(L_XY)\end{aligned}$$

因此式(3.2.82)得证。上式又可以写成

$$(L_X\omega)\cdot Y=L_X(\omega\cdot Y)-\omega\cdot(L_XY)$$

即

$$(L_X\omega)(Y)=L_X(\omega(Y))-\omega(L_XY)$$

这就是式(3.2.81),当 $p=1$ 时的结果。式(3.2.81)给出了微分形式和向量场的 Lie 导数之间的相互关系,有时也可作为微分形式的 Lie 导数的定义。

② 对 $X,Y\in\mathscr{X}(M),\omega\in\mathscr{F}^p(M)$,有

$$[L_X,i_Y]\omega=i_{[X,Y]}\omega \tag{3.2.83}$$

其中,$[L_X,i_Y]=L_X\circ i_Y-i_Y\circ L_X$。这表明$[L_X,i_Y]=i_{[X,Y]}$。事实上,由 i_Y 的定义(见式(3.2.33))和式(3.2.81)知,任取 $X_1,\cdots,X_{p-1}\in\mathscr{X}(M)$有

$$\begin{aligned}(i_Y(L_X\omega))(X_1,\cdots,X_{p-1})&=(L_X\omega)(Y,X_1,\cdots,X_{p-1})=\\&L_X(\omega(Y,X_1,\cdots,X_{p-1}))-\omega(L_XY,X_1,\cdots,X_{p-1})-\\&\sum_{i=1}^{p-1}\omega(Y,X_1,\cdots,L_XX_i,\cdots,X_{p-1})=\\&L_X((i_Y\omega)(X_1,\cdots,X_{p-1}))-\sum_{i=1}^{p-1}(i_Y\omega)(X_1,\cdots,L_XX_i,\cdots,X_{p-1})-\end{aligned}$$

$$\omega([X,Y],X_1,\cdots,X_{p-1}) =$$
$$(L_X(i_Y\omega))(X_1,\cdots,X_{p-1}) - (i_{[X,Y]}\omega)(X_1,\cdots,X_{p-1})$$

由 $X_1,\cdots,X_{p-1}$ 的任意性，得知式(3.2.83)成立。

③ 对 $X,Y,Z\in\mathscr{X}(M)$，$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$[L_X,L_Y]Z = L_{[X,Y]}Z \tag{3.2.84}$$
$$[L_X,L_Y]\omega = L_{[X,Y]}\omega \tag{3.2.85}$$

其中，$[L_X,L_Y]=L_X\circ L_Y-L_Y\circ L_X$。这表明 $[L_X,L_Y]=L_{[X,Y]}$。

关于性质(3)的证明留作习题。

我们还可以按递推方式去定义高阶 Lie 导数，即对 $X\in\mathscr{X}(M)$，有

$$L_X^k f = L_X(L_X^{k-1}f),\ f\in C^\infty(M) \tag{3.2.86}$$
$$L_X^k\omega = L_X(L_X^{k-1}\omega),\ \omega\in\mathscr{F}^p(M) \tag{3.2.87}$$
$$L_X^k Y = L_X(L_X^{k-1}Y),\ Y\in\mathscr{X}(M) \tag{3.2.88}$$

在此规定 $L_X^0 f=f$，$L_X^0\omega=\omega$ 和 $L_X^0 Y=Y$。

3. Lie 代数

定义 3.2.15 设 V 是数域 K 上的线性空间，在 V 中定义 Lie 积运算(即"乘法"运算) $[\cdot,\cdot]:V\times V\to V,(X,Y)\mapsto[X,Y]$ 且满足下列条件：

① 双线性

对 $\lambda_1,\lambda_2\in K$，有

$$[\lambda_1X_1+\lambda_2X_2,Y] = \lambda_1[X_1,Y]+\lambda_2[X_2,Y] \tag{3.2.89}$$
$$[X,\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2] = \lambda_1[X,Y_1]+\lambda_2[X,Y_2] \tag{3.2.90}$$

② 反交换性

$$[X,Y]=-[Y,X] \tag{3.2.91}$$

③ Jacobi 恒等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{3.2.92}$$

则称 V 为数域 K 上关于 $[\cdot,\cdot]$ 的 **Lie 代数**(亦称 **Lie 环**)。显然，对于任何 $X\in V$ 有 $[X,X]=0$。

例 3.2.9 由前面的公式(3.2.76)～(3.2.79)得知，流形 M 上的光滑向量场空间 $\mathscr{X}(M)$ 关于向量场的 Lie 括号 $[\cdot,\cdot]$(即向量场的 Lie 导数)成为一个 Lie 代数。

例 3.2.10 设 U 是 $2n$ 维流形 M 上的一个坐标邻域，对 $f,g\in C^\infty(U)$ 定义 Poisson 括号 $\{f,g\}$，使得在局部坐标系 $(q_1,\cdots,q_n;p_1,\cdots,p_n)$ 下有

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) \tag{3.2.93}$$

则 $C^\infty(U)$ 关于 Poisson 括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 成为一个 Lie 代数。请读者根据定义自行证明。

非线性系统的状态空间通常是一个微分流形，其运动方程对应着一个向量场，描述系统状态变化的运动轨线就是这个向量场的积分曲线。因此，非线性系统可以用向量场及有关的微分几何工具进行研究，其中 Lie 导数和 Lie 代数在研究非线性系统的几何方法中起着重要作用。

3.2.8 伴随微分形式、Hodge 星算子

设 (M,g) 是 n 维已定向的 Riemann 流形(参看 3.1.5 和 3.3.1)，U 是 M 上含 x 的一个

坐标邻域，其上局部坐标为$\{x_i\}$。取切空间T_xM的一个基底$\{\partial/\partial x_i|_x\}$。令$g_{ij}(x)=g_x(\partial/\partial x_i|_x,\partial/\partial x_j|_x)(i,j=1,\cdots,n)$，并记矩阵$(g^{ij}(x))=(g_{ij}(x))^{-1}$。令$\det(g_{ij})=G$；显然，$\det(g^{ij})=G^{-1}$。

定义 3.2.16　设$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$是$M$上的一个$p$-形式，它在$U$中的局部坐标表达式为$\omega=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$。定义映射$*:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{n-p}(M),\omega\mapsto*\omega$为

$$*\omega\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{1}{(n-p)!}\sum_{i_{p+1},\cdots,i_n}b_{i_{p+1}\cdots i_n}(x)\mathrm{d}x_{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}\tag{3.2.94}$$

其中，$\{i_1,\cdots,i_n\}$是$\{1,\cdots,n\}$的一个全排列，$b_{i_{p+1}\cdots i_n}=\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}\varepsilon_{i_1\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n}a^{i_1\cdots i_p}$，并取$a^{i_1\cdots i_p}=\sum_{j_1,\cdots,j_p}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}a_{j_1\cdots j_p}$，Levi-Civita 符号$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}$，在此定义一般的 Kronecker 记号如下：

$$\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}=\begin{cases}1, & \text{当上指标为下指标的偶置换}\\-1, & \text{当上指标为下指标的奇置换}\\0, & \text{其他情形}\end{cases}$$

我们称$*\omega$为微分形式ω的**伴随(或对偶)形式**，并称映射$*$为 **Hodge 星算子**。

可以证明，式(3.2.94)在保定向的局部坐标变换下是不变的(参看定理 3.3.3)，且它在M的任一个坐标邻域内都成立，因此可以将 Hodge 星算子的定义延拓到整个流形M上，从而给出在M上定义的$(n-p)$次微分形式$*\omega$。

Hodge 星算子有以下性质：

(1) $*$是线性映射，即对$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R},\omega_1,\omega_2\in\mathscr{F}^p(M)$有

$$*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1(*\omega_1)+\lambda_2(*\omega_2)\tag{3.2.95}$$

进一步地，对$f,g\in\mathscr{F}^0(M)=C^\infty(M)$也同样有

$$*(f\omega_1+g\omega_2)=f(*\omega_1)+g(*\omega_2)\tag{3.2.96}$$

(2) 对$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$*(*\omega)=(-1)^{p(n-p)}\omega\tag{3.2.97}$$

即$**=(-1)^{p(n-p)}\mathrm{id}$，其中 id 是恒等算子。于是有

$$(*)^{-1}\omega=(-1)^{p(n-p)}*\omega\tag{3.2.98}$$

即$(*)^{-1}=(-1)^{p(n-p)}*$。

(3) 对常值函数$f=1\in\mathscr{F}^0(M)$，有

$$*1=\mu,\quad *\mu=1\tag{3.2.99}$$

其中n-形式$\mu=\sqrt{G}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$。

一般地，对$f\in\mathscr{F}^0(M)$，有

$$*f=f\mu,\quad *(f\mu)=f\tag{3.2.100}$$

(4) 对$\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$\omega\wedge(*\theta)=\theta\wedge(*\omega)\tag{3.2.101}$$

性质(1)和(3)可以直接根据定义 3.2.16 证得。现在证明性质(2)。对$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，有$*\omega\in\mathscr{F}^{n-p}(M)$，它们的局部坐标表达式见定义 3.2.16。对$*\omega$再进行一次$*$运算，得到$*(*\omega)\in\mathscr{F}^p(M)$，记其坐标表达式为

$$*(*\omega)=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}c_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

根据定义 3.2.16,其分量为

$$c_{i_1\cdots i_p}=\frac{\sqrt{G}}{(n-p)!}\sum_{j_1,\cdots,j_{n-p}}\varepsilon_{j_1\cdots j_{n-p}i_1\cdots i_p}b^{j_1\cdots j_{n-p}}$$

其中

$$\begin{aligned}b^{j_1\cdots j_{n-p}}=&\sum_{j'_1,\cdots,j'_{n-p}}g^{j_1j'_1}\cdots g^{j_{n-p}j'_{n-p}}b_{j'_1\cdots j'_{n-p}}=\\&\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{k'_1,\cdots,k'_p}\sum_{j'_1,\cdots,j'_{n-p}}g^{j_1j'_1}\cdots g^{j_{n-p}j'_{n-p}}\cdot\varepsilon_{k'_1\cdots k'_pj'_1\cdots j'_{n-p}}a^{k'_1\cdots k'_p}=\\&\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{k'_1,\cdots,k'_p}\sum_{j'_1,\cdots,j'_{n-p}}g^{j_1j'_1}\cdots g^{j_{n-p}j'_{n-p}}\cdot\\&g^{k_1k'_1}\cdots g^{k_pk'_p}\varepsilon_{k'_1\cdots k'_pj'_1\cdots j'_{n-p}}a_{k_1\cdots k_p}\end{aligned}$$

考虑到 $\varepsilon_{k'_1\cdots k'_pj'_1\cdots j'_{n-p}}=\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}\delta^{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}_{k'_1\cdots k'_pj'_1\cdots j'_{n-p}}$,再根据行列式的定义,故有

$$\begin{aligned}&\sum_{k'_1,\cdots,k'_p}\sum_{j'_1,\cdots,j'_{n-p}}\varepsilon_{k'_1\cdots k'_pj'_1\cdots j'_{n-p}}g^{k_1k'_1}\cdots g^{k_pk'_p}g^{j_1j'_1}\cdots g^{j_{n-p}j'_{n-p}}=\\&\det(g^{ij})\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}=\\&G^{-1}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}c_{i_1\cdots i_p}=&\frac{G}{p!(n-p)!}\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{j_1,\cdots,j_{n-p}}G^{-1}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}\cdot\varepsilon_{j_1\cdots j_{n-p}i_1\cdots i_p}a_{k_1\cdots k_p}=\\&\frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{j_1,\cdots,j_{n-p}}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}}\cdot\varepsilon_{i_1\cdots i_pj_1\cdots j_{n-p}}a_{k_1\cdots k_p}=\\&(-1)^{p(n-p)}a_{i_1\cdots i_p}\end{aligned}$$

由此可见式(3.2.97)成立。

最后证明性质(4)。对 $\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$,分别记其局部坐标表达式为 $\omega=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$,$\theta=\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}b_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$。于是 $\omega\wedge(*\theta)\in\mathscr{F}^n(M)$,记 $\omega\wedge(*\theta)=\frac{1}{n!}\sum_{i_1,\cdots,i_n}e_{i_1\cdots i_n}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}$,其分量为

$$\begin{aligned}e_{i_1\cdots i_n}=&\frac{1}{p!(n-p)!}\sum_{j_1,\cdots,j_n}a_{j_1\cdots j_p}(*\theta)_{j_{p+1}\cdots j_n}\delta^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_n}=\\&\frac{1}{p!(n-p)!}\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_n}\sum_{k_1,\cdots,k_p}a_{j_1\cdots j_p}b^{k_1\cdots k_p}\cdot\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_{p+1}\cdots j_n}\delta^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_n}\end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned}&\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{j_{p+1},\cdots,j_n}b^{k_1\cdots k_p}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_{p+1}\cdots j_n}\delta^{j_1\cdots j_n}_{i_1\cdots i_n}=\\&\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{j_{p+1},\cdots,j_n}b^{k_1\cdots k_p}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_{p+1}\cdots j_n}\delta^{k_1\cdots k_pj_{p+1}\cdots j_n}_{i_1\cdots i_n}\delta^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_p}=\end{aligned}$$

$$(n-p)!b^{j_1\cdots j_p}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$$

故有

$$e_{i_1\cdots i_n}=\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p}a_{j_1\cdots j_p}b^{j_1\cdots j_p}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=$$

$$\frac{\sqrt{G}}{p!}\sum_{j_1,\cdots,j_p}\sum_{j'_1,\cdots,j'_p}g^{j_1j'_1}\cdots g^{j_pj'_p}\cdot a_{j_1\cdots j_p}b_{j_1\cdots j_p}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$$

类似地，$\theta\wedge(*\omega)$的分量亦有同样结果，故式(3.2.101)成立。

例 3.2.11 考虑三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$。在其上取直角坐标系(x,y,z)，则 Riemann 度量矩阵元素为 $g_{ij}=\delta_{ij}(i,j=1,2,3)$。于是有 $g^{ij}=\delta^{ij}(i,j=1,2,3)$和$G=1$。直接计算后得到

$$*\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\ *\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,\ *\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$*(\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=\mathrm{d}x,\ *(\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x)=\mathrm{d}y,\ *(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)=\mathrm{d}z$$

$$*1=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$*\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=1$$

对于 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$，有

$$*f=f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$*(f\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)=f$$

此外，由 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$，得到

$$*\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y$$

若取球坐标系(r,θ,φ)，则其 Riemann 度量矩阵元素为 $g_{11}=1,g_{22}=r^2,g_{33}=r^2\sin^2\theta,g_{ij}=0\ (i\neq j)$。于是有 $g^{11}=1,g^{22}=r^{-2},g^{33}=(r\sin\theta)^{-2},g^{ij}=0(i\neq j)$和 $G=r^4\sin^2\theta$。对于 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$，有 $\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$，因此 $*\mathrm{d}f=r^2\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}r+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta$。

例 3.2.12 在 $\mathbf{R}^3$ 中取直角坐标系(x,y,z)，则对于 $\omega=a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z\in\mathscr{F}^1(\mathbf{R}^3)$，有 $*\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\mathrm{d}z$，$*\mathrm{d}*\omega=\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}$。

显然，若取向量场 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$，则 $*\mathrm{d}$ 和 $*\mathrm{d}*$ 对 1 -形式 ω 的作用分别对应向量分析中的 **rotA** 和 **divA** 的概念。这样我们又得到旋度和散度的另一表述方式。连同例 3.2.3 的结果，我们可将微分形式与向量分析的运算对照如下：

grad = d(作用在 0 -形式上)

rot = d(作用在 1 -形式上) 或 $*$d(作用在 1 -形式上)

div = d(作用在 2 -形式上) 或 $*$d$*$(作用在 1 -形式上)

3.2.9 余微分、调和算子

前面已经知道，外微分算子 $\mathrm{d}:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{p+1}(M)$是一种使微分形式的次数增加一次的线性微分算子，这里引进另一种使微分形式的次数减少一次的线性微分算子 δ。

定义 3.2.17 设(M,g)是 n 维已定向的 Riemann 流形，对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，定义映射

$\delta:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{p-1}(M),\omega\mapsto\delta\omega$ 如下

$$\delta\omega \xlongequal{\mathrm{d}} (-1)^{n(p+1)+1} * \mathrm{d} * \omega \tag{3.2.102}$$

我们称 $\delta\omega$ 为微分形式 ω 的**余微分**。当 $p=0$ 时，即对于 $f\in C^\infty(M)$，因为 $*f\in\mathscr{F}^n(M)$，故 $\delta f=0$。

由式(3.2.102)直接看到，δ 是一个线性微分算子。它有以下性质：

(1)
$$\delta^2 = 0 \tag{3.2.103}$$

(2)
$$\mathrm{d}*\delta = \delta*\mathrm{d} = 0 \tag{3.2.104}$$

(3)
$$*\delta\mathrm{d} = \mathrm{d}\delta*,\quad *\mathrm{d}\delta = \delta\mathrm{d}* \tag{3.2.105}$$

(4) 对于 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$*\delta\omega = (-1)^p\mathrm{d}*\omega \tag{3.2.106}$$

$$\delta*\omega = (-1)^{n-p+1}*\mathrm{d}\omega \tag{3.2.107}$$

上述性质的证明留作习题。在后面的 3.3.3，我们还要指出，外微分算子 d 和余微分算子 δ 是互为共轭的线性微分算子。

类似于前面定义过的闭形式和恰当形式，下面定义余闭形式和余恰当形式。

定义 3.2.18　设 (M,g) 是 n 维已定向的 Riemann 流形，$\omega\in\mathscr{F}^p(M)$。如果 $\delta\omega=0$，则称 ω 为**余闭微分形式**(简称**余闭形式**)。如果存在 $\theta\in\mathscr{F}^{p+1}(M)$，使得 $\omega=\delta\theta$ 成立，则称 ω 为**余恰当微分形式**(简称**余恰当形式**)。

定义 3.2.19　设 (M,g) 是 n 维已定向的 Riemann 流形，定义映射 $\Delta:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^p(M)$ 如下

$$\Delta = \mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d} \tag{3.2.108}$$

Δ 称为 Riemann 流形 M 上的**调和算子**，又称**广义 Laplace 算子**或 **Hodge - Laplace 算子**。若 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 满足方程 $\Delta\omega=0$，则称 ω 为**调和形式**。

由式(3.2.108)直接见到，Δ 是一个线性微分算子。它有以下性质：

(1)
$$\Delta = (\mathrm{d}+\delta)^2 \tag{3.2.109}$$

(2)
$$\mathrm{d}\circ\Delta = \Delta\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ\delta\circ\mathrm{d} \tag{3.2.110}$$

(3)
$$\delta\circ\Delta = \Delta\circ\delta = \delta\circ\mathrm{d}\circ\delta \tag{3.2.111}$$

(4)
$$*\Delta = \Delta* \tag{3.2.112}$$

上述性质的证明留作习题。

例 3.2.13　对于 $f\in\mathscr{F}^0(M)=C^\infty(M)$，因为 $\delta f=0$，故有

$$\Delta f = \delta\mathrm{d}f \tag{3.2.113}$$

特别地，取 $M=\mathbf{R}^n$，在直角坐标系 $\{x_i\}(i=1,\cdots,n)$ 下利用式(3.2.113)和(3.2.102)，我们得到

$$\Delta f = \delta\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\Big) = -*\mathrm{d}*\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\Big) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{3.2.114}$$

由此可见，当作用在 $\mathbf{R}^n$ 的光滑函数 f 上时，调和算子 Δ 与通常的 Laplace 算子 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 只相差一个符号。$\mathbf{R}^n$ 上的调和 0 -形式满足通常的 Laplace 方程，也就是通常的调和函数。因此流形 M 上的调和算子和调和形式是通常 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子和调和函数的概念向微分形式的自然推广。

关于调和形式和调和算子有如下的定理。

定理 3.2.4 设 M 是已定向的无边紧 Riemann 流形，则微分形式 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 是调和形式的充分必要条件是 $d\omega=0$ 和 $\delta\omega=0$，即 ω 同时是闭形式和余闭形式。

定理 3.2.5 设 M 是已定向的无边紧 Riemann 流形，则 M 上的调和算子 Δ 是正定的自伴线性微分算子。

这些定理的证明放到后面的 3.3.3。

3.2.10 微分形式的一些应用

大量的实际系统可以通过微分方程描述其状态或运动。但是微分方程依赖于坐标系的选取，只能给出系统的局部描述。在本小节里，我们利用微分形式去表达系统的状态方程或运动方程，从而给出系统的大范围的内蕴描述。这种表示不仅与坐标系的选取无关，而且往往有突出的简明性，可以更深刻地反映系统的物理本质。基本思想是选取适当的微分流形作为系统的状态空间，在其上构造由有关状态变量给出的微分形式，再利用微分形式的运算法则以及有关的科学假设和结果，最终建立用微分形式表示的公式，并用于研究系统的大范围性态。下面通过力学、热学、电磁学、控制学等方面的例子予以说明。

1. 质点系的 Hamilton 力学系统

由 3.1.3 和 3.1.4 知道，力学系统通常有两种描述方式：Lagrange 体系和 Hamilton 体系。由于 Hamilton 体系清楚地反映力学系统的几何背景，因此更适合采用微分流形的数学工具进行描述。我们在这里着重讨论质点系的定常 Hamilton 力学方程如何用微分形式表达的问题。

设 n 个自由度定常力学系统的位形空间是 n 维微分流形 M，在其上取广义坐标 $q=(q_1,\cdots,q_n)$，相应的广义速度为 $\dot{q}=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n)$。$(q,\dot{q})$ 给出切丛 TM 的局部坐标。设该系统有 Lagrange 函数 $L:TM\to\mathbf{R}$，记为 $L(q,\dot{q})$，并引入广义动量 $p(p_1,\cdots,p_n)$，其中 $p_i=\partial L/\partial\dot{q}_i(i=1,\cdots,n)$。$(q,p)$ 给出余切丛 T^*M 的局部坐标。定义该系统的 Hamilton 函数 $H:T^*M\to\mathbf{R}$ 为 $H(q,p)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L(q,\dot{q})$，在这里的 $\dot{q}_i$ 都应表示成 (q,p) 的函数。特别地，如果该系统是保守的(即有势的)，将动能函数 $T:TM\to\mathbf{R}$ 记为 $T(q,\dot{q})$，势能函数 $V:M\to\mathbf{R}$ 记为 $V(q)$，则有 $L(q,\dot{q})=T(q,\dot{q})-V(q)$，$H(q,p)=T(q,\dot{q})-V(q)$(这里亦需将 $\dot{q}$ 表示成 (q,p) 的函数)。显然，对定常保守力学系统，Hamilton 函数的物理意义就是系统的总能量。

现在考虑定常 Hamilton 力学系统。我们取 $2n$ 维微分流形 $P=T^*M$ 作为状态空间(相空间)，该系统的 Hamilton 函数 H 不显含时间 t。由经典分析力学知道，若在 P 的一个坐标邻域 U 上取局部坐标 (q,p)，其中 q 和 p 分别为广义坐标和广义动量，定常力学系统的运动方程是 Hamilton 正则方程

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.2.115}$$

该方程完全由能量函数 H 所决定，且具有特有的简洁性和反对称性。为了深入揭示 Hamilton 力学系统的本质和开展大范围分析，我们需要研究 Hamilton 力学系统的内蕴描述。事实上，定常 Hamilton 力学是建立在辛流形的几何结构基础上的。

定义 3.2.20 设 P 是一个 $2n$ 维微分流形，ω 是 P 上的一个非退化的闭 2-形式(即 ω 满足 $d\omega=0$，且若对任何 $Y\in\mathscr{X}(P)$ 有 $i_X\omega(Y)=0$，则 $X=0$)，称 ω 为 P 上的一个**辛形式(辛结构)**。

赋予辛结构的流形(P,ω)称为**辛流形**。

定理 3.2.6(Darboux 定理) ω是$2n$维流形P上的辛形式的充分必要条件是对于P上的每点的某个邻域U,存在局部坐标$(q_i,p_i)(i=1,\cdots,n)$,使得ω在U内有局部表达式

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}q_i \tag{3.2.116}$$

在上述定理中,式(3.2.116)称为辛形式ω的**标准形式(正则 2-形式)**,使ω取标准形式的局部坐标(q,p)称为**辛坐标(正则变量)**。此定理的证明请参看参考文献[1,2]。

顺便指出,在辛流形(P,ω)上存在一个 1-形式(Cartan 形式)θ,使得在辛坐标(q,p)下有$\theta=\sum_{i=1}^{n}p_i\mathrm{d}q_i$,称为正则 1-形式。于是辛形式$\omega$可表示为$\omega=\mathrm{d}\theta$。

接着讨论在辛流形上根据保守力学系统的 Hamilton 函数去确定向量场的问题。

定义 3.2.21 设(P,ω)是辛流形,函数$H\in C^{\infty}(P)$,定义$X_H\in\mathscr{X}(P)$使得

$$i_{X_H}\omega=-\mathrm{d}H \tag{3.2.117}$$

则称X_H为在P上由 Hamilton 函数H确定的 Hamilton 向量场,(P,ω,X_H)称为P上的一个**定常 Hamilton 系统**。

定理 3.2.7 设(P,ω)是辛流形,取辛坐标(q,p)使得$\omega=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i$,则 Hamilton 向量场在此坐标系下有局部表达式

$$X_H=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{3.2.118}$$

它对应着 Hamilton 正则方程(3.2.115)。

证 只需证明由本定理给出的X_H和ω满足式(3.2.117)。事实上,$i_{X_H}\omega=i_{X_H}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q_i\right)=\sum_{i=1}^{n}[(i_{X_H}\mathrm{d}p_i)\mathrm{d}q_i-\mathrm{d}p_i(i_{X_H}\mathrm{d}q_i)]$。考虑到$i_{X_H}\mathrm{d}q_i=\mathrm{d}q_i(X_H)=\partial H/\partial p_i$,$i_{X_H}\mathrm{d}p_i=\mathrm{d}p_i(X_H)=-\partial H/\partial q_i$,因此

$$i_{X_H}\omega=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right)=-\mathrm{d}H$$

由此可见,由式(3.2.117)定义的 Hamilton 向量场有局部表达式(3.2.118)。证毕。

定常 Hamilton 力学系统的运动可从整体地由式(3.2.117)给出的向量场X_H的积分曲线或相应的单参数变换群$\{\psi_t\}$描述,从而能够进一步研究系统的大范围性态。这里讨论定常 Hamilton 系统的一些守恒定律。

定理 3.2.8 设(P,ω,X_H)是定常 Hamilton 系统,则沿着向量场X_H的积分曲线,Hamilton 函数H、辛形式ω和体形式Ω都是守恒的;即对任何$t\in\mathbf{R}$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*H)=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*\omega)=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*\Omega)=0 \tag{3.2.119}$$

证 首先,由式(3.2.52)有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*H)=\psi_t^*(L_{X_H}H)$。利用式(3.2.60),并考虑到$i_{X_H}H=0$,上式化为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*H)=\psi_t^*(i_{X_H}\mathrm{d}H)$。再由式(3.2.117)和式(3.2.38)得到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_t^*H)=\psi_t^*(-i_{X_H}(i_{X_H}\omega))=0$。

然后，由式(3.2.59)和式(3.2.60)有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^* \omega) = \varphi_t^*(L_{X_H}\omega) = \varphi_t^*(i_{X_H}\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_{X_H}\omega)$。考虑到辛形式是闭的，即 $\mathrm{d}\omega=0$，再由式(3.2.119)得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\omega) = \varphi_t^*(-\mathrm{d}(\mathrm{d}H)) = 0$。

最后，由于辛流形的标准体形式可表示为 $\Omega=(-1)^{[n/2]}\omega^n/n!$，其中辛流形 P 的维数等于 $2n$，$[n/2]$是 $n/2$ 的整数部分，ω^n 表示 ω 的 n 重外积。于是，由式(3.2.29)有

$$\begin{aligned}\varphi_t^*\Omega &= (-1)^{[n/2]}\varphi_t^*\omega \wedge \cdots \wedge \varphi_t^*\omega/n! = \\ &(-1)^{[n/2]}\omega \wedge \cdots \wedge \omega/n! = \\ &\Omega\end{aligned}$$

其中用到了 $\varphi_t^*\omega=\omega$ 的结果。这表明$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\Omega)=0$。证毕。

我们还有下面的更一般的结果。

定理 3.2.9 设(P,ω,X_H)是定常 Hamilton 系统，H 是 Hamilton 函数，U 是 $2n$ 维辛流形 P 上的一个辛坐标邻域，其上的局部坐标为$(q_1,\cdots,q_n;p_1,\cdots,p_n)$，则任何函数 $f\in C^\infty(U)$ 有

$$L_{X_H}f = -\{H,f\} \tag{3.2.120}$$

这里的$\{\cdot,\cdot\}$是由式(3.2.93)定义的 Poisson 括号。

证 由式(3.2.60)，并考虑到 $i_{X_H}f=0$，有

$$L_{X_H}f = i_{X_H}\mathrm{d}f = \mathrm{d}f(X_H) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = -\{H,f\}$$

推论 在定理 3.2.9 的条件下，如果对流形 P 的任何辛坐标邻域 U 都有$\{H,f\}\equiv 0$，则函数 f 沿向量场 X_H 的积分曲线是守恒的。

事实上，这时沿着向量场 X_H 的积分曲线有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^* f) = \varphi_t^*(L_{X_H}f) = -\varphi_t^*\{H,f\} = 0$。显然，由于$\{H,H\}\equiv 0$，故亦得到 Hamilton 函数 H 的守恒性。

定理 3.2.8 有着十分重要的物理意义和几何意义。它表明在定常 Hamilton 系统的运动过程中，Hamilton 函数(即能量函数)、辛结构和相体积都是守恒量。上述结论在经典力学、统计力学、量子力学和数值计算的辛算法等方面都起着重要作用。

正则坐标在定常 Hamilton 力学系统研究中有特殊地位，这是因为在正则坐标下，定常 Hamilton 力学系统的运动方程取 Hamilton 正则方程的形式。为此，进一步讨论不同的正则变量之间的关系。

定义 3.2.22 设(M,ω)、(N,θ)是辛流形，$F:M\to N$ 是C^∞映射且有 $F^*\theta=\omega$，则称 F 为从(M,ω)到(N,θ)的**辛映射(正则变换)**。特别地，满足 $F^*\omega=\omega$ 的 C^∞映射 $F:M\to M$ 称为(M,ω)的**辛映射(正则变换)**。

容易证明，辛映射是一个微分同胚，且辛映射的逆或复合都是辛映射，因此全体辛映射关于复合映射运算构成一个群——**辛群**。特别重要的是，辛映射可以将定常 Hamilton 系统的一组正则变量变换为另一组正则变量，于是我们不但可以取广义坐标和广义动量作为正则变量，而且可以通过辛映射(正则变换)得到其他的正则变量，使得 Hamilton 正则方程的形式保持不变。因此辛映射在定常 Hamilton 系统的理论研究和实际应用中都是很重要的。这可以通过下面的性质加以说明。

定理 3.2.10 设 F 是辛流形 P 上的一个 C^∞ 映射，则 F 是 P 上的辛映射的充分必要条件是在流形 P 的任何坐标邻域 U 上，对于任何 $f,g\in C^\infty(U)$ 有

$$F^*\{f,g\} = \{F^* f, F^* g\} \tag{3.2.121}$$

也就是说，如果映射 F 将 U 上的辛坐标 (q,p) 变为坐标 $(\bar{q},\bar{p})$，并记 $\bar{f}(\bar{q},\bar{p})=f(q,p)$，$\bar{g}(\bar{q},\bar{p})=g(q,p)$，则 F 是辛映射的充分必要条件是对任何 $C^\infty(U)$ 函数 f,g 有

$$\{f,g\}_{(q,p)} = \{\bar{f},\bar{g}\}_{(\bar{q},\bar{p})} \tag{3.2.122}$$

上述结果表明 Poisson 括号在正则变换下具有形式不变性。由定理 3.2.10 可进一步得到下面推论。

推论 设 F 是辛流形 P 上的一个 C^∞ 映射，且将辛坐标 (q,p) 变为坐标 $(\bar{q},\bar{p})$，则 F 是辛映射的充分必要条件是

$$\{\bar{q}_i,\bar{q}_j\}_{(q,p)} = \{\bar{p}_i,\bar{p}_j\}_{(q,p)} = 0,\ \{\bar{q}_i,\bar{p}_j\}_{(q,p)} = \delta_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n \tag{3.2.123}$$

定理 3.2.10 及其推论的证明留作习题。

定理 3.2.11 设 F 是辛流形 (P,ω) 上的一个辛映射，则 F 将 P 上任何坐标邻域 U 上的辛坐标 (q,p) 变换为 $F(U)$ 上的辛坐标 $(\bar{q},\bar{p})$，且保持 Hamilton 向量场的形式不变。

证 由 Darboux 定理，辛形式 ω 在坐标邻域 U 的辛坐标 (q,p) 下取标准形式 $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$。在辛映射 $F:U\to F(U)$ 的作用下，辛坐标 (q,p) 变换为坐标 $(\bar{q},\bar{p})$。利用式(3.2.123)，辛形式 ω 变换为 $\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}\bar{p}_i \wedge \mathrm{d}\bar{q}_i$。这表明 ω 在坐标 $(\bar{q},\bar{p})$ 下仍取标准形式，从而 $(\bar{q},\bar{p})$ 是 $F(U)$ 上的辛坐标。

记 Hamilton 函数 $H(q,p)=\bar{H}(\bar{q},\bar{p})$。类似定理 3.2.7 的证明，定常 Hamilton 系统的运动方程在坐标 (q,p) 和 $(\bar{q},\bar{p})$ 下都取正则方程的形式

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i,\ \dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

和

$$\dot{\bar{q}}_i = \partial \bar{H}/\partial \bar{p}_i,\ \dot{\bar{p}}_i = -\partial \bar{H}/\partial \bar{q}_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

由此可见，对定常 Hamilton 力学系统，正则变换保持 Hamilton 正则方程的形式不变，即 Hamilton 向量场在正则变换下具有形式不变性。证毕。

最后，关于经典力学系统的几何理论，我们还要指出两点：

(1) 在经典力学的 Hamilton 体系中，我们是在余切丛 T^*M 的几何框架内进行讨论的，采用的状态变量是正则变量。而在 Lagrange 体系中，我们是在切丛 TM 的几何框架内进行讨论的，采用的状态变量是广义坐标和广义动量。若要在 Hamilton 体系与 Lagrange 体系之间转换，就要在 T^*M 和 TM 之间互相变换。为此，引进 **Legendre 变换** $\mathscr{L}$。设位形空间 M 是一个 Riemann 流形，g 是 M 上的一个 Riemann 度量，定义映射 $\mathscr{L}:TM\to T^*M$ 如下

$$\mathscr{L}(\xi)(\eta) = g_x(\xi,\eta),\ x\in M,\ \xi,\eta\in T_xM \tag{3.2.124}$$

由此可见 $\mathscr{L}(\xi)\in T_x^*M$。

例如，对于 n 个自由度的质点系，其动能函数 $T:TM\to\mathbf{R}$ 可表示为 $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$，于是，可以利用这个动能度量 $(g_{ij}(q))$ 去建立一个自然的 Legendre 变化 $\mathscr{L}$。事实上，令 $\mathscr{L}(\dot{q})(\dot{q}') = g_q(\dot{q},\dot{q}') = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j'$，可得 $\mathscr{L}(\dot{q})_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}(q)\dot{q}_j = \partial T/\partial \dot{q}_i$。这个

$\mathscr{L}(\dot{q})$显然是$(\dot{q}_i)$的线性齐次函数，故$\mathscr{L}(\dot{q})\in T_q^*M$。如果该系统是保守的，势能函数$V=V(q)$，则 Lagrange 函数$L(q,\dot{q})=T(q,\dot{q})-V(q)$，从而$\partial T/\partial\dot{q}_i=\partial L/\partial\dot{q}_i$，故有$\mathscr{L}(\dot{q})_i=\partial L/\partial\dot{q}_i=p_i$。此时有 Legendre 变换$\mathscr{L}:TM\to T^*M$，

$$(q_i,\dot{q}_i)\mapsto\left(q_i,\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)=(q_i,p_i)\tag{3.2.125}$$

我们还可以利用 Legendre 变换的拉回映射$\mathscr{L}^*$，由T^*M上的辛形式ω得到TM上的 2-形式$\omega_L=\mathscr{L}^*\omega$。$\omega_L$称为 **Lagrange 2-形式**。此外，取函数$E:TM\to\mathbf{R}$，使得$E=H\circ\mathscr{L}=\mathscr{L}^*H$。$E$亦称为**能量函数**。特别地，对于保守系统有$E=T+V$。

于是对应着状态空间为T^*M的定常 Hamilton 力学描述体系中的要素ω,H和X_H，我们通过 Legendre 变换得到状态空间为TM的 Lagrange 力学描述体系中的要素ω_L,E和X_E。根据 Hamilton 向量场的关系式(3.2.117)，我们也有相应的 Lagrange 向量场的关系式

$$i_{X_E}\omega_L=-\mathrm{d}E\tag{3.2.126}$$

可以证明，如果在TM上取局部坐标$(q,\dot{q})$，则相应于定常力学系统的 Lagrange 向量场ω_L的积分曲线的微分方程为熟知的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1,\cdots,n\tag{3.2.127}$$

上述结果表明了经典力学的 Hamilton 体系与 Lagrange 体系的相互关系。

(2) 我们在前面讨论了定常 Hamilton 力学系统，即 Hamilton 函数H不显含时间t的情形。下面简单讨论非定常 Hamilton 力学系统，即 Hamilton 函数H显含时间t的情形。这时，我们取扩展的相空间$T^*M\times\mathbf{R}$作为状态空间$\bar{P}$，它是$2n+1$维流形。Hamilton 函数为$H:T^*M\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$。然后，设$P=T^*M$上有辛形式$\omega$，取$\bar{P}$上的 2-形式

$$\Omega=\pi^*\omega-\mathrm{d}H\wedge\mathrm{d}t\tag{3.2.128}$$

其中$\pi:T^*M\times\mathbf{R}\to T^*M$是投影映射。$(\bar{P},\Omega)$称为**切触流形**。非定常 Hamilton 力学的几何理论是以切触流形为基础的，相应的向量场是与时间有关的。因为切触流形是奇数维的，所以它不可能是辛流形，上面对定常力学系统的处理方法不再适用。关于非定常 Hamilton 力学系统的几何研究请参看参考文献[1]。

2. 连续介质系统

(1) 热传导方程

考虑二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)=0\tag{3.2.129}$$

其中，$u=u(x,y,t)$是温度场，空间变量为$(x,y)\in\Omega\subset\mathbf{R}^2$，时间变量为$t>0$，$a$为常数。引入 2-形式

$$\alpha=a^2(u_x\mathrm{d}y-u_y\mathrm{d}x)\wedge\mathrm{d}t-u\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\tag{3.2.130}$$

于是由式(3.2.129)有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha&=a^2(u_{xx}+u_{yy})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t-u_t\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\\&[a^2(u_{xx}+u_{yy})-u_t]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}t=0\end{aligned}$$

这表明热传导方程可以用微分形式表示为

$$\mathrm{d}\alpha=0\tag{3.2.131}$$

上式反映了在无热源的情况下的热量守恒关系。

(2) 流体力学方程

考虑三维空间中的理想流体流动方程组。连续性方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v})=0 \tag{3.2.132}$$

其中，$\rho(x_1,x_2,x_3,t)$为流体密度，$\boldsymbol{v}(x_1,x_2,x_3,t)$为流体速度。引入 3-形式

$$\mu=\rho(\mathrm{d}x_1-v_1\mathrm{d}t)\wedge(\mathrm{d}x_2-v_2\mathrm{d}t)\wedge(\mathrm{d}x_3-v_3\mathrm{d}t)=\rho\beta \tag{3.2.133}$$

于是由式(3.2.132)得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mu&=\mathrm{d}\rho\wedge\beta+\rho\mathrm{d}\beta=\\&\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\beta+\rho(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=\\&\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=0\end{aligned}$$

这表明连续方程可以用微分形式表示为

$$\mathrm{d}\mu=0 \tag{3.2.134}$$

上式反映了流体流动过程中的质量守恒关系。

流体运动的 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\equiv\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_i}v=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p \tag{3.2.135}$$

其中，$p(x_1,x_2,x_3,t)$为压强，$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,x_3,t)$为作用在单位质量的流体上的体积力。

假设 $\boldsymbol{F}$ 是有势力场，即存在势能 $V(x_1,x_2,x_3,t)$使得 $\boldsymbol{F}=-\mathbf{grad}V$。此外，假设 p 只与 ρ 有关，即 $p=p(\rho)$（例如流动是绝热的）。引入压力能 $q(x_1,x_2,x_3,t)$，使得 $\mathrm{d}q=\mathrm{d}p/\rho$，即 $q=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}$。于是流动方程(3.2.135)可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\mathbf{grad}(V+q) \tag{3.2.136}$$

单位质量的流体的总能量为

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}v_i^2+V+q \tag{3.2.137}$$

引入速度 1-形式

$$\beta=v_1\mathrm{d}x_1+v_2\mathrm{d}x_2+v_3\mathrm{d}x_3 \tag{3.2.138}$$

和涡量 1-形式

$$\begin{aligned}\gamma&=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_2+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_3=\\&\xi\mathrm{d}x_1+\eta\mathrm{d}x_2+\zeta\mathrm{d}x_3\end{aligned} \tag{3.2.139}$$

以及 1-形式

$$\omega=\beta-E\mathrm{d}t \tag{3.2.140}$$

通过计算得到

$$\mathrm{d}\omega=\xi\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\eta\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\zeta\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial E}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_i\right]\wedge\mathrm{d}t$$

由式(3.2.136)和式(3.2.137)得到

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial t}=\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}(V+q)+\frac{\partial v_1}{\partial t}=$$

$$\left(v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)-\left(v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=$$

$$v_2\xi-v_3\eta$$

同理，$\dfrac{\partial E}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial t}=v_3\xi-v_1\zeta,\dfrac{\partial E}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial t}=v_1\eta-v_2\xi$。于是由上面的结果得到

$$\mathrm{d}\omega=\xi\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+\eta\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+\zeta\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2-$$

$$[(v_2\zeta-v_3\eta)\mathrm{d}x_1+(v_3\xi-v_1\zeta)\mathrm{d}x_2+(v_1\eta-v_2\xi)\mathrm{d}x_3]\wedge\mathrm{d}t$$

若算子 * 只作用于空间变量，上式可以表示成

$$\mathrm{d}\omega=*\gamma-[*(\beta\wedge\gamma)]\wedge\mathrm{d}t \tag{3.2.141}$$

这就是流体运动方程(3.2.136)的微分形式表示。

3. 电磁场系统

在真空中电磁场的 Maxwell 方程组通常写成下列三维向量形式：

(1) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$

(2) $\mathbf{div}\ \boldsymbol{B}=0$

(3) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}=\partial\boldsymbol{E}/\partial t+\mu_0\boldsymbol{j}$

(4) $\mathbf{div}\ \boldsymbol{E}=\varepsilon_0^{-1}\rho$

其中，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为电场强度和磁感应强度，ρ 为电荷密度，$\boldsymbol{j}$ 为电流密度，ε_0 和 μ_0 分别为介电常数和导磁率常数，并有 $\varepsilon_0\mu_0=c^{-2}$，$c$ 为光速。选取适当的电磁单位使得 $c=1$，从而 $\varepsilon_0^{-1}=\mu_0$。

令空间-时间变量$(x_1,x_2,x_3,t)\in M=\boldsymbol{R}^4$，$M$ 为四维 Minkowski 空间，其上的度量矩阵元素为 $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,g_{44}=-1,g_{ij}=0(i\neq j,i,j=1,\cdots,4)$。

取电磁场 2-形式为

$$F=E_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}t+E_2\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}t+E_3\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}t+$$

$$B_1\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+B_2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1+B_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2 \tag{3.2.142}$$

场源 1-形式为

$$J=j_1\mathrm{d}x_1+j_2\mathrm{d}x_2+j_3\mathrm{d}x_3-\rho\mathrm{d}t \tag{3.2.143}$$

于是 Maxwell 方程组可用微分形式表示成

$$\mathrm{d}F=0 \tag{3.2.144}$$

$$\delta F=\mu_0 J \tag{3.2.145}$$

证明如下。先证方程(1)、(2)与式(3.2.144)等价。事实上，通过直接计算和方程(1)、(2)得到

$$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_3}+\frac{\partial B_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}t+$$

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3}-\frac{\partial E_3}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}t+$$

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1}-\frac{\partial E_1}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial t}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}t+$$

$$\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial B_2}{\partial x_2}+\frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3=0$$

再证方程(3)、(4)与式(3.2.145)等价。事实上，通过直接计算和方程(3)、(4)及式(3.2.143)得到

$$\begin{aligned}\delta F &= *\mathrm{d}*F = \\ &*\mathrm{d}(-E_1\mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3 - E_1\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_1 - E_3\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2 + \\ &B_1\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}t + B_2\mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}t + B_2\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}t) = \\ &*\Big[-(\mathbf{div}\ \boldsymbol{E})\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3 + \\ &\left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_1 \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}t + \\ &\left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_2 \mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}t + \\ &\left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_3 \mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}t\Big] = \\ &\left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_1 \mathrm{d}x_1 + \left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_2 \mathrm{d}x_2 + \\ &\left(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B}-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)_3 \mathrm{d}x_3 - (\mathrm{div}\ \boldsymbol{E})\mathrm{d}t = \mu_0 J\end{aligned}$$

考虑到 $\delta^2=0$，因此将算子 δ 作用于式(3.2.145)，有下面的推论

$$\delta J = 0 \tag{3.2.146}$$

为了考察式(3.2.146)的物理意义，通过直接计算得到

$$\begin{aligned}0 = \delta J &= *\mathrm{d}*J = \\ &*\mathrm{d}(j_1\mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}t + j_2\mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}t + \\ &j_3\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}t - \rho\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3 = \\ &*\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}x_1\wedge \mathrm{d}x_2\wedge \mathrm{d}x_3\wedge \mathrm{d}t\right] = \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\ \boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{3.2.147}$$

由此可见式(3.2.146)反映了电荷守恒定律。

此外，由式(3.2.144)和 Poincaré 引理的逆命题得知，对于任何可收缩为一点的时空区域 Ω，F 是 Ω 上的一个恰当形式，即存在 Ω 上的一个 1-形式 λ，使得

$$F = \mathrm{d}\lambda \tag{3.2.148}$$

记 $\lambda=A_1\mathrm{d}x_1+A_2\mathrm{d}x_2+A_3\mathrm{d}x_3+A_0\mathrm{d}t$，通常称三维向量函数 $\boldsymbol{A}=(A_1,A_2,A_3)$ 为矢势，标量函数 A_0 为标势。于是式(3.2.148)亦可写成三维向量形式

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{3.2.149}$$

$$\mathbf{grad}\ A_0 - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{E} \tag{3.2.150}$$

4. 非线性控制系统

考虑定义在微分流形上的非线性控制系统。取状态空间 M 为 m 维流形，输出空间 N 为 n 维流形，容许控制集 Ω 为某个可微函数集合。$x\in M$ 称为状态变量，$y\in N$ 称为输出，$u\in\Omega$ 称为控制(或输入)。记 $X(x,t)$ 为流形 M 上的光滑向量场，则流形 M 上的控制系统由下列方程组描述

$$X = f(x,u) \tag{3.2.151}$$

$$y = h(x) \tag{3.2.152}$$

其中 $f:M\times\Omega\to\mathscr{X}(M)$，$h:M\to N$ 都是光滑映射。方程(3.2.151)称为控制系统的状态方程。我们假设该控制系统是完备的，即对于任何允许的控制 $u\in\Omega$ 和初值 $x_0\in M$，都存在方程(3.2.151)的惟一轨线 $x(t)\in M(t\in\mathbf{R})$。方程(3.2.152)称为控制系统的输出方程，利用它就可以最终地得到系统的输出。

线性系统的控制问题可以在线性代数的理论框架内解决。但是对于非线性系统的控制问题，运动情况十分复杂，线性系统理论已不再适用，人们需要发展非线性系统的控制理论方法。由前面知道，非线性系统的动态特性与向量场密切相关，其运动轨线或输出一般都属于一些低维子流形，因此微分流形上的向量场和其他微分几何工具在非线性控制理论研究中，特别是在稳定性、能控性、能观性、鲁棒性、解耦、线性化等定性分析方面发挥重要的作用，形成了非线性系统的微分几何方法。这里只简单介绍它在非线性系统的能控性的一些结果作为例子。

定义 3.2.23 设 $x_0, x_T\in M$。记方程(3.2.151)满足初值 $x(0)=x_0$ 的轨线为 $x(t)$。如果存在一个容许控制 $u\in\Omega$ 和一个时刻 $T\geqslant 0$，使得 $x(T)=x_T$，则称 x_T 为从 x_0 出发的一个**可达点**。x_0 的全体可达点的集合称为 x_0 的**可达集**，记为 $R(x_0)$。

定义 3.2.24 对系统(3.2.151)和(3.2.152)，如果对 $x_0\in M$ 有 $R(x_0)=M$，则称该系统在 x_0 处能控。如果系统对任何 $x\in M$ 都能控，则称该系统是**能控**的。

由于状态流形和非线性系统的许多性质是局部给出的，且各点的情况不尽相同，从而控制器的构造往往是局部的，因此需要考虑非线性系统的局部能控性。

定义 3.2.25 设 $U\subset M$ 为 x_0 的一个邻域。如果对于 $x_T\in U$，存在一个容许控制 $u\in\Omega$ 和一个时刻 $T\geqslant 0$，使得方程(3.2.151)满足初值 $x(0)=x_0$ 的轨线 $x(t)$ 有 $x(T)=x_T$，且 $x(t)\in U(0\leqslant t\leqslant T)$，则称 x_T 为 x_0 的一个 **U-可达点**。x_0 的全体 U-可达点的集合称为 x_0 的 **U-可达集**，记作 $R_U(x_0)$。

定义 3.2.26 对系统(3.2.151)和(3.2.152)，如果对 $x_0\in M$ 的任何邻域 U，$R_U(x_0)$ 仍是 x_0 的一个邻域，则称该系统在 x_0 处局部能控。如果系统对任何 $x\in M$ 都局部能控，则称该系统是**局部能控**的。

现在讨论一类特殊的情形，即仿射非线性控制系统的局部能控性。为方便起见，在 $x_0\in M$ 的邻域 U 内取局部坐标 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$，并且在输出流形 N 上也取局部坐标 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$，则流形 M 上的仿射非线性控制系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})u_i(t),\ t\in\mathbf{R} & (3.2.153) \\ \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) & (3.2.154) \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_k,\boldsymbol{h}$ 都是流形 M 上的光滑向量函数，$\boldsymbol{f}$ 称为漂移向量场。

引理 仿射线性控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{b}_i u_i(t),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m \tag{3.2.155}$$

是能控的充分必要条件是

$$\dim\operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_k,A\boldsymbol{b}_1,\cdots,A\boldsymbol{b}_k,\cdots,A^{m-1}\boldsymbol{b}_1,\cdots,A^{m-1}\boldsymbol{b}_k\} = m \tag{3.2.156}$$

这里 A 是 m 阶常矩阵,$b_1,\cdots,b_k$ 是 m 维常向量。

此引理的证明可参看参考文献[20]。如果在 x_0 处有 $f(x_0)=0$,则方程(3.2.153)在 x_0 处的线性化近似方程为

$$\dot{\xi} = A\xi + \sum_{i=1}^{k} b_i u_i(t) \tag{3.2.157}$$

其中,$\xi=x-x_0$, $A=\partial f/\partial x(x_0)$, $b_i=g_i(x_0)$。关于非线性系统(3.2.153)与其线性化近似系统(3.2.157)的能控性有下面的定理。

定理 3.2.12 设仿射非线性控制系统(3.2.153)在 x_0 处有 $f(x_0)=0$,且容许控制集 Ω 包含原点。如果其线性化近似系统(3.2.157)能控,即条件(3.2.156)成立,则系统(3.2.153)在 x_0 处是局部能控的。

对于 $f(x)=0$ 的无漂移系统,有

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{k} g_i(x) u_i(t), \tag{3.2.158}$$

此时线性化矩阵 $A=0$,条件(3.5.156)当 $k<m$ 时必定不成立,从而定理 3.2.12 不能使用。然而,有下面的结果。记 $\Delta_1=\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_k\}$,并定义一系列空间如下:

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}],\ i = 2,3,\cdots$$

其中,$[\Delta_1,\Delta_{i-1}]=\mathrm{span}\{[u,v],\ u\in\Delta_1,\ v\in\Delta_{i-1}\}$。

定理 3.2.13 系统(3.2.158)在 $U\in M$ 是局部能控的充要条件是存在正整数 p,使得 $\dim \Delta_p(x)=m$,对所有 $x\in U$ 成立。

上述结果的详细证明可参看参考文献[21,22],它们初步表明微分流形的有关概念和方法在非线性控制系统的理论研究中的重要性。更多的内容请参看有关的论著。

3.3 流形上的积分

3.3.1 体形式与可定向流形

首先简单介绍欧氏空间中平行多面体的体积和空间的定向的概念。设$\{x_1,\cdots,x_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的一个直角坐标系。记 $e_i(i=1,\cdots,n)$为 x_i 方向的单位向量,则$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有序的标准正交基。取 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 n -形式 $\theta=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$,显然有 $\theta(e_1,\cdots,e_n)=1$,它给出以 $e_1,\cdots,e_n$ 为边构成的 n 维正立方体的体积。一般地,若$\{\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的任一个有序基,则有 $\bar{e}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_n$。于是由式(3.2.15)得知

$$\theta(\bar{e},\cdots,\bar{e}_n) = (\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n)(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n) = \det(\mathrm{d}x_i(\bar{e}_j)) = \det(a_{ji}) = \det(a_{ij})$$

我们可将 $\theta(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n)$看作以 $\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 为边构成的平行多面体的“有向体积”,其符号为正或负表示基底$\{\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n\}$与标准基$\{e_1,\cdots,e_n\}$的“定向”相同或相反。$\theta=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 的**标准体形式(或标准体积元)**。

从上面见到,$\mathbf{R}^n$ 的所有基底可按 $\det(a_{ij})$的符号分为两类,称为 $\mathbf{R}^n$ 的两种不同的**定向**。同一类的基底是同定向的,不同类的基底是反定向的。我们可以将这两类中之一称为**正定向类**,则另一类称为**负定向类**。

例 3.3.1 设 e_1 是 $\mathbf{R}^1$ 中某个非零向量，则 $\{\lambda e_1 \mid \lambda>0\}$ 和 $\{\eta e_1 \mid \eta<0\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 的两个定向类。若将前者称为正定向类，则后者称为负定向类。反之亦然。

例 3.3.2 设 $\{e_1, e_2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个有序基（图 3.14）。令 $\bar{e}_1=e_2, \bar{e}_2=e_1$。由于

$$\begin{bmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\end{bmatrix}$$

故 $\det(a_{ij})=-1<0$。这表明这两个基底是反定向的。从几何上看，从 e_1 到 e_2 的旋转方向与从 $\bar{e}_1$ 到 $\bar{e}_2$ 的旋转方向相反。按照通常习惯，平面正定向基底取反时针旋转方向，平面负定向基底取顺时针旋转方向。

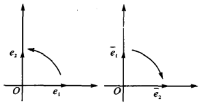


图 3.14 基底的定向

设 $\omega\neq0$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个 n-形式，$\theta=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 是标准体形式，则有 $\omega=c\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=c\theta,\ c\neq0$。对于 $\mathbf{R}^n$ 的任一个基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，有 $\omega(e_1,\cdots,e_n)=c\theta(e_1,\cdots,e_n)$。因此 $\omega(e_1,\cdots,e_n)$ 同样可以用来表示以 $e_1,\cdots,e_n$ 为边构成的平行多面体的“有向体积”，从而 $\mathbf{R}^n$ 上的一切非零 n-形式都可称为**体形式**（或**体积元**）。

我们还可以用 n-形式去决定 $\mathbf{R}^n$ 的定向。设 ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个体形式（即非零 n-形式）。如果 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有序基，且满足 $\omega(e_1,\cdots,e_n)>0$，则将基底 $\{e_i\}$ 的定向作为 ω 在 $\mathbf{R}^n$ 上确定的定向；如果 $\omega(e_1,\cdots,e_n)<0$，则将基底 $\{e_i\}$ 的反定向作为 ω 在 $\mathbf{R}^n$ 上确定的定向。易见利用基底或体形式去确定欧氏空间的定向的方法是等价的。

例 3.3.3 在 $\mathbf{R}^2$ 中取直角坐标系 $\{x_1,x_2\}$，记 e_1, e_2 为 x_1, x_2 方向上的单位向量，并根据 $\{e_1,e_2\}$ 确定 $\mathbf{R}^2$ 的定向。它就是 2-形式 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$ 所确定的定向，因为 $\omega(e_1,e_2)=1>0$。如果取 $\omega'=\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1=-\omega$，则 ω' 与 ω 所确定的定向相反。

一般地，设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个仿射坐标系，$e_1,\cdots,e_n$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 方向上的单位向量，我们可以用基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，或等价地用体形式 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 去确定 $\mathbf{R}^n$ 的自然定向。

接着考虑微分流形的定向问题。微分流形和欧氏空间的定向问题有着很大的差别。在欧氏空间中存在整体坐标系，因而它是可定向的。微分流形一般没有整体坐标系，而只有局部坐标系，考虑到不同的局部坐标邻域的叠置和坐标变换的影响，微分流形不一定是可定向的。

设 M 是 n 维微分流形，$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ 是 M 的一个图集。如果我们能够用这个图集去确定任一点 $x\in M$ 的切空间 T_xM 的定向，则流形 M 是**可定向的**。设图 U_α 和 U_β 叠置，即 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，它们分别有局部坐标 $\{x_{\alpha i}\}$ 和 $\{x_{\beta j}\}$。取 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$，这两个局部坐标系分别给出切空间 T_xM 的两个基底 $\{\partial/\partial x_{\alpha i}|_x\}$ 和 $\{\partial/\partial x_{\beta i}|_x\}$。如果 M 是可定向的，则要求这两个基底有相同的定向。根据切空间的不同基底的变换关系(3.1.17)和基底定向相同的条件，这就要求在任何 $x\in U_\alpha\cap U_\beta$ 处，Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial x_{\beta j}}{\partial x_{\alpha i}}\right)\bigg|_x=\frac{\partial(x_{\beta1},\cdots,x_{\beta n})}{\partial(x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha n})}\bigg|_x>0 \tag{3.3.1}$$

反之亦然。因此上式给出的是微分流形 M 可定向的充分必要条件。

类似欧氏空间那样，我们还可以用 n-形式去研究 n 维微分流形 M 的定向问题。

定义 3.3.1 设 ω 是 M 上的一个 n-形式，它对任何 $x\in M$ 有 $\omega(x)\neq0$，则称 ω 为流形 M 的一个**体形式**（或**体积元**）。

可以证明，当且仅当流形 M 有一个体形式 ω 时，M 是可定向的。在 $x\in M$ 的邻域内取局部坐标 $\{x_1,\cdots,x_n\}$。令 $\{\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n\}$ 为流形 M 在 x 处的切空间 T_xM 的自然基。如果体形式 ω 对一切 $x\in M$ 都满足 $\omega(x)(\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n)>0$，则 ω 确定了流形 M 的正向。

类似欧氏空间中有向曲面的概念，在微分流形中也有子流形的定向问题。特别地，对于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 n 维子流形（即超曲面）的定向有下面的定理。

定理 3.3.1　设 M 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的连通的 n 维正则子流形，则 M 可定向的充分必要条件是 M 上有一个连续的单位法向量场。

例 3.3.4　n 维球面 $S^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\}$ 是可定向的。

事实上，S^n 上的单位法向量场为 $N(x)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_x(x\in S^n)$。它是连续的，故由定理 3.3.1 得到此结论。

例 3.3.5　Mobius 带 M 作为 $\mathbf{R}^3$ 中的子流形是不可定向的。

事实上，如果在 M 的中心线上某点取单位法向量，并使该向量沿着中心线连续变动走完一圈，在回到原来位置时将指着相反的方向，这表明 M 不存在处处非零的连续向量场，故 M 不可定向。

例 3.3.6　考虑可定向的 Riemann 流形 (M,g)。设 U 为 M 上含 x 的一个坐标邻域，局部坐标为 $\{x_i\}$。$\{\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n\}$ 是切空间 T_xM 的自然基。在 T_xM 中定义内积 $g_x(\cdot,\cdot)$，并记 $g_{ij}(x)=g_x(\partial/\partial x_i,\partial/\partial x_j)$。

由于在 T_xM 中定义了内积，因此可以确定它的标准正交基。设 $\{\tau_1,\cdots,\tau_n\}$ 是 T_xM 的一个有序的 g_x 标准正交基，即 $g_x(\tau_k,\tau_l)=\delta_{kl}(k,l=1,\cdots,n)$，且设 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}\tau_k(i=1,\cdots,n)$，则

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj},\ i,j=1,\cdots,n$$

若记矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ik})$，则由上式得知矩阵 $(g_{ij}(x))=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$。

我们寻求一个 M 上的 n-形式 μ 使得 $\mu(\tau_1,\cdots,\tau_n)=1$。因为 $\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)=\det(a_{ik})\omega(\tau_1,\cdots,\tau_n)=\det\mathbf{A}$，并考虑到 $\det(g_{ij})=\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})=(\det\mathbf{A})^2$，故 $\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)=(\det(g_{ij}))^{1/2}$。若记 $G=\det(g_{ij})$，则有

$$\mu=\sqrt{G}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n \tag{3.3.2}$$

通常称上式为已定向的 Riemann 流形 M 的**自然体积元**。可以证明，它也是一个几何不变量，其表达式与局部坐标的取法无关。对于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是一个直角坐标系，则 $G=1$，从而式(3.3.2)给出 $\mu=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$，即标准体积元。

定义 3.3.2　设 M,N 是两个已定向的 n 维微分流形，其定向分别由 $\omega\in\mathscr{F}^n(M)$ 和 $\theta\in\mathscr{F}^n(N)$ 确定，$F:M\to N$ 为 C^∞ 映射。若微分形式 $F^*\theta$ 与 ω 的定向相同，则称映射 F 是**保定向的**；否则，若 $F^*\theta$ 与 ω 的定向相反，则称映射 F 是**反定向的**。

定理 3.3.2　映射 $F:M\to N$ 保定向的充分必要条件是 $\mathrm{d}F$ 映 M 的切空间的定向基为 N 的切空间的定向基。

事实上，在 M 和 N 上分别取包含 x 和 $y=F(x)$ 的坐标邻域 U 和 V，其局部坐标分别为

$(x_1,\cdots,x_n)$和$(y_1,\cdots,y_n)$。设流形 M 和 N 的定向分别由切空间的基底$\{\partial/\partial x_i\}$和$\{\partial/\partial y_i\}$确定，且

$$\frac{\partial}{\partial y_i}=\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\equiv F_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\quad i=1,\cdots,n$$

设体形式 ω 和 θ 分别与$\{\partial/\partial x_i\}$和$\{\partial/\partial y_i\}$相容，即有

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)>0,\ \theta\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)>0$$

此外，由定义 3.2.8 得到

$$(F^*\theta)(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\theta(F(x))\left(F_*\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,F_*\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\theta(y)\left(\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_n}\right)>0$$

由此可见，$F^*\theta$ 与 ω 有相同的定向，再由定义 3.3.2 知映射 F 是保定向的。反之亦然。故本定理得证。

定理 3.3.3　设映射 $F:M\to N, x\mapsto y=F(x)$，流形 M 和 N 分别由 n-形式 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 和 $\theta=\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n$ 所定向，则 F 是保定向(或反定向)映射的充分必要条件是在 M 上各点处有$\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}>0$(或$<0$)成立。

3.3.2　流形上的积分

先考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 U，$\{x_i\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的一个整体坐标系。取基底$\{\partial/\partial x_1,\cdots,\partial/\partial x_n\}$去确定 U 的正定向，使它成为一个定向流形。设 a 是 U 上的一个 Riemann 可积函数，我们定义 **n-形式 $\omega=a(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$ 在 U 上的积分为**

$$\int_U\omega\equiv\int_U a(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\overset{\mathrm{d}}{=}\int_U a(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{3.3.3}$$

上式右端的积分为 U 上的 Riemann 积分。应当注意的是，在式(3.3.3)中 ω 在 U 上的积分是对上面指定的正向而言的；若取 U 的相反的定向，则要在右端的 Riemann 积分前加上负号。

下面考虑 n 维可定向的微分流形 M。设$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$是 M 的一个坐标图集，局部坐标为$\{x_{\alpha1},\cdots,x_{\alpha n}\}$，并用 M 上各点的切空间的自然基$\{\partial/\partial x_{\alpha1},\cdots,\partial/\partial x_{\alpha n}\}$全体去确定 M 的正定向。取相应于 M 的开覆盖$\{U_\alpha\}$的一个单位分解$\{f_\alpha\}$，即存在 M 上的 C^∞ 函数族$\{f_\alpha\}$，它们满足下列条件：

(1) 对给定的 ν 和任何 $x\in M$，有 $0\leqslant f_\nu(x)\leqslant 1$，且当 $x\notin U_\nu$ 时，$f_\nu(x)=0$；

(2) 对任何 $x\in M$，仅有有限个 $f_\alpha(x)\neq 0$；

(3) 对任何 $x\in M$，$\sum\limits_\alpha f_\alpha(x)=1$。

设 ω 是 M 上的一个 n-形式，且其**支集** $\mathrm{supp}\omega\overset{\mathrm{d}}{=}\overline{\{x\in M\mid\omega(x)\neq 0\}}$是一个紧集。如果对某个 ν，ω 在 U_ν 上可表示为 $\omega=a(x)\mathrm{d}x_{\nu1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\nu n}$，我们定义 **$\omega$ 在 U_ν 上的积分为**

$$\int_{U_\nu}\omega\equiv\int_{U_\nu}a(x)\mathrm{d}x_{\nu1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{\nu n}\overset{\mathrm{d}}{=}\int_{\varphi_\nu(U_\nu)}(a\circ\varphi_\nu^{-1})(x_{\nu1},\cdots,x_{\nu n})\mathrm{d}x_{\nu1}\cdots\mathrm{d}x_{\nu n} \tag{3.3.4}$$

一般地，由于 $\mathrm{supp}\omega$ 是紧的，故可选取有限个坐标邻域$\{U_1,\cdots,U_k\}$去覆盖 $\mathrm{supp}\omega$，即有 $\mathrm{supp}\omega\subset\bigcup\limits_{j=1}^k U_j$。利用相应于有限开覆盖$\{U_j\}_{j=1}^k$的单位分解$\{f_j\}$，可知

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} f_j\omega,\quad 且\ \mathrm{supp}(f_j\omega) \subset U_j,\quad j = 1,\cdots,k$$

定义 3.3.3 有紧支集的 n-形式 ω 在已定向的流形 M 上的**积分**为

$$\int_M \omega \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{k}\int_M f_j\omega = \sum_{j=1}^{k}\int_{U_j} f_j\omega = \sum_{j=1}^{k}\int_{\varphi_j(U_j)}((f_j a_j)\circ\varphi_j^{-1})(x_{j1},\cdots,x_{jn})\mathrm{d}x_{j1}\cdots\mathrm{d}x_{jn} \quad (3.3.5)$$

可以证明,上面的积分定义与开覆盖和单位分解的选择方式无关。还应指出的是,在式(3.3.4)和式(3.3.5)中定义的积分都是对指定的流形正向而言的;若取相反的定向就要在右端的 Riemann 积分前加上负号。

流形上的积分具有以下性质:设 ω,ω_1,ω_2 是已定向的 n 维流形 M 上的有紧支集的 n-形式,则

(1) $\int_M(\omega_1+\omega_2) = \int_M\omega_1 + \int_M\omega_2$;

(2) $\int_M\lambda\omega = \lambda\int_M\omega,\ \lambda\in\mathbf{R}$;

(3) 若以 $-M$ 表示与定向流形 M 相反的定向,则 $\int_{-M}\omega = -\int_M\omega$;

(4) 若 ω 是 M 上的体形式(即 $\omega(x)\neq 0,\forall x\in M$),它确定 M 的正向,$g(x)\geqslant 0$ 为 M 上的连续函数,则 $\int_M g\omega\geqslant 0$,当且仅当 $g=0$ 时,上式的等号才成立;

(5) 若 M_1,M_2 为 M 的不相交开集,$M=M_1\cup M_2$,且 M_1,M_2 的定向与 M 的定向一致,则 $\int_M\omega = \int_{M_1}\omega + \int_{M_2}\omega$。

定理 3.3.4 设 M,N 是已定向的 n 维微分流形,$F:M\to N$ 是一个保定向的微分同胚,ω 是 N 上的一个有紧支集的 n-形式,则

$$\int_N\omega = \int_M F^*\omega \quad (3.3.6)$$

上式是流形上的积分的变量置换公式。作为特殊情形,对 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的积分有下面熟知的变量置换公式。

推论 设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,$\varphi:U\to\varphi(U)\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})$ 是一个微分同胚。记 $J=\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$,则对 $\varphi(U)$ 上的可积函数 $f(\boldsymbol{y})$ 有

$$\int_{\varphi(U)} f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n = \int_U f(\varphi(\boldsymbol{x}))\,|\,J\,|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \quad (3.3.7)$$

3.3.3 Stokes 定理

Stokes 定理是流形上积分的基本定理,它有重要的应用。在叙述此定理之前,需要介绍流形上的带边区域及其边界定向的概念。

定义 3.3.4 设 M 是 n 维微分流形,D 是 M 的一个子集,且其中的点可分为两类:

(1) **内点** p:在 M 中有一个含点 p 的坐标图(U,φ),使得 $U\subset D$,从而 $\varphi(U\cap D)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集;

(2) **边界点** q:在 M 中有一个含点 q 的坐标图(U,φ),使得 $\varphi(U\cap D)$ 是半空间 $\mathbf{R}_+^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\,|\,x_n\geqslant 0\}$ 中的一个开集,且 $x_n(q)=0$;则我们称 D 为流形 M 的一个**带边区域**,其全

体边界点的集合称为 D 的**边界**，记作∂D(图 3.15)。

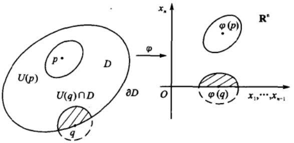


图 3.15　带边区域

带边区域 D 的边界∂D是流形 M 的一个$(n-1)$维正则的闭子流形。例如，$D^2=\{(x_1,x_2)\in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的二维圆域，其边界$\partial D^2=S^1$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一维正则闭子流形。类似地，$D^n=\{x\in\mathbf{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维球域，其边界$\partial D^n=S^{n-1}$是 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-1$ 维正则闭子流形。又如二维柱面 $S^1\times\mathbf{R}$ 上的区域 $S^1\times[0,1]$的边界是 $S^1\times\{0\}$与 $S^1\times\{1\}$的并集，这是两个圆周。由此可见带边区域的边界未必是连通的。

如果流形 M 是可定向的，则 M 中的区域 D 的边界∂D 也是可定向的。事实上，若流形 M 已由 n-形式 $\theta=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_n$ 定向，并在任一点 $q\in\partial D$ 处选取一个满足定义 3.3.4 的要求，且与 M 的定向一致的坐标图(U,φ)及局部坐标$\{x_i\}$，则$\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$是∂D 在点 q 处的局部坐标，且由

$$\tilde{\theta}=(-1)^n\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{n-1} \tag{3.3.8}$$

给出边界∂D 在点 q 的坐标邻域 $U\cap\partial D$ 上的定向。该定向称为定向流形 M 在∂D 上诱导的定向。图 3.16 以二维区域的边界为例予以说明。

现在给出 Stokes 定理如下。

定理 3.3.5　设 D 是 n 维已定向的流形 M 中的带边区域，ω 是 M 上的一个有紧支集的$(n-1)$-形式，则有①

$$\int_D \mathrm{d}\omega=\int_{\partial D}\omega \tag{3.3.9}$$

其中边界 ∂D 具有由 M 诱导的定向。若 $\partial D=\varnothing$，则有 $\int_D \mathrm{d}\omega=0$。

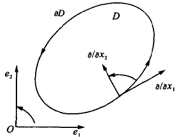


图 3.16　边界定向

上述定理的证明可参看参考文献[1,2]。在实际问题中，区域 D 通常是紧的，这时无需再假设$(n-1)$-形式 ω 有紧支集了。Stokes 定理在理论上有很大的普遍性，例如微积分学中的 Newton-Leibniz 公式、Green 公式、Stokes 公式、Gauss 公式，以至复变函数论中的 Cauchy 定理等，都是流形的 Stokes 定理的特殊情形。Stokes 定理在力学、物理学、微分几何、偏微分方程等方面有十分重要的应用。这里对此作一些说明。

---

① 严格地说，式(3.3.9)中的$\int_{\partial D}\omega$应记为$\int_{\partial D} i^*\omega$，其中 $i:\partial D\to M$ 是包含映射。

例 3.3.7 利用 Stokes 定理推导微积分学中的一些重要公式。

设 $D=[a,b]$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的闭区间，则 D 的定向边界 $\partial D=\{b\}-\{a\}$。令 f 为 D 上的连续可微函数，$\omega=f$ 是 0 -形式。于是由式(3.3.9)有 Newton-Leibniz 公式

$$\int_D \mathrm{d}f = f(b) - f(a)$$

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域，边界 ∂D 的定向是由 D 的定向诱导的(例如图 3.17 所示)。令 P,Q 为 D 上的连续可微函数，$\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是 1 -形式。于是由式(3.3.9)有 Green 公式

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

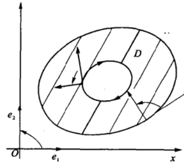


图 3.17 平面有界闭区域及边界

利用类似的方法，我们可由 Stokes 定理得到 $\mathbf{R}^3$ 中的经典 Stokes 公式和 Gauss 公式，其证明留作习题。

显然，设 M 是 n 维已定向的带边紧流形，ω 是 M 上的 $(n-1)$-形式，则 Stokes 定理成立，即有 $\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$。特别地，如果 M 是无边紧流形，即 $\partial M=\varnothing$，则有 $\int_M \mathrm{d}\omega = 0$。

设 M 是一个紧的已定向的 n 维带边 Riemann 流形，其边界 $\partial M\neq\varnothing$，$N$ 是 ∂M 上的外法向单位向量场，X 为 M 上的向量场，则由 Stokes 定理可得散度公式

$$\int_M (\mathrm{div}X)\mu_M = \int_{\partial M} \langle X,N\rangle \mu_{\partial M} \tag{3.3.10}$$

其中，μ_M 为 M 上的 Riemann 体积元(参看式(3.3.2))，$\mu_{\partial M}$ 为在 ∂M 上由 μ_M 导出的 Riemann 体积元，$\mathrm{div}X$ 是向量场 X 的散度，$\langle X,N\rangle$ 是 X 与 N 的内积。在局部坐标系 $\{x_i\}$ 下，有 $\mu_M=\sqrt{G}\,\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$，其中 $G=\det(g_{ij})$，且若记 $X=\sum_{i=1}^n X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，$N=\sum_{i=1}^n N_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，则有表达式

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{G}X_i) \tag{3.3.11}$$

和

$$\langle X,N\rangle = g(X,N) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}X_iN_j \tag{3.3.12}$$

作为 Stokes 定理的一个重要应用，下面证明外微分算子 d 与余微分算子 δ 的一些重要性质。为此先定义在紧 Riemann 流形 (M,g) 上两个 p -形式的内积。

定义 3.3.5 设 (M,g) 是 n 维已定向的紧 Riemann 流形，$\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$。在局部坐标系 $\{x_i\}$ 下，它们有局部表达式

$$\omega = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

$$\theta = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p} b_{i_1\cdots i_p}(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

记

$$\langle\omega,\theta\rangle = \frac{1}{p!}\sum_{i_1,\cdots,i_p}\sum_{j_1,\cdots,j_p} a_{i_1\cdots i_p}(x)b_{j_1\cdots j_p}(x)g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}$$

我们在 $\mathscr{F}^p(M)$ 中定义 ω 与 θ 的内积如下

$$(\omega,\theta) = \int_M \langle\omega,\theta\rangle\mu \tag{3.3.13}$$

于是 $\mathscr{F}^p(M)$ 成为一个内积空间，在其上给出 p-形式 ω 的范数(模)为

$$\|\omega\| = \sqrt{(\omega,\omega)} \tag{3.3.14}$$

容易证明，对任何 $\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$，有

$$\omega\wedge(*\theta) = \langle\omega,\theta\rangle\mu \tag{3.3.15}$$

和

$$(*\omega, *\theta) = (\omega,\theta) \tag{3.3.16}$$

式(3.3.16)表明 Hodge 算子 $*$ 是从内积空间 $\mathscr{F}^p(M)$ 到 $\mathscr{F}^{n-p}(M)$ 的一个等距同构。

定理 3.3.6　设 (M,g) 是 n 维已定向的无边紧 Riemann 流形，则外微分 $\mathrm{d}:\mathscr{F}^p(M)\to\mathscr{F}^{p+1}(M)$ 和余微分 $\delta:\mathscr{F}^{p+1}(M)\to\mathscr{F}^p(M)$ 是关于内积$(\cdot,\cdot)$的互为共轭的线性算子。

证　设 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$，$\theta\in\mathscr{F}^{p+1}(M)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge(*\theta)) &= \mathrm{d}\omega\wedge(*\theta)+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}(*\theta) = \\ &\mathrm{d}\omega\wedge(*\theta)+(-1)^{np}\omega\wedge *(*\mathrm{d}*\theta) = \\ &\mathrm{d}\omega\wedge(*\theta)-\omega\wedge(*\delta\theta)\end{aligned}$$

利用式(3.3.15)、式(3.3.13)和 Stokes 定理，并注意到 $\partial M=\varnothing$，则有

$$(\mathrm{d}\omega,\theta) = (\omega,\delta\theta) \tag{3.3.17}$$

这表明 d，δ 关于式(3.3.13)给出的内积是互为共轭的线性算子。证毕。

应当指出，即使 M 是非紧的 Riemann 流形，无论它是否带边，只要 ω 或 θ 有紧支集，则式(3.3.17)仍然成立，即算子 d 与 δ 的共轭性也成立。

接着证明关于调和形式的充要条件的定理 3.2.4。由调和算子的定义、式(3.2.108)和(3.3.17)，对 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 有

$$\begin{aligned}(\Delta\omega,\omega) &= ((\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\omega,\omega) = (\mathrm{d}\delta\omega,\omega)+(\delta\mathrm{d}\omega,\omega) = \\ &(\delta\omega,\delta\omega)+(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega) = \|\delta\omega\|^2+\|\mathrm{d}\omega\|^2\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

由此可见，在已定向的无边紧 Riemann 流形上，p-形式 ω 是调和形式的充要条件是 $\mathrm{d}\omega=0$ 且 $\delta\omega=0$，即它同时是闭形式和余闭形式。根据前面所述，如果 M 是非紧的(无边或带边)Riemann 流形，但 ω 有紧支集，则定理 3.2.4 的结论仍然成立。

最后证明关于调和算子性质的定理 3.2.5。事实上，由式(3.3.18)知，对任何 $\omega\in\mathscr{F}^p(M)$ 有 $(\Delta\omega,\omega)\geqslant 0$，这表明算子 Δ 是正定的。此外，对任何 $\omega,\theta\in\mathscr{F}^p(M)$ 有

$$\begin{aligned}(\Delta\omega,\theta) &= ((\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\omega,\theta) = (\mathrm{d}\delta\omega,\theta)+(\delta\mathrm{d}\omega,\theta) = (\delta\omega,\delta\theta)+(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\theta) = \\ &(\omega,\mathrm{d}\delta\theta)+(\omega,\delta\mathrm{d}\theta) = (\omega,(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})\theta) = (\omega,\Delta\theta)\end{aligned}$$

上式表明算子 Δ 是自伴的。

3.4　临界点理论概述

3.4.1　临界点、Sard 定理

临界点理论是微分流形研究的一个重要课题。它将映射的局部性态与流形的拓扑性质联系起来，形成了分析与几何相结合的理论，并在动力系统、优化、控制、统计、非线性微分方程等

方面有着重要的应用。

定义 3.4.1 设 M,N 为两个微分流形，$F:M\to N$ 为光滑映射。

(1) 对点 $x\in M$，如果 F 的微分 $\mathrm{d}F(x):T_xM\to T_{F(x)}N$ 是满射，则称 x 为 F 的**正则点**；否则称为 F 的**临界点**。

(2) 对点 $y\in N$，记其原像集 $F^{-1}(y)=\{x\in M\mid F(x)=y\}$（我们规定当 $y\notin F(M)$ 时，$F^{-1}(y)=\varnothing$）。如果 $F^{-1}(y)$ 是空集，或者当 $F^{-1}(y)$ 非空时，它只含 F 的正则点，则称 y 为 F 的**正则值**；否则称为 F 的**临界值**，此时 $F^{-1}(y)$ 至少含 F 的一个临界点。

设流形 M 和 N 的维数分别为 m 和 n。显然，$x\in M$ 为映射 $F:M\to N$ 的正则点的充分必要条件是 $\mathrm{rank}F(x)=n$；相反地，$x\in M$ 为 F 的临界点的充分必要条件是 $\mathrm{rank}F(x)<n$。由此可知，当 $m<n$ 时，任何 $x\in M$ 都是 F 的临界点，因为此时 $\mathrm{rank}F(x)\leqslant\min(m,n)=m<n$。此外，按照定义 3.4.1，任何 $y\in N\backslash F(M)$ 都是 F 的正则值，因为其原像集 $F^{-1}(y)=\varnothing$；特别地，当 $m<n$ 时，$F(M)$ 中的点都是 F 的临界值，只有 $N\backslash F(M)$ 中的点才是 F 的正则值。

例 3.4.1 设 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 为光滑函数，则 f 的临界点 x 满足 $\mathrm{d}f(x)=0$，即 $f'(x)=0$；反之，f 的正则点 x 满足 $f'(x)\neq 0$。由此可见，如果在区间 (a,b) 上的点都是 f 的正则点，则 f 是 (a,b) 上的严格单调函数。

接着讨论正则值的原像集的结构。设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维的微分流形，$F:M\to N$ 为光滑映射，$y_0\in N$ 是 F 的一个正则值。当 $m\geqslant n$ 时，$F^{-1}(y_0)$ 或者是 M 的一个 $(m-n)$ 维正则子流形（此时，$y_0\in F(M)$），或者是空集（此时，$y_0\notin F(M)$）。这可由映射的秩定理（见定理 3.1.1）直接得知。当 $m<n$ 时，$F^{-1}(y_0)$ 必为空集，因为此时必有 $y_0\notin F(M)$。特别地可以证明，当 $m=n$ 时，如果 M 是紧流形，且 $F^{-1}(y_0)$ 非空，则 $F^{-1}(y_0)$ 是由有限个点组成的 0 维正则子流形。上述结果对于判断流形 M 的子集是否是正则子流形有重要作用。

从上面知道，光滑映射的正则值的非空原像集一定是正则子流形。但要注意，并非流形 M 的每个正则子流形都是 M 上某个光滑映射的正则值的原像集。此外，光滑映射的临界值的原像集不一定是正则子流形。

例 3.4.2 映射 $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^1$ 由下式定义

$$y=f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$$

易知 $y=0$ 是 f 的惟一临界值，$y\neq 0$ 都是 f 的正则值。对于 f 的正则值 a，如果 $a<0$，则 $f^{-1}(a)=\varnothing$；如果 $a>0$，则 $f^{-1}(a)=S^{m-1}$，它是 $\mathbf{R}^m$ 的 $(m-1)$ 维正则子流形。对于 f 的临界值 0，其原像集 $f^{-1}(0)$ 是 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，它是一个 0 维正则子流形。

例 3.4.3 映射 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 由下式定义

$$f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2,\quad (x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$$

易知 $y=0$ 是 f 的惟一临界值，$y\neq 0$ 都是 f 的正则值。f 的正则值 a 的原像集 $f^{-1}(a)$ 是双曲线 $x_1^2-x_2^2=a$，它是 $\mathbf{R}^2$ 的 1 维正则子流形。f 的临界值 0 的原像集 $f^{-1}(0)$ 是相交的两直线 $x_1\pm x_2=0$，它显然不是 $\mathbf{R}^2$ 的子流形。

我们在下一小节中还要对临界点作进一步的讨论。最后介绍关于临界值和正则值的分布情况的定理，其证明请参看有关书籍。

定义 3.4.2 设 M 为 m 维微分流形，E 是 M 的子集。如果对 M 的每个坐标图 (U,φ)，都有 $\varphi(E\cap U)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的零测度集，则称 E 为 M 中的**零测度集**。

定理 3.4.1(Sard 定理) 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维微分流形，$F:M\to N$ 是光滑映射，则 F 的临界值的集合是 N 中的零测度集。

推论 在上述定理的条件下，F 的正则值的集合是 N 的稠密子集。

由此可知，如果 $m\geqslant n\geqslant 1$，且 $F:M\to N$ 是光滑的满射，则至多除了 N 的一个零测度子集外，对 $y\in N$，其原像集 $F^{-1}(y)$ 都是 M 的正则子流形。

3.4.2 Morse 理论

本节讨论光滑函数 $f:M\to\mathbf{R}$ 在临界点附近的性态。Morse 首先注意到光滑函数与流形拓扑结构的关系主要集中在临界点上，他给出的定理完全刻画了光滑函数在非退化临界点处的局部性态，是临界点理论的重要内容，并成为微分流形几何研究的有力工具。

设 M 是 m 维微分流形，$f:M\to\mathbf{R}$ 是光滑函数。若 $x\in M$ 是 f 的临界点，则 $\mathrm{d}f(x):T_xM\to\mathbf{R}$ 不是满射，从而 $\mathrm{d}f(x)$ 是零映射。也就是说，如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 是 M 上含 x 的坐标图，则 $f_\alpha=f\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha)\to\mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_\alpha=\varphi_\alpha(x)$ 处的所有一阶偏导数都等于 0。我们进一步考虑 f_α 在 $\boldsymbol{x}_\alpha$ 处的二阶偏导数的情况，引进 Hesse 矩阵的概念。

定义 3.4.3 设 M 为 m 维微分流形，$f:M\to\mathbf{R}$ 为光滑函数，$x\in M$ 为 f 的临界点，并称 m 阶矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(x)=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_{\alpha1}\partial x_{\alpha1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_{\alpha1}\partial x_{\alpha m}}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_{\alpha m}\partial x_{\alpha1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_{\alpha m}\partial x_{\alpha m}}\end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}_\alpha} \tag{3.4.1}$$

为 f 在 x 处的 Hesse **矩阵**。如果 $\boldsymbol{H}_f(x)$ 非奇异，则称 x 为 f 的**非退化临界点**，否则称为**退化临界点**。

显然 Hesse 矩阵依赖于坐标图的选取。如果 (U_β,φ_β) 为 M 上含 x 的另一坐标图，$\widetilde{\boldsymbol{H}}_f(x)$ 为 f 关于坐标图 (U_β,φ_β) 在 x 处的 Hesse 矩阵，容易得知 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_f(x)$ 与 $H_f(x)$ 之间的变换关系为

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_f(x)=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{H}_f(x)\boldsymbol{J}(x) \tag{3.4.2}$$

其中，$\boldsymbol{J}(x)=(\partial x_{\alpha i}/\partial x_{\beta j})|_{\boldsymbol{x}_\beta}$ 为叠置映射 $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 在 $\boldsymbol{x}_\beta=\varphi_\beta(x)$ 处的 Jacobi 矩阵。因此 Hesse 矩阵的奇异性与坐标图的选取无关，从而非退化临界点的定义不依赖于坐标图的选取。

Hesse 矩阵是实对称矩阵，它的一切特征值都是实数。设 x 是光滑函数 f 的临界点，Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}_f(x)$ 的负特征值的个数 k 称为临界点 x 的**指标**。由式(3.4.2)亦可得知，临界点指标的定义与坐标图的选取无关。

为了研究光滑函数在临界点处的性态，我们希望将函数加以简化。下面的 Morse 引理表明，类似于实对称矩阵可通过相似变换化为对角型那样，光滑函数在其非退化临界点附近可通过坐标图的适当选取化为某种标准形式。

定理 3.4.2(Morse 引理) 设 M 为 m 维微分流形，$f:M\to\mathbf{R}$ 为光滑函数，$x_0\in M$ 是 f 的指标为 k 的非退化临界点，则存在 M 的某个含 x_0 的坐标图 (U,φ)，使得 $\varphi(x_0)=\mathbf{0}$，且

$$f\circ\varphi^{-1}(\boldsymbol{u})=f(x_0)-\sum_{i=1}^{k}u_i^2+\sum_{j=k+1}^{m}u_j^2 \tag{3.4.3}$$

其中，对任何 $x\in U$，有 $\boldsymbol{u}=\varphi(x)=(u_1,\cdots,u_m)\in\varphi(U)\subset\mathbf{R}^m$。式(3.4.3)称为 f 在 U 中的**局部**

标准形。

推论 1　光滑函数的非退化临界点是孤立的。

事实上，由式(3.4.3)可见，函数 $f\circ\varphi^{-1}$ 的各个一阶偏导数当且仅当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 时等于零，这说明 x_0 是 U 中惟一的临界点。

推论 2　若微分流形 M 是紧的，且光滑函数 $f:M\to\mathbf{R}$ 的临界点都是非退化的，则 f 只有有限个临界点。

事实上，若 x 不是临界点(即 x 是正则点)，显然有 x 的开邻域，其中不含临界点。若 x 是临界点，则由推论 1 知有一个只含临界点 x 的开邻域。因为 M 是紧的，故 M 可被有限个这样的开邻域覆盖，从而 f 只有有限个临界点。

Morse 引理说明在非退化临界点附近，光滑函数 f 的局部性态可由对角二次型描述，即由 Hesse 矩阵确定。我们按临界点的指标的$(m+1)$种可能值进行分类。例如在表 3.1 中给出当 $m=1,2$ 时光滑函数 f 的非退化临界点的类型和局部标准形。

表 3.1　非退化临界点

维数 m	指标 k	局部标准形	临界点类型
1	0	u^2	极小点
	1	$-u^2$	极大点
2	0	$u_1^2+u_2^2$	极小点
	1	$-u_1^2+u_2^2$	鞍　点
	2	$-u_1^2-u_2^2$	极大点

在图 3.18 中给出当 $m=2$ 时，函数 $y=f(u_1,u_2)$ 的局部图像。对于一般的 m，在 f 的非退化临界点类型中包括一个极小点，一个极大点，还有$(m-1)$种不同类型的鞍点，它们分别对应于 $k=1,2,\cdots,m-1$。



图 3.18　二维流形的非退化临界点

根据 Morse 引理，我们还可以利用光滑函数的等值集去描述流形的全局拓扑结构。

定义 3.4.4　设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是光滑函数，且 f 仅有非退化临界点，则称 f 为 **Morse 函数**。

由前面的推论 2 显然得知，紧流形 M 上的 Morse 函数仅有有限个临界点。下面的定理表明任何紧流形 M 上总存在 Morse 函数。

定理 3.4.3　设 M 是紧的微分流形，则 M 上全体 Morse 函数所成的集合是 $C^\infty(M,\mathbf{R})$ 中的开稠集。

定义 3.4.5　设 M 是微分流形，$f:M\to\mathbf{R}$ 是光滑函数，$c\in\mathbf{R}$，则称集合 $f^{-1}(c)$ 为 f 的高度为 c 的**等值集**(level set)。

由前面已经知道，若 c 是 f 的正则值，则等值集 $f^{-1}(c)$ 是空集或 M 的 $(m-1)$ 维正则子流形。若 c 为 f 的临界值，则等值集 $f^{-1}(c)$ 可以是微分流形，也可以不是微分流形。应当指出，当 c 通过临界值时，等值集 $f^{-1}(c)$ 的拓扑结构还会发生突变。我们将流形 M 看作 f 的一些等值集的并（即将流形 M 按 f 的等值集进行分解），于是根据当 c 在 $\mathbf{R}$ 中变化时相应的等值集的变化情况，就能提供微分流形本身的一些拓扑信息。特别地，如果 f 是 M 上的 Morse 函数，因为它的临界点都是非退化的，故由 Morse 引理得知，在临界点附近，等值集具有二次曲面的拓扑结构，这对流形的几何研究有着重要的价值。

例 3.4.4　设 $M=\mathbf{R}^2$，$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 由 $f(x_1,x_2)=a_1x_1^2+a_2x_2^2$，$a_1,a_2\neq 0$ 所定义。易知 f 有惟一的临界点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)=\mathbf{0}$，在该处的 Hesse 矩阵

$$\boldsymbol{H}_f(\mathbf{0})=\begin{pmatrix}2a_1 & 0\\ 0 & 2a_2\end{pmatrix}$$

的秩为 2，故 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为非退化临界点，从而 f 是 Morse 函数。对 $c\in\mathbf{R}$，显然 $c=0$ 是惟一的临界值，$c\neq0$ 都是正则值。下面考查等值集 $f^{-1}(c)$ 随 c 的变化情况。

如果 a_1,a_2 均为正数，则当 $c<0$ 时，$f^{-1}(c)$ 是空集；当 $c=0$ 时，$f^{-1}(0)$ 仅为一点 p；当 $c>0$ 时，$f^{-1}(c)$ 是与 S^1 同胚的 1 维紧子流形（图 3.19）。如果 a_1 与 a_2 反号，则当 $c\neq0$ 时，$f^{-1}(c)$ 是非紧的 1 维流形（即双曲线）；当 $c=0$ 时，$f^{-1}(0)$ 成为退化的二次曲线（即一对相交直线），它已不再是子流形了（图 3.20）。

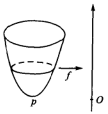


图 3.19

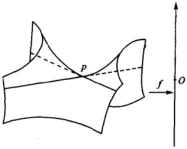


图 3.20

例 3.4.5　设 M 为 $\mathbf{R}^3$ 中的二维环面（图 3.21），$f:M\to\mathbf{R}$ 是从 M 到 z 轴的投影（称为**高度函数**）。f 是 Morse 函数，因它的 4 个临界点 p,q,r,s 均为非退化的。当 c 为正则值时，$f^{-1}(c)$ 是 M 的 1 维子流形（可以是不连通的）或者空集。当 c 为临界值时，$f^{-1}(c)$ 或为一点（f 的极小点 p 或极大点 s），或为一条∞字形曲线（它不是子流形，且通过鞍点 q 或 r）。M 的几何形状可由等值集 $f^{-1}(c)$ 随 c 的变化情况完整地描述。可以发现，当 c 在 $\mathbf{R}$ 中不含临界值的区间内变化时，相应的 $f^{-1}(c)$ 彼此同胚；而当 c 通过临界值时，$f^{-1}(c)$ 的拓扑结构将发生变化，其中包括变为空集的情形。

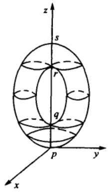


图 3.21

上面的例子表明，我们可以由光滑函数（尤其是 Morse 函数）的临界点及其类型去确定流形的全局拓扑结构。另外，我们还可以反过来由流形的拓扑不变量去估计光滑函数的非退化临界点的

数目，例如 Morse 不等式反映了紧流形上的 Morse 函数的指标为 k 的临界点数目与流形的 Euler 示性数之间的一个重要关系。

总的来说，Morse 理论较完善地解决了光滑函数的非退化临界点问题，这时只需根据二阶导算子(即 Hesse 矩阵)就能确定在临界点附近的映射性质。至于退化临界点则要考虑更高阶的导算子，难度就更大了。关于这方面的结果可参看奇点(singularity)理论和突变(catastrophe)理论的有关论著。

3.4.3 横截性理论

横截性(transversality)概念出自结构稳定性研究的需要。例如，如果在平面上的两条曲线或在空间中的曲线与曲面在某点相切，则这种几何状态是结构不稳定的，因为只要把曲线或曲面稍加变动，它们就不再处于相切状态，而变为不相交或多点相交的状态了。但是如果原来它们就不相交(或相交而不相切)，则这种状态是结构稳定性，因为曲线或曲面位置的微小变动不会改变其不相交(或相交)的性质。后一种情形称为横截的。一般地，结构稳定性讨论数学模型的某些分析的或几何的定性性质在小扰动下能否保持不变的问题，这最终归结为该系统是否具有横截性的研究。首先对微分流形给出横截性的概念。

定义 3.4.6 设 K,L 为微分流形 M 的两个正则子流形，若 $p\in K\cap L$，且

$$T_pK + T_pL = T_pM \tag{3.4.4}$$

则称 **K 和 L 在点 p 横截**，记为 $K\pitchfork_p L$。否则称 **K 和 L 在点 p 非横截**。若 $p\notin K\cap L$，则总认为 K 和 L 在点 p 横截。

上述定义表明，如果 M 的两个子流形相交，它们在交点处是否横截取决于它们在该点的切空间是否张成 M 的切空间。但要注意，式(3.4.4)左端的和并不是直和，从而 T_pK 与 T_pL 的维数之和可以大于 T_pM 的维数，例如 $\mathbf{R}^3$ 中两个二维曲面横截相交的情形。

定义 3.4.7 若对每一点 $p\in K\cap L$，式(3.4.4)均成立，则称 **K 和 L 是横截的**，记为 $K\pitchfork L$。

显然如果 K 和 L 不相交，则它们总是横截的。如果 $K\pitchfork L$ 且 $K\cap L\neq\varnothing$，则由隐函数定理不难证明，在点 $p\in K\cap L$ 附近，$K\cap L$ 局部地是 M 的$(k+l-m)$维子流形，其中 k,l,m 分别为 K,L,M 的维数。特别地，在上述情形中，若有 $k+l=m$，则在微分同胚的意义下，在点 $p\in K\cap L$附近有 $M=K\times L$。

上述概念可用来讨论可微映射 $F:M\to N$ 与 N 的子流形 S 的横截性。我们用 $F(M)$与 S 的横截性去定义 F 与 S 的横截性，并注意到 $T_{F(p)}F(M)=\mathrm{d}F(T_pM)$，从而有下面定义。

定义 3.4.8 设 S 为微分流形 N 的正则子流形，$F:M\to N$ 为可微映射，点 $p\in M$，如果

$$F(p)\notin S \text{ 或 } \mathrm{d}F(T_pM) + T_{F(p)}S = T_{F(p)}N \tag{3.4.5}$$

则称 **F 与 S 在点 p 横截**，记为 $F\pitchfork_p S$(图 3.22)。若对每一点 $p\in M$，都有 $F\pitchfork_p S$，则称 **F 与 S 横截**，记为 $F\pitchfork S$。

由此可知，若 $F(M)$与 S 不相交，则 $F\pitchfork S$。若 $F:M\to N$ 为浸没(即 $\dim M\geqslant\dim N$，且 $\operatorname{rank}F=\dim N$)，则对 N 的任一子流形 S 均有 $F\pitchfork S$。又若 $\dim M+\dim S<\dim N$，则当且仅当 $F(M)\cap S=\varnothing$时，才有 $F\pitchfork S$。

例 3.4.6 设 $M=\mathbf{R}$，$N=\mathbf{R}^2$，S 为 $\mathbf{R}^2$ 上的 x 轴。

(1) 令 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 由 $F(t)=(t,t^2)^{\mathrm{T}}$ 定义，$F(M)$ 如图 3.23(a)所示。当 $t\neq0$ 时，由于

$F(t)\notin S$，故 $F\pitchfork_t S$。当 $t=0$ 时，它对应 $F(M)$ 与 S 的交点 O。由于 $\mathrm{d}F(0)=(1,0)^{\mathrm{T}}$，故 $\mathrm{d}F(T_0M)=T_{(0,0)}S$，从而等式 $\mathrm{d}F(T_0M)+T_{(0,0)}S=T_{(0,0)}N$ 不成立。由此可见 F 在 $t=0$ 处不与 S 横截。这个结果有明显的几何解释，因为 $F(M)$ 与 S 在点 O 处相切。

(2) 令 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 由 $F(t)=(t,t^2-1)^{\mathrm{T}}$ 定义，$F(M)$ 如图 3.23(b)所示。当 $t\neq\pm1$ 时，$F(t)\notin S$，故 $F\pitchfork_t S$。当 $t=\pm1$ 时，它们分别对应 $F(M)$ 与 S 的交点 A 和 B。对 $t=1$，$\mathrm{d}F(1)=(1,2)^{\mathrm{T}}$，故有

$$\mathrm{d}F(1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}+2\frac{\partial}{\partial x_2}$$

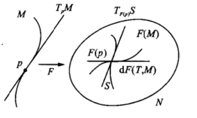


图 3.22

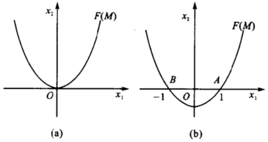


图 3.23

从而等式 $\mathrm{d}F(T_1M)+T_{(1,0)}S=T_{(1,0)}N$ 成立，即 F 在 $t=1$ 处与 S 横截。类似可证 F 在 $t=-1$ 处亦与 S 横截。这个结果在几何上也是明显的，因为 $F(M)$ 与 S 在点 A 和 B 处相交而非相切。

我们在前面已经知道，光滑映射 $F:M\to N$ 的正则值的原像集如果非空的话，必定是 M 的一个正则子流形。现在进一步讨论，如果 S 为 N 的正则子流形，在什么条件下 $F^{-1}(S)$ 是 M 的正则子流形呢？下面的定理回答了这个问题，它可看作欧氏空间中的隐函数定理的推广。

定理 3.4.4　设 M,N 分别为 m 维和 n 维微分流形，$F:M\to N$ 为光滑映射，$S\subset N$ 为 k 维正则子流形(其余维数为 $n-k$)。若 $F\pitchfork S$，且 $F^{-1}(S)$ 非空，则 $F^{-1}(S)$ 是 M 的 $(m+k-n)$ 维正则子流形，其余维数等于 $(n-k)$。

推论　设 K,L 为 M 的正则子流形，且 $K\pitchfork L$，则 $K\cap L$ 为 M 的正则子流形。

下面给出横截性的几个主要定理。

定理 3.4.5(横截开性定理)　设 M,N 为微分流形，$S\subset N$ 为闭子流形，记 $C_S^\infty(M,N)=\{F\mid F\in C^\infty(M,N),F\pitchfork S\}$，则 $C_S^\infty(M,N)$ 是 $C^\infty(M,N)$ 的开子集。

定理 3.4.6(横截稠密性定理)　在定理 3.4.5 的条件下，则 $C_S^\infty(M,N)$ 是 $C^\infty(M,N)$ 的稠密子集。

定理 3.4.7(横截同伦定理)　设 M,N 为微分流形，Q 为 N 的正则子流形，M,Q 均没有边界，$F:M\to N$ 为光滑映射，则存在同伦于 F 的映射 $G:M\to N$，使 $G\pitchfork Q$。

习　题

1. 证明：$\mathbf{R}^3$ 中的椭球面、抛物面、双曲面、马鞍面、柱面等都是二维光滑流形。

2. 证明：整个旋转锥面 $C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3^2=x_1^2+x_2^2\}$ 不是一个流形，但上半锥面 $C^+=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3^2=x_1^2+x_2^2, x_3\geqslant 0\}$ 是一个二维流形。

3. 证明：椭圆、抛物线、双曲线等都是 $\mathbf{R}^2$ 的一维正则子流形。

4. 设 M,N,P 为微分流形，$F:M\to N$，$G:N\to P$ 均为 C^r 映射，证明复合映射 $H=G\circ F:M\to P$ 也是 C^r 映射。

5. 设 $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是可微映射，M 是方程 $F(\boldsymbol{x})=0$ 的解的集合，即 $M=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid F(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}\}$。若对一切 $\boldsymbol{x}\in M$，$\operatorname{rank}F(x)=k(k<n)$，证明：$M$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 $(n-k)$ 维正则子流形。

6. 设 M 为一切 2×2 实矩阵组成的 4 维线性空间，证明：秩为 1 的全体 2×2 实矩阵构成 M 的一个三维正则子流形。

7. 证明：切空间的基底和切向量的分量的坐标变换公式(3.1.17)和(3.1.18)。

8. 证明公式(3.1.29)。

9. 证明余切空间的基底和余切向量的分量的坐标变换公式(3.1.38)和(3.1.39)。

10. 在 $\mathbf{R}^2$ 中，取不含原点 O 的局部坐标图，并在其中取极坐标 (r,φ)，作出切向量场 $\partial/\partial r$ 和 $\partial/\partial\varphi$ 的示意图，并将它们用 $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ 线性表出，其中 (x,y) 为直角坐标。

11. 证明：Riemann 度量 (g_{ij})（见式(3.1.40)）、曲线弧上的微分 $\mathrm{d}s$（见式(3.1.44)和切向量的夹角（见式(3.1.46)）等皆与局部坐标的取法无关。

12. 试求在 $\mathbf{R}^3$ 的柱坐标 (r,φ,z) 和球坐标 (r,θ,φ) 下的 Riemann 度量 $g_{ij}(i,j=1,2,3)$。

13. 证明公式(3.2.8)和(3.2.9)。

14. 证明公式(3.2.11)和(3.2.16)。

15. 设 $M=\mathbf{R}^3$，指出下列微分形式哪些是闭的，哪些是恰当的：(1) $\omega=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$；(2) $\omega=x\mathrm{d}x+x^2y^2\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z$；(3) $\omega=xy^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。

16. 证明公式(3.2.29)～(3.2.31)。

17. 设 $F:\mathbf{R}_+^1\times S^1\to\mathbf{R}^2$ 由 $(x,y)=F(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ 给出，试计算 $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$。

18. 设 $F:\mathbf{R}_+^1\times S^1\times[0,\pi]\to\mathbf{R}^3$ 由 $(x,y,z)=F(r,\theta,\varphi)=(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ 给出，试计算 $F^*(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$ 和 $F^*(\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)$。

19. 证明公式(3.2.34)～(3.2.38)。

20. 证明公式(3.2.39)。

21. 证明公式(3.2.49)～(3.2.52)。

22. 利用公式(3.2.61)去证明公式(3.2.59)。

23. 证明公式 $[L_X,L_Y]=L_{[X,Y]}$。

24. 设 $M=\mathbf{R}^2$，$X=-y\partial/\partial x+x\partial/\partial y$，试计算 $L_X(\partial/\partial x)$ 和 $L_X(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$。

25. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，利用 d 和 * 运算去证明向量分析的有关公式（参考例 3.2.3）。

26. 设 $f,g\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$，试分别在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系下计算 $\mathrm{d}f\wedge(*\mathrm{d}g)$。

27. 证明公式(3.2.103)～(3.2.107)。

28. 证明公式(3.2.109)～(3.2.112)。

29. 设 $f\in C^\infty(\mathbf{R}^3)$，试分别在柱坐标系和球坐标系下计算 $\mathrm{d}*\mathrm{d}f$ 和 Δf。

30. 证明定理 3.2.10 及其推论。

31. 设 (P,ω) 是一个 $2n$ 维辛流形，U 是 P 上的一个坐标邻域，在其上取辛坐标 $(q_i、p_i)$ $(i=1,\cdots,n)$。记 $e_i=\partial/\partial q_i$，$f_i=\partial/\partial p_i(i=1,\cdots,n)$。证明下列关系式：(1) $\omega(e_i,e_j)=\omega(f_i,f_j)=0$，

$i,j=1,\cdots,n$；(2) $\omega(e_i,f_j)=0,i\neq j,i,j=1,\cdots,n$；(3) $\omega(e_i,f_i)=1,i=1,\cdots,n$。

32. 设$\{\psi_t|t\in\mathbf{R}\}$是定常 Hamilton 系统的单参数变换群，证明：ψ_t 是一个正则变换。

33. 对于 n 维热传导方程 $u_t-a^2\Delta u=0$，若取 $\alpha=(*\,\mathrm{d}u)\wedge\mathrm{d}t-u\omega$，其中 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$，$*$ 仅作用于空间变量，则该方程等价于 $\mathrm{d}\alpha=0$。

34. 证明公式(3.2.149)和(3.2.150)。

35. 推导 Riemann 流形的自然体积元 ω(见式(3.3.2))的坐标变换公式，并证明它与坐标的取法无关。

36. 利用 Stokes 定理推导 $\mathbf{R}^3$ 中的经典 Stokes 公式和 Gauss 公式。

37. 利用 Stokes 定理给出 $\mathbf{R}^3$ 中 $\omega=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 的曲线积分与路径无关的条件。

38. 证明公式(3.3.15)和(3.3.16)。

39. 试问下列函数的临界点(0,0)是否孤立、非退化、极大或极小？并计算该临界点的指标。

(1) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$；

(2) $f(x,y)=10xy+y^2+75y^3$；

(3) $f(x,y)=x^2+4y^3$；

(4) $f(x,y)=x^2+11xy+\dfrac{y^2}{2}+x^6$。

40. 设 M 为全体 2×2 实矩阵组成的集合，$f:M\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(\mathbf{A})=\det\mathbf{A}$，$\forall\mathbf{A}\in M$。证明：$f$ 是 M 上的 Morse 函数。

41. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 由 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 定义，其中 $a_{ij}\in\mathbf{R}(i,j=1,\cdots,n)$。

(1) 求 f 的 Hesse 矩阵 $\boldsymbol{H}$；

(2) 若 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{Hv}=0$，求证：过原点 O 且沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的直线上的点全是 f 的临界点；

(3) 证明当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 为非奇异矩阵时，原点 O 是 f 的孤立临界点。

42. 设 $M=\mathbf{R}^2$，K 为 x 轴，L 为圆周，试给出 K 和 L 横截或非横截的示意图。

43. 设 $F:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n$ 为线性映射($k<n$)，L 为 $\mathbf{R}^n$ 的线性子空间，证明 $F\pitchfork L$ 的充分必要条件是 $F(\mathbf{R}^k)+L=\mathbf{R}^n$。

参考文献

[1] Westenholz C Von. Differential Forms in Mathematical Physics. Amsterdam: NorthHolland Publ Company,1981

[2] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. Manifolds, Tensor Analysis and Applications. New York: Addison-Wesley Publ Company,1983

[3] Boothby W M. Introduction to Differential Manifolds and Riemann Geometry. Orlando: Academic Press, 1975

[4] Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics. New York: Springer-Verlag, 1978

[5] Burke W L. Applied Differential Geometry. Cambridge: Cambridge Univ Press,1985

[6] Martin D. Manifold Theory: An Introduction for Mathematical physicists. New York: Ellis Horwood Limited,1991

[7] Aldrovandi R, Pereira J G. An Introduction to Geometrical Physics. Singapore: World Scientific, 1995
[8] Frankel T. The Geometry of Physics: An Introduction. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1997
[9] Schutz B F. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1980
[10] 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义. 北京:北京大学出版社,1988
[11] 陈维桓. 微分流形初步. 北京:高等教育出版社,1998
[12] 黄正中. 微分几何导引. 南京:南京大学出版社,1992
[13] 詹汉生. 微分流形导引. 北京:北京大学出版社,1987
[14] 杨万年. 微分流形及其应用. 重庆:重庆大学出版社,1992
[15] 徐森林. 流形和 Stokes 定理. 北京:人民教育出版社,1981
[16] 余扬政,冯承天. 物理学中的几何方法. 北京:高等教育出版社,1998
[17] 柯歇尔 J,邹异明. 辛几何引论. 北京:科学出版社,1986
[18] Isidori A. Nonlinear Control Systems. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1989
[19] Casti J L. Nonlinear System Theory. Orlando: Academic Press, 1985
[20] Barnett S, Cameron R G. Introduction to Mathematical Control Theory. 2nd Edition. Oxford: Clarendon Press, 1985
[21] 程代展. 非线性系统的几何理论. 北京:科学出版社,1991
[22] 胡跃朋. 非线性控制系统理论与应用. 北京:国防工业出版社,2002

第四章　偏微分方程的现代理论

偏微分方程主要借助于未知函数及其导数来刻画客观世界的物理量的一般变化规律。人类对它的研究已经有将近300年的历史。最初的研究工作主要集中在物理、力学、几何学等方面的具体问题，其典型代表是波动方程、热传导方程和位势方程(调和方程)。通过对这些问题的研究，形成了至今仍然使用的有效方法，例如，分离变量法、Fourier 变换法等。早期的偏微分方程研究的特点基本上是针对某一个方程来进行，研究方法和研究结果都难以得到广泛应用。

随着科学和技术研究中出现的偏微分方程越来越广泛，针对某一个方程进行研究的方式已经不能适应实际工作的需要。为了满足新的需求，寻找研究偏微分方程的普遍适用的方法成了20世纪偏微分方程界主要的工作，发展起来了诸如泛函分析法、积分变换法、半群法和反散射法等比较普遍适用的方法。泛函分析方法以广义函数理论和 Sobolev 空间理论为基础，对偏微分方程问题解的适定性进行研究，形成了研究偏微分方程的较一般的方法，例如基本解方法和 Schauder 估计法可以用于研究各种类型的偏微分方程。积分变换法借助于 Fourier 积分算子理论，更是把偏微分方程抽象到更高层次上进行理论研究。半群方法主要是利用半群理论、广义函数理论和 Sobolev 空间理论等数学基础，研究线性和非线性偏微分方程的方法。反散射方法是研究孤立子时产生和发展起来的，是研究非线性偏微分方程问题的较一般的方法。

本章主要介绍偏微分方程的一些基本概念和研究偏微分方程的现代理论基础，以及研究偏微分方程问题的主要方法。4.1节介绍偏微分方程的定义及其基本类型，以及偏微分方程理论所要讨论的主要问题。4.2节采用连续线性泛函的观点来理解广义函数，并且介绍利用广义函数求偏微分方程基本解的方法。4.3节中介绍 Sobolev 空间的基本知识，然后在4.4节中利用广义函数和 Sobolev 空间理论研究线性偏微分方程. 4.5节中还将介绍 C_0 半群理论的基本概念及其在发展方程中的应用。最后，在4.6节中介绍求解非线性偏微分方程问题的 Bäcklund 变换、Hirota 双线性直接法、Lax 对和反散射方法。

4.1　偏微分方程的基本概念

本节介绍偏微分方程的定义及其基本类型，以及偏微分方程理论所要讨论的主要问题。

4.1.1　偏微分方程定义

定义 4.1.1　称形如以下含有未知函数 $u(x)$ 以及各阶偏导数的等式

$$F\left(\boldsymbol{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)=0$$

为**偏微分方程**。式中未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 表示客观世界的物理量，一般随时间和空间位置变化；时间变量和空间变量记成向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$；$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标，$|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$。

为了方便，以下简记：$\boldsymbol{x}^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，$\partial_x^{\alpha}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$，$\mathrm{D}_x^{\alpha}=\mathrm{i}^{-|\alpha|}\partial_x^{\alpha}$。在这些记号下，以上所定义的偏微分方程可以简写为

$$F(\boldsymbol{x},u,\partial_x^1 u,\cdots,\partial_x^{|\alpha|}u)=0 \tag{4.1.1}$$

式(4.1.1)中的函数 F 既可以是标量函数也可以是向量函数。若 F 是向量函数，则称式(4.1.1)为**偏微分方程组**。

在偏微分方程研究中，通常对式(4.1.1)所表示的一般偏微分方程进行分类，以便针对不同偏微分方程采用不同方法进行研究。最普通的分类方式是按照式(4.1.1)中的函数 F 所出现的未知函数的偏导数的最高阶阶数 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 进行的，将式(4.1.1)的偏微分方程称为 **$|\boldsymbol{\alpha}|$ 阶偏微分方程**。

式(4.1.1)所表示的偏微分方程还可以按照其中的函数 $F(\boldsymbol{x},u,\partial_x^1 u,\cdots,\partial_x^{|\alpha|}u)$ 关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 及其各阶导数 $\partial_x^1 u,\cdots,\partial_x^{|\alpha|}u$ 的线性性来分类。若 F 是关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 及其各阶导数函数的线性函数，则称对应的偏微分方程为**线性偏微分方程**；反之，如果函数 F 不是未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 及其各阶导数的线性函数，则称对应的偏微分方程为**非线性偏微分方程**。

非线性偏微分方程可以进一步分类。比如，当式(4.1.1)的函数 F 关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 及其导数是非线性的，但关于未知函数 $u(\boldsymbol{x})$ 的最高阶偏导数是线性的，则称对应的偏微分方程为**拟线性偏微分方程**；而当函数 F 是多项之和且至少有一项是未知函数及其导数的线性函数时，称对应的偏微分方程为**半线性方程**。

例如，Cauchy-Riemann 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

是一个一阶线性偏微分方程组。而 $\dfrac{\partial u}{\partial t}-6u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$ 是一个三阶非线性偏微分方程，它既是拟线性偏微分方程，也是半线性方程。

线性偏微分方程也可以进一步分类。一般 m 阶线性偏微分方程可以写成

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})\mathrm{D}^{\alpha}u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}) \tag{4.1.2}$$

简写成 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})u(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$，其中 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})\mathrm{D}^{\alpha}$ 称为 **m 阶线性偏微分算子**，而 $p_m(\boldsymbol{x},\mathrm{D})=\sum\limits_{|\alpha|=m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})\mathrm{D}^{\alpha}$ 被称为线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})$ 的**主部**。对于线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})$，将由

$$P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})^{*}v=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}(a_{\alpha}(\boldsymbol{x})v)$$

所定义的线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})^{*}$ 称为算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})$ 的**共轭算子**。

借助式(4.1.2)，可以将线性偏微分方程作如下分类。

定义 4.1.2 若 m 阶线性偏微分方程(4.1.2)中的系数满足

$$P_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{|\alpha|=m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^{\alpha}\neq 0,\ \forall\,\boldsymbol{\xi}\neq 0,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$$

则称对应的偏微分方程为 **m 阶椭圆型方程**。

定义 4.1.3 若对任意的向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，可从其分量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中选取一个变

量，比如 ξ_n，使得 $P_m(x,\xi)=0$ 具有关于 ξ_n 的 m 个互异实根，则称对应的 m 阶线性偏微分方程为 **m 阶双曲型方程**。

还可以定义所谓的抛物型方程。例如，对一般的二阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(x)D^\alpha u \tag{4.1.3}$$

可作如下定义。

定义 4.1.4　若式(4.1.3)中的 $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant 2}a_\alpha(x)\xi^\alpha\neq 0(\forall\xi\neq 0)$，则称对应的线性偏微分方程为**抛物型方程**。

对高阶偏微分方程也可以定义抛物型方程。

还有大量线性偏微分方程不属于这三类方程之一。例如，Tricomi 在 1923 年研究过的 $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 就既不是区域 $\mathbf{R}^2$ 上的椭圆型方程和双曲型方程，也不是 $\mathbf{R}^2$ 上的抛物型方程，它在$y>0$时为椭圆型方程，而在 $y<0$ 时为双曲型方程，这样的方程称为区域 $\mathbf{R}^2$ 上的**混合型方程**。

例如，数学物理中的三维 Laplace 方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 就是一个典型的椭圆型方程；而数学物理中的波动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$($a$ 为常数)就是双曲型方程。

4.1.2　偏微分方程的定解问题

定义 4.1.5　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域，函数 u 定义在区域Ω 上并且处处具有$|\boldsymbol{\alpha}|$阶连续导数，如果函数 u 使得等式(4.1.1)两边恒等，则称函数 u 为式(4.1.1)在区域 Ω 上的经典意义下的解，简称为**经典解**。一般所说的解，就是这种意义下的解。

按照这种定义，Tricomi 方程可以有无穷多个解，而物理现象在一定条件下是惟一表现出来的。偏微分方程理论就是研究一个偏微分方程(或偏微分方程组)是否有在满足某些补充条件的情况下，具有惟一解和解的各种性质，以及求解的方法。

一般来说，为了确定偏微分方程的解，需要对该偏微分方程补充一些初始条件和边界条件。偏微分方程连同所附加的补充条件一起构成**定解问题**，例如，波动方程具有以下两类定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & (a\text{ 为常数})\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases} \tag{4.1.4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) & (x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3,a\text{ 为常数}\\ u\,|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y,z)\\ u\,|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,z,t)\end{cases} \tag{4.1.5}$$

若定解问题的解存在且惟一，而且解对定解问题的补充条件以及方程系数有连续依赖性，则称对应的定解问题为**适定问题**。

从数学物理中知道，定解问题式(4.1.4)和(4.1.5)有惟一解，而且其解对初始条件有连续

依赖性。因此，定解问题式(4.1.4)为适定问题。但有些偏微分方程确实理论上无解，例如，Lewy 研究过方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+2(\mathrm{i}x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=f(x,y,z)$$

式中，u 为复值函数。他证明了如果适当选取 $\mathbf{R}^3$ 上充分光滑的函数 $f(x,y,z)$，则该方程在 $\mathbf{R}^3$ 的任何非空子集合中不仅无经典解，而且也没有其他意义下的解。另一个无解方程的例子是由 Treves 给出的：取实系数的线性算子 B 为

$$Bu=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

则下列方程无解

$$\left(B-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(B+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\left(B^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=f$$

4.2 广义函数空间

在工程技术领域中广泛应用的 δ 函数被定义为

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

它满足条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1$ 。但从经典微积分的观点来看，这种定义显然是矛盾的，因而不能像普通函数那样进行某些数学运算。为了对这类函数建立严格的数学基础，有必要对数学分析的函数概念加以推广，推广的函数就是本节所说的广义函数。本节采用连续线性泛函的观点来理解广义函数。

4.2.1 基本函数空间

定义 4.2.1 记 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微函数构成的空间为 $C^\infty(\Omega)$。在 $C^\infty(\Omega)$ 中引进拓扑：若函数列 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x})\}\subset C^\infty(\Omega)$ 对任意指标 α 和任意紧集 $K\subset\Omega$，有 $\sup\limits_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_j|\to 0$，则称函数列 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x})\}$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中弱收敛到 0，记为 $\varphi_j(\boldsymbol{x})\to 0(C^\infty(\Omega))$。将赋予了该拓扑的 $C^\infty(\Omega)$ 记为 $\mathscr{E}(\Omega)$。

对于 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上定义的函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，记 $\operatorname{supp}\varphi(\boldsymbol{x})=\overline{\{\boldsymbol{x}\mid\varphi(\boldsymbol{x})\neq 0,\boldsymbol{x}\in\Omega\}}$，称为函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的**支集**。

定义 4.2.2 记 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的无穷次可微并且具有紧支集的函数构成的线性空间为 $C_0^\infty(\Omega)$。在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中引进拓扑：若函数列 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x})\}\subset C_0^\infty(\Omega)$ 对任意指标 α，存在紧集 $K\subset\Omega$ 使得 $\operatorname{supp}\varphi_j\in K$，且 $\sup\limits_{x\in K}|\partial^\alpha\varphi_j|\to 0$，则称函数列 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x})\}$ 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中弱收敛到 0，记为 $\varphi_j(\boldsymbol{x})\to 0(C_0^\infty(\Omega))$。将赋予了该拓扑的 $C_0^\infty(\Omega)$ 记为 $\mathscr{D}(\Omega)$。

以上定义的两种空间 $\mathscr{E}(\Omega)$ 和 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时分别简记为 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{D}$。

定义 4.2.3 记 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 或 $\mathscr{S}$ 为空间 $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 的子空间，若 $\varphi(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ 对任意指标 α,β 有 $\lim\limits_{|x|\to 0}\boldsymbol{x}^\alpha\partial^\beta\varphi(\boldsymbol{x})\to 0$，则 $\varphi(\boldsymbol{x})\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$。$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的拓扑为：对任意指标 α,β，若 $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}^n}\boldsymbol{x}^\alpha\partial^\beta\varphi_j(\boldsymbol{x})\to 0$，则称函数列 $\{\varphi_j(\boldsymbol{x})\}$ 在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上收敛到 0，记为 $\varphi_j(\boldsymbol{x})\to 0(\mathscr{S}(\mathbf{R}^n))$。

例如，定义 $\mathbf{R}^n$ 中的函数

$$j(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}\exp\dfrac{1}{|x|^2-1}, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}\tag{4.2.1}$$

其中，$c=\int_{|x|<1}\exp\dfrac{1}{|x|^2-1}\mathrm{d}x$。显然函数 $j(x)$ 分别是 $\mathscr{D},\mathscr{S},\mathscr{E}$ 中的函数，其支集为 $\operatorname{supp} j(x)=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$，并且在其定义域上的积分值为1。此外，对于任意 $\varepsilon>0$，令 $j_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}j(x/\varepsilon)$，则对任意 $\varepsilon>0, j_\varepsilon(x)\in\mathscr{D},\mathscr{S},\mathscr{E}$；当 $|x|\geqslant\varepsilon$ 时，$j_\varepsilon(x)=0$，而且 $\int j_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$。

对于 $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$，若定义算子 J_ε 使得

$$J_\varepsilon u(x)=\int_{\mathbf{R}^n}u(y)j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^n}u(x-y)j_\varepsilon(y)\mathrm{d}y\tag{4.2.2}$$

称算子 J_ε 为光滑化算子或软化算子，而式(4.2.1)中定义的函数称为**光滑化核或软化核**。由卷积运算的性质可知，对于 $u\in L^2(\mathbf{R}^n)$，$J_\varepsilon u(x)\in\mathscr{E}$。

定理 4.2.1　$\mathscr{D}(\Omega)$，$\mathscr{S}$和 $\mathscr{E}(\Omega)$均为完备空间。

证　仅证明 $\mathscr{D}(\Omega)$的完备性，$\mathscr{S}$和 $\mathscr{E}(\Omega)$的完备性可类似证明。由微积分原理知，$\varphi_j(x)\to\varphi(x)(j\to\infty)$，$\partial^\alpha\varphi_j(x)$的极限存在，且 $\lim\limits_{j\to\infty}\partial^\alpha\varphi_j\to\partial^\alpha\varphi(x)$。因此极限函数 $\varphi(x)$在 Ω 上无穷次可微，且在区域 Ω 之外恒为零，所以 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega)$。按照 $\mathscr{D}(\Omega)$上收敛性定义，$\mathscr{D}(\Omega)$中任意基本列在 $\mathscr{D}(\Omega)$中存在极限。故空间 $\mathscr{D}(\Omega)$为完备空间。证毕。

空间 $\mathscr{D}$，$\mathscr{S}$和 $\mathscr{E}$之间显然存在关系 $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$，而且有如下定理。

定理 4.2.2　$\mathscr{E}$是连续函数空间 $C^0(\mathbf{R}^n)$的稠密子空间。

证　对任意连续函数 $f(x)\in C^0(\mathbf{R}^n)$，由于当 $|x|\geqslant\varepsilon$ 时，$j_\varepsilon(x)=0$，所以

$$|J_\varepsilon f(x)-f(x)|\leqslant\int_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|f(y)-f(x)|\,j_\varepsilon(x-y)\mathrm{d}y\leqslant\sup_{|x-y|\leqslant\varepsilon}|f(y)-f(x)|\to 0\ (\varepsilon\to 0)$$

因而函数 $J_\varepsilon f(x)\in\mathscr{E}$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 $f(x)$。所以定理成立。

因此，由 $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$ 可以推出：$\mathscr{S}$在 $\mathscr{E}$ 中稠密，$\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{S}$中稠密。

4.2.2　广义函数空间

1. 广义函数的定义

定义 4.2.4　设 E 为基本函数空间，空间 E 上的连续线性泛函 u 称为定义于空间 E 上的**广义函数**，简称为**广函或分布**。

记 E 上的全部广义函数所构成的集合为 E'，则根据线性泛函的加法和数乘运算，广义函数集合 E'是一个线性空间。广义函数 u 作用在基本函数空间 E 中的函数 $\varphi(x)$上的结果记为 $\langle u,\varphi\rangle$或 $u(\varphi)$。连续线性泛函具有以下性质

(1) 线性：对任意数 a，b，使得

$$u(a\varphi+b\psi)=au(\varphi)+bu(\psi),\qquad\forall\varphi,\psi\in E$$

(2) 连续性：当 $\varphi_j\to 0(E)$时，$u(\varphi_j)\to 0$。

因此，广义函数空间 E'中可以引进两种收敛概念：如果对任意 $\varphi(x)\in E$，广义函数空间 E'中的广义函数列$\{u_j\}$，使得

$$\langle u_j,\varphi\rangle \to \langle u,\varphi\rangle, \qquad (j\to\infty)$$

式中，$u\in E'$，则称 $\boldsymbol{u}_j$ 弱收敛于 $\boldsymbol{u}$；若当 $\boldsymbol{j}\to\infty$ 时，$\langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{\varphi}\rangle$ 在 $\boldsymbol{E}$ 中的每个有界集合上一致收敛于 $\langle u, \varphi\rangle$，则称 u_j 强收敛于 u。

特别地，设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，则 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的广义函数亦称为**分布**。$\mathscr{D}(\Omega)$ 上的全体广义函数记成 $\mathscr{D}'(\Omega)$。此外，$\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ 上的广义函数称为**缓增分布或缓增广函**，$\mathscr{S}$ 上的全体广义函数记成 $\mathscr{S}'$。而 $\mathscr{E}$ 上的广义函数称为**超分布**，记为 $\mathscr{E}'$。由基本函数空间 $\mathscr{D},\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{E}$ 之间的关系 $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$，易知：$\mathscr{D}'\supset\mathscr{S}'\supset\mathscr{E}'$。

例 4.2.1 对固定点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，定义 δ 使得

$$\langle \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{x}_0), \qquad \forall\varphi(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}$$

该式显然定义了 $\mathscr{E}'$ 中的一个广义函数，称为 Dirac 函数。该广义函数在工程技术中常称为脉冲符号或脉冲函数。显然 δ 也是 $\mathscr{D}'$ 和 $\mathscr{S}'$ 中的广义函数。

例 4.2.2 空间 $\mathbf{R}^n$ 上的任意局部可积函数 $f(\boldsymbol{x})$ 通过公式

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall\varphi(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D} \tag{4.2.3}$$

定义了 $\mathscr{D}$ 上的一个广义函数。

证 对于 $\mathscr{D}$ 上的收敛序列 $\{\varphi_j\}$，存在有界闭区域 K，使得 $\forall j$，$\mathrm{supp}\varphi_j\subset K$。因此，当 $\varphi_j\to 0(\mathscr{D})$ 时，$f(\varphi_j)\to 0$，即 f 是连续的。而 f 的线性是显然的，因此式(4.2.3)定义了 $\mathscr{D}$ 上的一个广义函数。

从式(4.2.3)知道，若将几乎处处相等的函数看成同一函数，则局部可积函数与式(4.2.3)定义的广义函数是一一对应。因此在不致于引起混淆的情况下，可以直接将局部可积函数 f 称为广义函数。

定义 4.2.5 由局部可积函数 $f(\boldsymbol{x})$ 按照式(4.2.3)定义的广义函数，称为**函数型广义函数或正则广义函数**，非正则的广义函数称为**奇异型广义函数**。

奇异型广义函数是存在的。事实上，若不存在奇异型广义函数，则有局部可积函数 $f(\boldsymbol{x})$ 使得 δ 函数满足

$$\langle\delta,\varphi\rangle = \int f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(0), \qquad \forall\varphi(\boldsymbol{x})\in\mathscr{D} \tag{4.2.4}$$

选取式(4.2.1)中定义的函数 $j(\boldsymbol{x})$ 作为 $\varphi(\boldsymbol{x})$，则有

$$\int_{|\boldsymbol{x}|\leqslant\epsilon} f(\boldsymbol{x})j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = j(0) = (c\mathrm{e})^{-1}$$

上式右边为与 ϵ 无关的常数，而左边当 $\epsilon\to 0$ 时趋于 0，这产生矛盾。因此，不存在函数型广义函数使式(4.2.4)成立，即 δ 是一个奇异型广义函数。

奇异型广义函数的存在表明广义函数确实扩大了经典函数的范畴。

例 4.2.3 单变量函数序列

$$f_j(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1/j \\ j/2, & |x| \leqslant 1/j \end{cases}$$

收敛于极限 δ。

证 由于对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$，存在 $\xi_j\in[-1/j,1/j]$ 使得

$$\langle f_j,\varphi\rangle = \frac{j}{2}\int_{-1/j}^{1/j}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(\xi_j) \to \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle, \qquad (j\to\infty)$$

因此 f_j 收敛于 δ。

定理 4.2.3　设空间 $\mathscr{D}'$ 中的广义函数列 $\{f_j(\boldsymbol{x})\}$ 存在弱极限 f，则极限 $f \in \mathscr{D}'$。

根据该定理可以证明，对 $\mathscr{D}'$ 中的弱基本列 $\{f_j(\boldsymbol{x})\}$，若 $\forall \varepsilon > 0$ 存在 $N(\varepsilon)$，使得当 $j,k \geqslant N$ 时，有

$$|\langle f_j - f_k, \varphi \rangle| < \varepsilon, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

数值基本序列 $\{\langle f_j, \varphi \rangle\}$ 有极限。由 $\{f_j(\boldsymbol{x})\}$ 的弱收敛性以及定理 4.2.3 知，收敛极限 $f \in \mathscr{D}'$。因此 $\mathscr{D}'$ 为完备空间。

2. 广义函数的惟一确定性

从上面的描述中可知，广义函数 f 一般不能进行逐点描述，但可以按下式定义广义函数 f 在某一点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U 中为 0

$$f(\varphi) = 0, \qquad \forall \varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}(U)$$

若广义函数 f 和 g 在区域 U 上使得 $f-g=0$，则称 f 与 g 在 U 上相等。另外，u 取 0 值的最大开集的余集称为 u 的**支集**，记为 $\operatorname{supp} u$。

定理 4.2.4　若 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$，存在在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域中不等于 0 的基本函数空间 $\boldsymbol{E}$ 中的任意函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$，使得 $\int \varphi(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x \in \boldsymbol{E}$，并且使得函数型广义函数 $f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{E}'$ 满足 $\int f(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$，则在 $\mathbf{R}^n$ 上广义函数 f 几乎处处为 0。

证　对在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域中不等于 0 的任意 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in E$，$\int f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-ix\xi} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$ 可得 $f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})$ 几乎处处为 0，再由 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的任意性知，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处为 0。证毕。

从该定理很容易知道，$\mathscr{D}, \mathscr{S}, \mathscr{E}$ 上的函数型广义函数都是惟一确定的，即若 $f(\varphi) = g(\varphi)$，$\forall \varphi(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{D}$（或 $\mathscr{S}, \mathscr{E}$），则在 $\mathbf{R}^n$ 上几乎处处 $f=g$。

定理 4.2.4 可以用于惟一确定所谓的有限阶广义函数，这种广义函数定义如下。

定义 4.2.6　若 $\boldsymbol{E}$ 上的广义函数 f 可以由某个局部可积函数 $F(\boldsymbol{x})$ 表示如下

$$\langle f, \varphi \rangle = \int F(\boldsymbol{x}) \partial^p \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \qquad \forall \varphi \in \boldsymbol{E}$$

则称 f 为有限阶广义函数。满足该式的 $|p|$ 的最小值被称为广义函数 f 的阶。

例 4.2.4　δ 广义函数是一阶的。

证　因为 $\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$

其中

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{4.2.5}$$

为 Heaviside 函数。

下面讨论有界区域上的广义函数的惟一确定问题。先不加证明地介绍单位分解定理。

定理 4.2.5　设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域，并且 Ω 存在局部有限的有界开覆盖 $\{\Omega_j\}$，使得 Ω 中的每一点仅含在有限个 Ω_j 中，则具有如下性质的函数列 $\{\psi_j\}$

(1) $\psi_j \in C_0^{\infty}(\Omega_j)$，$0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$，$j=1,2,\cdots$，

(2) $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j = 1$，$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$，

称为 Ω 上从属于覆盖 $\{\Omega_j\}$ 的单位分解。

定理 4.2.6 设 Ω 上的广义函数 f 在 Ω 中的每个点的一个邻域中为 0 广义函数，则 f 在 Ω 中为 0 广义函数；反之，若 f 在 Ω 中为 0 广义函数，则 f 在 Ω 中的每个点的一个邻域中为 0 广义函数。

证 设 Ω 上的广义函数 f 在 Ω 的每个点的一个邻域中为 0 广义函数，并在区域 $U(\overline{U}\subset\Omega)$ 上取 $\varphi\in C_0^\infty(\overline{U})$。对每一点 $\boldsymbol{x}\in\overline{U}$，$f$ 在其一邻域中为 0 广义函数，不妨假设该邻域有界，则当 $\boldsymbol{x}$ 遍历 $\overline{U}$ 时，所述邻域构成 $\overline{U}$ 的一个有界开覆盖族。根据 Heine-Borel 定理可得 U 的局部有限的有界开覆盖序列 $\{\Omega_j\}$，令其相应的单位分解为 $\{\psi_j\}$，则对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\overline{U})$ 有

$$\varphi=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\psi_j,\qquad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\overline{U})$$

而在 Ω_j 上 $\langle f,\varphi\psi_j\rangle=0$，因此

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle f,\sum_{j=1}^{\infty}\varphi\psi_j\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,\varphi\psi_j\rangle=0,\qquad \forall\,\varphi\in C_0^\infty(\overline{U})$$

即 f 在任意区域 U 上为 0 广义函数。进而 f 在区域 Ω 上为 0 广义函数。该定理的另一方面是显然的。证毕。

3. 广义函数的运算

为了便于使用广义函数，下面将在广义函数空间中引进一些有用的运算。

(1) 广义函数与无穷可微函数的乘积

对基本函数空间 $\boldsymbol{E}$，其上的广义函数 f 与任意无穷可微函数 $a(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}$ 的乘积定义为

$$\langle af,\varphi\rangle=\langle f,a\varphi\rangle,\qquad \forall\,\varphi\in\boldsymbol{E}\tag{4.2.6}$$

这显然是线性泛函，而且当 $\boldsymbol{E}=\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{E}$ 时，若 $\varphi_j\to0(\boldsymbol{E})$，则由于 Leibniz 法则知

$$\partial^{\alpha}(a\varphi_j)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\partial^{\beta}a\,\partial^{\alpha-\beta}\varphi_j$$

(其中 $\boldsymbol{\beta}\leqslant\boldsymbol{\alpha}$ 表示 $\beta_j\leqslant\alpha_j,j=1,2,\cdots,n$)，$a\varphi_j\to0(\boldsymbol{E})$ 是显然的。因此，式(4.2.6)所定义的泛函还是连续线性的，即 af 为 $\boldsymbol{E}$ 上的广义函数。

但当 $\boldsymbol{E}=\mathscr{S}$ 时，为了保证 af 为 $\mathscr{S}$ 上的广义函数，除了在式(4.2.6)中要求 $a(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}$ 外，还要求 $\partial^{\alpha}(\boldsymbol{x})=O(|\boldsymbol{x}|^{k_\alpha})$，$|\boldsymbol{x}|\to\infty$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{N}^n$，其中 k_α 为非负正数。

例 4.2.5 证明：$a(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})=a(0)\delta(\boldsymbol{x})$，$a(\boldsymbol{x})\in\mathscr{S}$。

证 根据无穷可微函数 $a(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}$ 与广义函数的乘积的定义，对任意 $\varphi\in\mathscr{D}$ 或 $\mathscr{E}$ 有

$$\langle a(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x})\rangle=\langle\delta,a\varphi\rangle=a(0)\varphi(0)=\langle a(0)\delta(\boldsymbol{x}),\varphi\rangle$$

因此，$a(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x})=a(0)\delta(\boldsymbol{x})$。

(2) 广义函数的导数

对广义函数 $f\in\mathscr{D}'$，其导数表示为 $\partial^{\alpha}f$，它满足

$$\langle\partial^{\alpha}f,\varphi\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle f,\partial^{\alpha}\varphi\rangle,\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{D}\tag{4.2.7}$$

这显然是线性泛函。由 $\mathscr{D}$ 中的函数序列的收敛性定义，不难证明式(4.2.7)所定义的泛函还是连续线性的。根据定义式(4.2.7)以及 $\mathscr{D}'$ 中的函数序列的收敛定义，容易知道 $\mathscr{D}'$ 中的广义函数具有无穷阶广义导数，即 $\mathscr{D}'$ 中的广义函数为无穷可微的，它的各阶导数都在 $\mathscr{D}'$ 中，并且与微分运算的顺序无关。

无穷可微函数 $a(\boldsymbol{x})$ 与广义函数 f 的乘积广义函数也适用 Leibniz 法则。

例 4.2.6 求 Heaviside 函数(式(4.2.5))的导数。

解　由于 $\langle H',\varphi\rangle=-\langle H,\varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{\infty}H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$，　$\forall\,\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$。因此，Heaviside 函数的导数是 δ 函数。

(3) 广义函数的卷积

若 $\varphi\in\mathscr{D}$，$u\in\mathscr{D}'$，则称

$$u*\varphi=\langle u_y,\varphi(x-y)\rangle,\quad \forall\,x\in\mathbf{R}^n$$

所定义的广义函数为 u 与函数 φ 的卷积，记为 $u*\varphi$(式中记 u_y 为关于自变量 y 的广义函数 u，下同)。若广义函数 g，f 满足 $f\in\mathscr{D}'$，$g\in\mathscr{E}'$，则称

$$\langle f_x,\langle g_y,\varphi(x+y)\rangle\rangle,\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{E}$$

所定义的广义函数为 f 与 g 的卷积，记为 $f*g$。

根据卷积的定义及广义函数的性质，容易证明

$$\partial^\alpha(u*\varphi)=u*\partial^\alpha\varphi,\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g=f*\partial^\alpha g$$

式中，u，$f\in\mathscr{D}'$，$g\in\mathscr{E}'$，$\varphi\in\mathscr{D}$。

当 $\varphi\in\mathscr{S}$时，还可以证明 $u*\psi\in\mathscr{S}$。

例 4.2.7　对 $f\in\mathscr{D}'$，计算 $\delta(x)*f_x$。

解　设 $\varphi(x)\in C_0^\infty$，则$\langle\delta*f_x,\varphi\rangle=\langle\delta,\langle f,\varphi\rangle\rangle=\langle f,\varphi\rangle$，因此，$\delta(x)*f_x=f_x$。

借助于卷积运算，可以用光滑函数逼近广义函数。事实上，利用式(4.2.1)所定义的函数 $j(x)$以及由此函数定义的 $j_\varepsilon(x)$和式(4.2.2)的光滑化算子 J_ε，可以得到如下定理。

定理 4.2.7　设 $f\in\mathscr{D}'$，则

$$J_\varepsilon f=(f*j_\varepsilon)(x)\in C^\infty,\ \mathrm{supp}(J_\varepsilon f)\subset\mathrm{supp}f+\{x\mid |x|\leqslant\varepsilon\}$$

且当 $\varepsilon\to0$ 时，$J_\varepsilon f\to f(\mathscr{D}')$。

证　先证明 $J_\varepsilon f(x)$为光滑函数。为了方便，假设 $x\in\mathbf{R}^1$。因为

$$(f*j_\varepsilon)(x)=\langle f_y,j_\varepsilon(x-y)\rangle,\qquad x\in\mathbf{R}^1$$

而 $j_\varepsilon(x)\in C_0^\infty$，因此当 $h\to0$ 时有

$$\frac{1}{h}[j_\varepsilon(x-y+h)-j_\varepsilon(x-y)]\to\frac{\partial j_\varepsilon}{\partial x}(x-y)$$

于是对任意 $f\in\mathscr{D}(\mathbf{R}^1)$，当 $h\to0$ 时有

$$\langle f_y,\frac{1}{h}[j_\varepsilon(x-y+h)-j_\varepsilon(x-y)]\rangle\to\langle f_y,\frac{\partial j_\varepsilon(x-y)}{\partial x}\rangle$$

由广义函数的线性性可知，$f*j_\varepsilon$ 是一阶可导的。然后，利用数学归纳法便可证明 $J_\varepsilon f(x)$的光滑性。

下面证明定理的第二个公式。注意到对任意固定点 x，若对每一点 $y\in\mathrm{supp}f$ 都有 $x-y\notin\mathrm{supp}j_\varepsilon(x)$，即 $x\in\mathrm{supp}j_\varepsilon+\mathrm{supp}f$，则$(f*j_\varepsilon)(x)=\langle f_y,j_\varepsilon(x-y)\rangle=0$，因此 $f*j_\varepsilon$ 的支集含于 $\mathrm{supp}f+\mathrm{supp}j_\varepsilon$ 中。而 $\mathrm{supp}j_\varepsilon\subset\{x\mid |x|\leqslant\varepsilon\}$，所以 $\mathrm{supp}\,(J_\varepsilon f)\subset\mathrm{supp}f+\{x\mid |x|\leqslant\varepsilon\}$ 成立。

为了证明 $J_\varepsilon f\to f(\mathscr{D}')$，注意到 $\forall\,\varphi\in\mathscr{D}$，有

$$\langle J_\varepsilon f,\varphi\rangle=\langle f_x,\langle j_\varepsilon(y),\ \varphi(x+y)\rangle\rangle\tag{4.2.8}$$

而上式右端的

$$\langle j_\varepsilon(y),\varphi\,(x+y)\rangle=\int j_\varepsilon(y)\varphi(x+y)\mathrm{d}y=\int j_\varepsilon(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y=\int j(y)\varphi(x-\varepsilon y)\mathrm{d}y$$

因此对任意指标 α，都有

$$|\partial^\alpha\langle j_\varepsilon(y),\varphi(x+y)\rangle-\partial^\alpha\varphi(x)|\leqslant\int|\partial^\alpha\varphi(x-\varepsilon y)-\partial^\alpha\varphi(x)|\,j_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

由前面的证明知，存在一紧支集 $K\subset\mathrm{supp}\varphi+\{x\mid |x|\leqslant 1\}$，使得$\partial^\alpha\varphi$ 在 K 上一致连续，从而 $\forall\,\eta>0$，有充分小的 ε，使得 $|\partial^\alpha\varphi(x-\varepsilon y)-\partial^\alpha\varphi(x)|<\eta\int j(y)\mathrm{d}y=\eta$。因此，在 $\mathscr{D}$ 中，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\langle j_\varepsilon(y),\varphi(x+y)\rangle\to\varphi(x)$。于是，根据式(4.2.8)，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\langle J_\varepsilon f,\varphi\rangle\to\langle f,\varphi\rangle$。证毕。

(4) 广义函数的 Fourier 变换

对局部可积函数 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$，其 Fourier 变换为

$$\mathscr{F}(f)(\xi)=\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x,\quad x\cdot\xi=x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n \tag{4.2.9}$$

而其 Fourier 逆变换为

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}f(\xi)\mathrm{d}x \tag{4.2.10}$$

其中，$\mathscr{F}$和 $\mathscr{F}^{-1}$都是 L^1_{loc}上的线性算子。若 $u\in\mathscr{S}'$，则将

$$\langle\mathscr{F}(u),\psi\rangle=\langle u,\mathscr{F}(\psi)\rangle,\qquad\forall\,\psi\in\mathscr{S} \tag{4.2.11}$$

所定义的广义函数 $\mathscr{F}(u)$称为 $u\in\mathscr{S}'$的 **Fourier 变换**；而将

$$\langle\mathscr{F}^{-1}(u),\psi\rangle=\langle u,\mathscr{F}^{-1}(\psi)\rangle,\qquad\forall\,\psi\in\mathscr{S} \tag{4.2.12}$$

所定义的广义函数 $\mathscr{F}^{-1}(u)$称为 $u\in\mathscr{S}'$的 **Fourier 逆变换**。

可以证明，式(4.2.9)定义的古典函数的 Fourier 变换与式(4.2.11)所定义的广义函数的 Fourier 变换是一致的；式(4.2.10)定义 Fourier 逆变换与式(4.2.12)所定义的广义函数的 Fourier 逆变换也是一致的。因此，对两种 Fourier 变换使用同样的记号。$\mathscr{F}(u)$也记成 $\hat{u}$。

若函数序列 ψ_k 在 $\mathscr{S}$中收敛于 0，则 $\mathscr{F}(\psi_k)$也在 $\mathscr{S}$中收敛于 0。因此$\langle\hat{u},\psi_k\rangle=\langle u,\hat{\psi}_k\rangle\to 0(k\to 0)$，也就是说 $\mathscr{F}(u)\in\mathscr{S}'$。因此，Fourier 变换是 $\mathscr{S}'$到 $\mathscr{S}'$的连续线性算子。另外，对于广义函数的 Fourier 变换，由于$\langle\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(u)),\psi\rangle=\langle\mathscr{F}(u),\mathscr{F}^{-1}(\psi)\rangle=\langle u,\psi\rangle$，$\forall\,\psi\in\mathscr{S}$，因此 $\forall\,u\in\mathscr{S}'$，$\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(u))=u$。

例 4.2.8 试证 $\delta(x)$ 函数的 Fourier 变换为 1，而函数 1 的 Fourier 变换为$(2\pi)^n\delta(x)$，$x\in\mathbf{R}^n$。

证 因为 $\forall\,\psi\in\mathscr{S}$，$\langle\hat{\delta},\psi\rangle=\langle\delta,\hat{\psi}\rangle=\hat{\psi}(0)=\int\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\psi(x)\mathrm{d}x\,|_{\xi=0}=\langle 1,\psi\rangle$，所以$\mathscr{F}(\delta)=1$。

另外，若把 $\mathscr{F}(\delta)=1$ 作为已知，容易导出 $\langle\hat{1},\psi\rangle=\langle 1,\hat{\psi}\rangle=\langle\delta,\hat{\hat{\psi}}\rangle=(2\pi)^n\langle\delta,\psi(-x)\rangle=(2\pi)^n\langle\delta,\psi\rangle$，故 $\hat{1}=(2\pi)^n\delta$。

$\mathscr{S}'$上的 Fourier 变换与 $\mathscr{S}$上的 Fourier 变换有类似的性质。例如，容易证明以下性质

(1) 对 $u\in\mathscr{S}'$，有 $\mathscr{F}(D^\alpha u)=\xi^\alpha\mathscr{F}(u)$，$\mathscr{F}(x^\alpha u)=(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\mathscr{F}(u)$；

(2) 当 $\forall\,\psi\in\mathscr{S}$，$u\in\mathscr{S}'$时，$\mathscr{F}(u*\psi)=\hat{u}\cdot\hat{\psi}$。

另外，由于 $L^2(\mathbf{R}^n)$为 $\mathscr{S}'$的子空间，因此把 L^2 上的函数看作 $\mathscr{S}$上的广义函数时，具有一般缓增广义函数的性质，不仅如此，还有下述定理。

定理 4.2.8(Plancherel 定理) Fourier 变换为 L^2 到自身的保范同构映射。

保范映射保持内积不变，因此，对任意 f，$g\in L^2$，有$(f,g)=(\hat{f},\hat{g})$，其中$(\cdot,\cdot)$是 L^2 的内积。

4.2.3 广义函数的结构

下面介绍广义函数的一些具体形式，这些具体形式在下面被称为广义函数的结构。先介绍一个重要性质，即定理 4.2.9。

定理 4.2.9　$\forall f\in\mathscr{D}'$和有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，存在非负整数$N(f,\Omega)$和正常数$C(f,\Omega)$，使得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant N}\max_{\Omega}|\partial^\alpha\varphi(x)|,\quad \forall\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega)\tag{4.2.13}$$

证　采用反证法。假设对任意非负整数N，存在一个广义函数f和一个有界区域Ω，以及相应的函数列$\varphi_N\in\mathscr{D}(\Omega)$，使得

$$|\langle f,\varphi_N\rangle|\geqslant N\sum_{|\alpha|\leqslant N}\max_{\Omega}|\partial^\alpha\varphi_N(x)|,\quad N=1,2,\cdots$$

$\forall C_N$，令$\psi_N=C_N\varphi_N$，将其用来替代上式中的φ_N，则显然应该有

$$|\langle f,\psi_N\rangle|\geqslant N\sum_{|\alpha|\leqslant N}\max_{\Omega}|\partial^\alpha\psi_N(x)|,\quad N=1,2,\cdots\tag{4.2.14}$$

选择C_N使得

$$\sum_{|\alpha|\leqslant N}\max_{\Omega}|\partial^\alpha\psi_N(x)|=1/N,\quad N=1,2,\cdots$$

由于$\mathrm{supp}\psi_N$含于同一有界闭区域$\bar{\Omega}$，且函数列$\{\psi_N\}$及其各阶导数在有界闭区域$\bar{\Omega}$上一致收敛于 0。而作为广义函数的f满足$|\langle f,\psi_N\rangle|\to 0(N\to\infty)$。这与式(4.2.14)矛盾。因此式(4.2.13)成立。证毕。

在定理 4.2.8 的帮助下，可以证明关于广义函数的结构定理如下。

定理 4.2.10　$\forall f\in\mathscr{D}'$和有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，存在在$\Omega$上具有紧支集的平方可积函数$g_\alpha$，使得

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha g_\alpha(x),\qquad g_\alpha(x)\in L^2(\Omega),\qquad \mathrm{supp}g_\alpha(x)\subset\Omega$$

证　对有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$中的任一点$x\in\Omega$，取$\mathrm{supp}\varphi$之外的一点$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，由 Schwartz 不等式可知，存在常数$C$使得

$$|\partial^\alpha\varphi(x)|=\left|\int_{a_1}^{x_1}\cdots\int_{a_n}^{x_n}\frac{\partial^n\partial^\alpha\varphi(\xi)}{\partial_{\xi_1}\cdots\partial_{\xi_n}}\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n\right|\leqslant C\left(\int_\Omega|\partial^n\partial^\alpha\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant$$

$$C\left(\sum_{|\alpha|\leqslant N+n}\int_\Omega|\partial^\alpha\psi(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

因此，由定理 4.2.8 可得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\left(\sum_{|\alpha|\leqslant N+n}\int_\Omega|\partial^\alpha\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

由连续线性泛函的 Riesz 定理可得，存在$f_\alpha(x)$满足

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega f_\alpha(x)\partial^\alpha\varphi(x)\mathrm{d}x,\qquad\forall\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega),\qquad m=N+n$$

由广义函数的定义，上式还可以写成

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f_\alpha(x),\varphi(x)\rangle,\qquad\forall\varphi(x)\in\mathscr{D}(\Omega),\qquad m=N+n$$

因此定理成立。证毕。

注意到$g_\alpha(x)$的原函数是连续函数，因此只要将上式中的m换成$m+1$，就可以认为$g_\alpha(x)$是连续函数空间的元素。

利用定理 4.2.10 可以得到全局广义函数的结构。

定理 4.2.11 $\forall f \in \mathscr{D}'$，存在 $g_\alpha(x) \in L^2$ 满足 $\text{supp}g_\alpha(x) \subset \text{supp } f$，使得 $f = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \partial^\alpha g_\alpha(x)$，并且其右端和号中仅有有限项不为零。

证 在 $\mathbf{R}^n$ 中取定局部有限的有界开覆盖 $\{G_j\}$，则由定理 4.2.10 知，对每一个 G_j，存在 $m=m(j)$ 及函数 $\{f_{\alpha(j)}(x), |\alpha(j)| \leqslant m(j)\}$，$\alpha(j)$ 为多重指标且 $\text{supp}f_{\alpha(j)}(x) \subset G_j$，使得 $\langle f,\varphi\rangle = \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} \langle f_{\alpha(j)}, \partial^{\alpha(j)}\varphi\rangle$，$\forall \varphi \in \mathscr{D}$。而由单位分解定理知，存在关于有界开覆盖 $\{G_j\}$ 的单位分解 $\{\psi_j\}$，使得 $\forall \varphi \in \mathscr{D}$，$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varphi$。因此

$$
\begin{aligned}
\langle f,\varphi\rangle &= \sum_j \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} \langle f_{\alpha(j)}, \partial^{\alpha(j)}(\psi_j\varphi)\rangle = \\
&\sum_j \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} \langle \sum_{\beta(j)\leqslant\alpha(j)} \binom{\alpha(j)}{\beta(j)} f_{\alpha(j)} \partial^{\alpha(j)-\beta(j)} \psi_j, \partial^{\beta(j)}\varphi\rangle = \\
&\sum_j \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} \langle \sum_{\beta(j)\leqslant\alpha(j)} (-1)^{|\beta(j)|} \binom{\alpha(j)}{\beta(j)} \partial^{\beta(j)} (f_{\alpha(j)} \partial^{\alpha(j)-\beta(j)} \psi_j), \varphi\rangle = \\
&\langle \sum_j \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} \sum_{\beta(j)\leqslant\alpha(j)} (-1)^{|\beta(j)|} \binom{\alpha(j)}{\beta(j)} \partial^{\beta(j)} (f_{\alpha(j)} \partial^{\alpha(j)-\beta(j)} \psi_j), \varphi\rangle
\end{aligned}
$$

式中 $\beta(j)$ 为多重指标。令 $g_{j\beta(j)} = \sum_{|\alpha(j)|\leqslant m(j)} (-1)^{|\beta(j)|} \binom{\alpha(j)}{\beta(j)} f_{\alpha(j)} \partial^{\alpha(j)-\beta(j)} \psi_j$，$g_{\beta(j)} = \sum_j{}' g_{j\beta(j)}$，则

$$
\langle f,\varphi\rangle = \sum_j \sum_{\beta(j)\leqslant\alpha(j)} \langle \partial^{\beta(j)} g_{j\beta(j)}, \varphi\rangle = \sum_k \langle \partial^{\beta(j)} g_{\beta(j)}, \varphi\rangle
$$

由于 $\text{supp}g_{j\beta(j)} \subset G_j$，因此 $g_{\beta(j)} = \sum_j g_{j\beta(j)}$ 中只有有限项不为零，并且随着 $|\beta(j)|$ 的增大，$\text{supp}g_{\beta(j)}$ 与原点的距离无限增大，故该定理成立。证毕。

缓增广义函数的结构与具有紧支集的广义函数的结构相比，具有更简单的形式。但其证明需要更多的基础，这里从略。

4.2.4 线性偏微分方程的基本解

从 4.1 节知道，以 u 为未知函数，x 为自变量的偏微分方程的常系数线性偏微分方程一般可以表示为

$$
P(\mathrm{D})u = \sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha u = f(x) \tag{4.2.15}
$$

其中 a_α 是与 α 有关的常数。下面将利用广义函数理论讨论该方程的解。

对于线性偏微分方程(4.2.15)，若设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数 $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ 使式(4.2.15)在 Ω 上恒等，则 u 是式(4.2.15)在 Ω 中的一个经典解。然而，为了讨论涉及广义函数的偏微分方程(4.2.15)，需要将解的定义推广到广义函数。为此给出如下定义。

定义 4.2.7 若广义函数 u 使得

$$
\sum_{|\alpha|\leqslant k} (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha (a_\alpha \psi)\rangle = \langle f,\psi\rangle, \qquad \forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega)
$$

则称 u 是式(4.2.15)的**广义函数解(分布解)**或**弱解**。

可利用基本解的方法研究方程(4.2.15)的弱解。该方法牵涉所谓的基本解。

定义 4.2.8 若存在广义函数 $E\in\mathscr{D}'$ 使得

$$P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})E=\delta(\boldsymbol{x}) \tag{4.2.16}$$

则称 E 是算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})$ 的**基本解**。

很容易从算子 $P(\mathrm{D})$ 的基本解求出方程的解。实际上,若从式(4.2.16)得到了基本解 E,那么

$$P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})(E*f)=(P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})E)*f=\delta*f=f \tag{4.2.17}$$

所以 $u=E*f$ 是方程(4.2.15)的一个广义函数解。

对一般的偏微分方程来说,求其基本解并不容易。但对常系数偏微分算子能够证明其基本解的存在性。

定理 4.2.12 常系数偏微分算子 $P(\mathrm{D})$ 必有基本解。

证 对式(4.2.16)两边作 Fourier 变换得 $P(\xi)\mathscr{F}(E)(\xi)=1$。式中,$P(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha\xi^\alpha$。若 $P(\xi)$ 无实的零点,则 $\mathscr{F}(E)(\xi)$ 就是 $1/P(\xi)$ 的 Fourier 逆变换。若 $P(\xi)$ 有实的零点,则应作如下处理:注意到 $P(\xi)$ 是整函数,用坐标旋转能设向量 ξ 使得 $P(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha\xi^\alpha$ 是非零的。不妨设

$$P(\xi)=\xi_n^k+\xi_n \text{ 的低阶项} \tag{4.2.18}$$

其中,$\xi=(\xi',\xi_n)$,$\xi'=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1})\in\mathbf{R}^{n-1}$。现在固定点 ξ',$P(\xi)$ 可看作变量 ξ_n 的多项.因此可设 $\lambda_1(\xi'),\cdots,\lambda_k(\xi')$ 是它的零点,并按当 $i\leqslant j$ 时,$\mathrm{Im}\lambda_i(\xi')\leqslant\mathrm{Im}\lambda_j(\xi')$,而当 $\mathrm{Im}\lambda_i(\xi')=\mathrm{Im}\lambda_j(\xi')$ 时,按 $\mathrm{Re}\lambda_i(\xi')\leqslant\mathrm{Re}\lambda_j(\xi')$ 的规则排列这组根。这组根连续依赖于方程的系数,且 $\mathrm{Im}\lambda_i(\xi')$ 是 ξ' 的连续函数。

下面在 $\mathbf{C}^n$ 空间上找一路径,使 ξ 在这条路径上取值时 $P(\xi)>0$。为此,在 ξ_n 平面上把宽度为 $4(k+1)$ 的带域均分为宽度为 4 的 $k+1$ 个子带。对固定的 ξ',由于 $P(\xi)$ 关于 ξ_n 只有 k 个零点,因此在这 $k+1$ 个子带中至少有一个子带不含零点。取该子带的中线记为 $\boldsymbol{\beta}(\xi')$,则 $\boldsymbol{\beta}(\xi')$ 与任何零点的距离必大于 1。从而由式(4.2.18)知,在 $\boldsymbol{\beta}(\xi')$ 上,$P(\xi)>1$。因此,由 $\lambda_j(\xi')$,$j=1,\cdots,k$ 关于 ξ' 的连续性知,在固定点 ξ' 的充分小邻域内,不等式 $P(\xi)>1$ 保持成立。

以上分析表明,在 $\mathrm{Im}\xi_n=\boldsymbol{\beta}(\xi')$ 上,函数 $P^{-1}(\xi)$ 有定义。记 $\widetilde{P}(\xi)=P(\xi)(1+|\xi|^2)^N$,则当 $N>n/2$ 时

$$E_N(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathrm{Im}\xi_n=\boldsymbol{\beta}(\xi')}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}[\widetilde{P}(\xi)]^{-1}\mathrm{d}\xi_n\mathrm{d}\xi'$$

为 $\widetilde{P}(\mathrm{D})$ 的基本解。因此,

$$\widetilde{P}(\mathrm{D})E_N=P(\mathrm{D})(1-\Delta)^N E_N=\delta$$

式中,Δ 为 Laplace 算子,$\Delta\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$。令 $E(\boldsymbol{x})=(1-\Delta)^N E_N(\boldsymbol{x})$,则有

$$P(\mathrm{D})E(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x})$$

因此,$E(\boldsymbol{x})$ 为 $P(\mathrm{D})$ 的基本解。证毕。

下面借助基本解的方法求解一些数学物理方程问题的解。

例 4.2.9 求热传导算子 $\partial/\partial t-a^2\Delta_x$ 的基本解。其中,$a>0$ 为常数,Δ_x 为关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Laplace 算子,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$。

解 设算子 $\partial/\partial t-a^2\Delta_x$ 的基本解为 E_1,则广义函数 E_1 应满足方程

$$\partial E_1/\partial t - a^2\Delta_x E_1 = \delta(t,\boldsymbol{x}) \tag{4.2.19}$$

按照基本解的求法，在上式两端关于 $\boldsymbol{x}$ 作 Fourier 变换，得 $\partial\hat{E}_1/\partial t + a^2 \mid \xi \mid^2 \hat{E}_1 = \delta(t)$。此式左端乘以 $e^{a^2|\xi|^2 t}$ 后为$\partial(\hat{E}_1 e^{a^2|\xi|^2 t})/\partial t$，右端乘以 $e^{a^2|\xi|^2 t}$ 后仍为$\delta(t)$。Heaviside 函数 $H(t)$有 $H'(t)=\delta$，因此可令 $\hat{E}e^{a^2|\xi|^2 t}=H(t)$，即 $\hat{E}(\xi,t)=H(t)e^{-a^2|\xi|^2 t}$。这是关于 ξ 的缓增广义函数，因此

$$E_1(\boldsymbol{x},t) = (4a^2\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2 t}\right)H(t)$$

这就是式(4.2.19)中定义的基本解。由此可表示出热传导方程$(\partial/\partial t - a^2\Delta_x)u = f(\boldsymbol{x})$的通解 $u = E_1 * f$。

例 4.2.10 求初值问题

$$\begin{cases}\partial E_2/\partial t - a^2\Delta_x E_2 = 0\\ E_2 \mid_{T=0} = \delta(\boldsymbol{x})\end{cases} \tag{4.2.20}$$

的基本解 $E_2(\boldsymbol{x})$，式中 $a>0$ 为常数，Δ_x 为关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Laplace 算子。

解 广义函数 E_2 为方程(4.2.20)对应的算子的基本解。为了求解 E_2，将关于 $\boldsymbol{x}$ 的 Fourier 变换应用于方程(4.2.20)的两边，得

$$\begin{cases}\partial\hat{E}_2/\partial t + a^2 \mid \xi \mid^2 \hat{E}_2 = 0\\ \hat{E}_2 \mid_{t=0} = 1\end{cases}$$

其解为 $\hat{E}_2(\xi,t)=e^{-a^2|\xi|^2 t}$，因此

$$E_2(\boldsymbol{x},t) = (4a^2\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4a^2 t}\right)$$

这就是方程(4.2.20)的基本解。由此基本解可以求得方程

$$\begin{cases}\partial u/\partial t - a^2\Delta_x u = 0\\ u \mid_{t=0} = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \varphi(\boldsymbol{x}) \in C^2(\mathbf{R}^n)\end{cases}$$

的通解为 $E_2 * \varphi$。

例 4.2.11 求 Laplace 算子 Δ 的基本解 $\Gamma(\boldsymbol{x})$。

解 按照定义，Laplace 算子的基本解 $\Gamma(\boldsymbol{x})$满足 $\Delta\Gamma(\boldsymbol{x})=\delta(\boldsymbol{x})$。然而 Laplace 算子和 $\delta(\boldsymbol{x})$都关于各个自变量是对称的，因此基本解 $\Gamma(\boldsymbol{x})$仅仅与 $r=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$有关，即令 $\Gamma(\boldsymbol{x})=\Gamma(r)$。因此，Laplace 算子 Δ 在球坐标下使得

$$\Delta\Gamma = \frac{d\Gamma}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\Gamma}{dr} = \delta(r)$$

在该方程两边各乘以 r^{n-1}，则得到

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d\Gamma}{dr}\right) = r^{n-1}\delta(r) = 0$$

求解该常微分方程即可得到基本解

$$\Gamma(r) = \begin{cases}C_1 r^{2-n} + C_2, & n>2\\ \overline{C}_1 \ln\dfrac{1}{r} + \overline{C}_2, & n=2\end{cases}$$

式中，$C_1, C_2, \overline{C}_1, \overline{C}_2$ 为积分常数。

一般所说的 Laplace 算子的基本解是所述积分常数按如下形式所取的函数

$$\Gamma(r)=\begin{cases}[(2-n)\omega_n]^{-1}r^{2-n}, & n>2\\ (2\pi)^{-1}\ln\dfrac{1}{r}, & n=2\end{cases} \tag{4.2.21}$$

式中，$\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$是 n 维单位球面面积，$\Gamma(\cdot)$为 Γ 函数。

4.3 Sobolev 空间理论

用泛函分析方法讨论偏微分方程时，需要用到刻画其解的光滑性的 Sobolev 空间理论。本节介绍 Sobolev 空间的结构和 Sobolev 空间之间的嵌入定理。

4.3.1 整指数 Sobolev 空间

定义 4.3.1 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，m 为非负整数。记所有直到 m 阶导数$\partial^{\alpha}u(|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m)$均属于 $L^p(\Omega)(1\leqslant p\leqslant+\infty)$的广义函数 u 组成的集合为 $W^{m,p}(\Omega)$。装备了范数

$$\|u\|_{m,p,\Omega}=\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left(\int\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\mathrm{D}^{\alpha}u|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{4.3.1}$$

的 $W^{m,p}(\Omega)$空间，称为**整指数 Sobolev 空间**。而记 $W^{m,p}(\Omega)$的一个子空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$为 $C_0^{\infty}(\Omega)$在 $W^{m,p}(\Omega)$内的闭包。

可以证明，对任何 $m\geqslant 0$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，$W^{m,p}(\Omega)$和 $W_0^{m,p}(\Omega)$都是 Banach 空间，而且当 $1\leqslant p<+\infty$时，$W^{m,p}(\Omega)$和 $W_0^{m,p}(\Omega)$还都是可分自反的 Banach 空间。特别地，当 $m=0$ 和 $1\leqslant p\leqslant+\infty$时，$W^{0,p}(\Omega)=W^{0,p}(\Omega)=L(\Omega)$。但一般情况下，$W_0^{m,p}(\Omega)$是 $W^{m,p}(\Omega)$的真子空间。另外，还可以证明，范数(4.3.1)等价于以下范数

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\mathrm{D}^{\alpha}u\|_p$$

其中，$\|\cdot\|_p$ 表示 L^p 空间的范数。此外，当 $p=2$ 时，$W^{m,2}(\Omega)$和 $W_0^{m,2}(\Omega)$为 Hilbert 空间，通常记为 $H^m(\Omega)$和 $H_0^m(\Omega)$，其内积定义为 $(u,v)_m=\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}u\mathrm{D}^{\alpha}v\mathrm{d}x$。以后也将 $H^m(\mathbf{R}^n)$和 $H_0^m(\mathbf{R}^n)$分别简记为 H^m和 H_0^m。

设 m 为非负整数，$1/p+1/q=1(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，记 $W^{-m,q}(\Omega)$为 Banach 空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间。由于 $W_0^{m,p}(\Omega)$为以 $C_0^{\infty}(\Omega)$作为子空间的广义函数空间，因此 $W_0^{m,p}(\Omega)$的对偶空间 $W^{-m,q}(\Omega)$应为 $\mathscr{D}'(\Omega)$的子空间。其结构可以由以下定理给出。

定理 4.3.1 设 m 为非负整数，$1/p+1/q=1(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则 $W^{-m,q}(\Omega)$与由所有形如

$$T=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}f_{\alpha} \tag{4.3.2}$$

这样的广义函数 T 所组成的空间是一致的，其中 $f_{\alpha}\in L^q(\Omega)$。

证 首先证明 $T\in W^{-m,q}(\Omega)$。设 T 为式(4.3.2)中定义的广义函数，则$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$有$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\langle f_{\alpha},\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\rangle$。因 $f_{\alpha}\in L^q(\Omega)$，由 Hölder 不等式知，存在常数 $C>0$，使得$|\langle T,\varphi\rangle|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|f_{\alpha}\|_{L^q}\|\mathrm{D}^{\alpha}\varphi\|_{L^p}\leqslant C\|\varphi\|_{m,p,\Omega}$，由此可知，$T$ 为 $C_0^{\infty}(\Omega)$上的有界线性泛函，而 $C_0^{\infty}(\Omega)$为 $W_0^{m,p}(\Omega)$的稠密子空间，因此 T 为 $W_0^{m,p}(\Omega)$上的连续线性泛函，即$T\in W^{-m,q}(\Omega)$。

然后证明若 $T\in W^{-m,q}(\Omega)$，则 T 具有式(4.3.2)的形式。为此，记 $N=|\boldsymbol{\alpha}|$，且记 $(L^p(\Omega))^N=(L^p(\Omega))\times\cdots\times(L^p(\Omega))$ 为 $L^p(\Omega)$ 的 N 重积，并装备乘积拓扑。定义映射 $I:W^{m,p}(\Omega)\to(L^p(\Omega))^N$ 使得 $\forall\psi\in W^{m,p}(\Omega)$，$I(\psi)=\sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}\psi\in(L^p(\Omega))^N$。由映射 I 的定义知，空间 $I(W^{m,p}(\Omega))$ 上可定义线性泛函，因此 T 也为 $I(W^{m,p}(\Omega))$ 上的连续线性泛函。由 Hahn-Banach 泛函延拓定理知，T 可以延拓到空间 $(L^p(\Omega))^N$ 上。因此有 $f_{\alpha}\in L^q(\Omega)$，$|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$，使得 $\forall\psi\in W_0^{m,p}(\Omega)$，$\langle T,\psi\rangle=\sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\int_{\Omega}f_{\alpha}\mathrm{D}^{\alpha}\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\langle\sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}f_{\alpha},\psi\rangle$。此即是说 T 可以写成 $T=\sum\limits_{|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m}\mathrm{D}^{\alpha}f_{\alpha}$ 的形式。证毕。

由定义知，$W_0^{m,p}(\Omega)$ 为 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包，即为 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在范数(4.3.1)下的完备化。而 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 与 $W^{m,p}(\Omega)$ 之间存在下面的关系。

定理 4.3.2 当 $1\leqslant p<+\infty$ 时，$C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 为 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的稠密子空间。

证 由 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的定义知，$W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n)$，因此对具有紧支集的 $\forall f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，可以定义函数

$$\boldsymbol{\beta}_{\epsilon}=J_{\epsilon}f=f*j_{\epsilon}$$

其中，J_{ϵ} 为式(4.2.2)的光滑化算子。由定理 4.2.1 知，$\boldsymbol{\beta}_{\epsilon}\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$。而由卷积的性质知，当 $\epsilon\to0$ 时，$\forall|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$，$\|\mathrm{D}^{\alpha}\beta_{\epsilon}-\mathrm{D}^{\alpha}f\|_{L^p}\to0$，因此，$\forall f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，$\|\beta_{\epsilon}-f\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\to0$。

另一方面，设 $\{\varphi_k(\boldsymbol{x})\}$ 为 $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 空间上的一列函数，使得在球 $B(0,k)$(以 0 为球心，k 为半径的球，下同)上每个 φ_k 都等于 1，而在 $B(0,k+1)$ 外每个 φ_k 都等于 0。对 $f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，令 $f_k\in\varphi_k f$，$k=1,2,\cdots$，则 $f_k(\boldsymbol{x})\in L^p(\mathbf{R}^n)$，且对任意 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $\mathrm{D}_jf_k=\varphi_k(\mathrm{D}_jf_k)+(\mathrm{D}_j\varphi_k)f$。由于 $\mathrm{D}_jf\in L^p$，于是在 L^p 中 $\varphi_k\mathrm{D}_jf\to\mathrm{D}_jf$。又因 $f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)\subset L^p(\mathbf{R}^n)$，$\mathrm{D}_j\varphi_kf\in L^p$，并且在 L^p 中 $\mathrm{D}_j\varphi_kf\to0(k\to+\infty)$，即 $\|\mathrm{D}_jf_k-\mathrm{D}_jf\|_{L^p}\leqslant\|\varphi_k(\mathrm{D}_jf)-\mathrm{D}_jf\|_{L^p}+\|\mathrm{D}_j\varphi_kf\|_{L^p}$。该式右端当 $k\to\infty$ 时收敛到 0。再由 j 的任意性，利用归纳法可知，对任意 $\boldsymbol{\alpha}$，在 L^p 内 $\mathrm{D}^{\alpha}f_k\to\mathrm{D}^{\alpha}f(k\to\infty)$。

由以上两方面的讨论知，$\forall f\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，存在 $\boldsymbol{\beta}_{\epsilon}\in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$，使得 $\boldsymbol{\beta}_{\epsilon}\to f(W^{m,p}(\mathbf{R}^n))$。因此，$C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ 为 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 的稠密子空间。证毕。

有时，以下定义的 Sobolev 空间使用起来会更方便：设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，对任意有界开集 Ω'，$\Omega'\subset\Omega$，所有属于 $W^{m,p}(\Omega')$ 的广义函数 u 组成的集合 $W_{\mathrm{loc}}^{m,p}(\Omega)$，称为**局部 Sobolev 空间**。这里对其不作进一步的介绍，有兴趣的读者可以参考本章所附的参考文献。

4.3.2 实指数 Sobolev 空间

众所周知，L^2 空间是 Hilbert 空间，且是 Fourier 变换的自同态空间。相应于 L^2 空间的 Sobolev 空间 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 也具有这些性质。这些性质使其在研究中得以广泛应用。以下就集中讨论 $p=2$ 的 Sobolev 空间。

由 $H^m(\mathbf{R}^n)$ 的定义和 Fourier 变换的性质，$f\in H^m(\mathbf{R}^n)$ 既等价于 $\mathrm{D}^{\alpha}f\in L^2(\mathbf{R}^n)\ \forall|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$，也等价于 $\forall|\boldsymbol{\alpha}|\leqslant m$，$\xi\in\mathbf{R}^n$，$\xi^{\alpha}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$。而后一条件又等价于 $(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$。推广这一等价表示可定义实指数 Sobolev 空间。

定义 4.3.2 设 s 为任意实数，记 $H^s(\mathbf{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'\mid(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\}$，则称具

有内积

$$(f,g)_s = \int_{\mathbf{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{4.3.3}$$

以及该内积所导出的范数 $\|f\|_s = \left[\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right]^{1/2}$ 的 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 为**实指数 Sobolev 空间**。并记 $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)=\bigcup_s H^s(\mathbf{R}^n)$，以及 $H^{\infty}(\mathbf{R}^n)=\bigcap_s H^s(\mathbf{R}^n)$。另外，$H^s(\mathbf{R}^n)$有时也被简记为 H^s。显然，对每个实数 s，$H^s(\mathbf{R}^n)$是 Hilbert 空间，且有如下定理。

定理 4.3.3 对任意实数 s，$\mathscr{S}$在 $H^s(\mathbf{R}^n)$中稠密。

证 设 $f\in H^s(\mathbf{R}^n)$，因 $\mathscr{S}$在 L^2 中稠密，因此有 $\varphi_j\in\mathscr{S}$使得 $\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)-\varphi_j\|_{L^2}\to 0(j\to\infty)$。记 $\varphi_j(x)=\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}\varphi_j(\xi)]$，则 $\varphi_j(x)\in\mathscr{S}$且 $\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)-(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}_j(\xi)\|_{L^2}\to 0$，即在 $H^s(\mathbf{R}^n)$中 $\varphi_j\to f$。因此，$\mathscr{S}$在 $H^s(\mathbf{R}^n)$中稠密。证毕。

Banach 空间到 Banach 空间的线性一一映射，称为**嵌入**。由定义 4.3.4 知，$\forall s,t,s\geqslant t$，有 $H^s\hookrightarrow H^t$，(其中$\hookrightarrow$表示 $H^s\hookrightarrow H^t$ 的嵌入是连续的)且有 $H^s\subset\mathscr{S}'$。由于$C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$是 $\mathscr{S}$的稠密子空间，因此 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$在 $H^s(\mathbf{R}^n)$中稠密，即 $H^s(\mathbf{R}^n)$可以定义为 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$关于范数(4.3.3)的完备化空间。

定理 4.3.4 对任意实数 s，$H^s(\mathbf{R}^n)$的对偶空间与 $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$相同。

证 首先证明 $H^s(\mathbf{R}^n)$上的连续线性泛函属于 $H^{-s}(\mathbf{R}^n)$。为此，设 f 是 $H^s(\mathbf{R}^n)$上的连续线性泛函，则存在常数 $C>0$，使得 $\forall\varphi\in\mathscr{S}$，只要 $\|\varphi\|_s\leqslant 1$，则$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C$。

由 Fourier 变换的性质知，上式等价于 $|\langle\hat{f},\hat{\varphi}\rangle|\leqslant C,\forall\varphi\in\mathscr{S},\|\varphi\|_s\leqslant 1$ 设 $\hat{\varphi}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\xi)$。代入上式得

$$|\langle\hat{f},\hat{\psi}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\rangle|\leqslant C,\qquad \forall\psi\in\mathscr{S}\text{且 }\|\psi\|_{L^2}\leqslant 1$$

由此可知$(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{f}(\xi)\in L^2$，即 $f\in H^{-s}$。

其次，证明 $\forall f\in H^{-s}$ 是 H^s 的有界线性泛函。事实上，若 $f\in H^{-s}$，则对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$有 $\langle f,\varphi\rangle=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-s/2}f(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$。由 Hölder 不等式可知，$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\|f\|_{-s}\|\varphi\|_s$。因此，$f$ 属于 H^s 的对偶空间。证毕。

定理 4.3.5 设 m 为非负整数，则 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$是由

$$f=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathrm{D}^\alpha g_\alpha,\qquad \forall g_\alpha\in L^2(\mathbf{R}^n) \tag{4.3.4}$$

所定义的全体 f 组成的空间。

证 首先证明 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$ 的元素均有式(4.3.4) 的形式。为此，设 $f\in H^{-m}(\mathbf{R}^n)$，由 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$ 的定义知，$(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$。对此函数作 Fourier 变换，则 $g(x)=\mathscr{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)(1+|\xi_1|^m+\cdots+|\xi_n|^m)^{-1}]\in L^2(\mathbf{R}^n)$。由此可得 $\hat{f}(\xi)=\hat{g}(\xi)+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^m\hat{g}(\xi)$。令 $g_j(x)=\mathscr{F}^{-1}[|\xi_j|/\xi_j]\in L^2(\mathbf{R}^n)$，由 Fourier 变换的性质知，$f(x)=g(x)+\sum_{j=1}^n\mathrm{D}_j^m g_j(x)$。

其次证明式(4.3.4)中的 $f\in H^{-m}(\mathbf{R}^n)$。为此，在式(4.3.4)两边分别作 Fourier 变换，则

得到 $\hat{f}(\xi)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}\xi^{\alpha}\hat{g}_{\alpha}(\xi)$，因此有

$$|(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{f}(\xi)|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{(1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}|\hat{g}_{\alpha}(\xi)|$$

而 $\hat{g}_{\alpha}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)$，从而由上式可知 $(1+|\xi|^2)^{-m/2}\hat{f}(\xi)\in L^2$，此即 $f\in H^{-m}(\mathbf{R}^n)$。证毕。

这一定理给出了 $\Omega\in\mathbf{R}^n$ 以及 $p=2$ 时，$H^{-m}(\mathbf{R}^n)$的详细结构。对 $H^{-m}(\mathbf{R}^n)$来说，该定理比定理 4.3.1 更深入地揭示了其结构。

例 4.3.1 $\forall s<-n/2$，有 $\delta(x)\in H^s(\mathbf{R}^n)$，且在 $H^s(\mathbf{R}^n)$中 $j_\varepsilon(x)$收敛于 $\delta(x)$。

事实上，因为 $\hat{\delta}(x)=1$，所以当 $s<-n/2$ 时，$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\delta}=(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(\mathbf{R}^n)$，故 $\delta(x)\in H^s(\mathbf{R}^n)$。而由 $j_\varepsilon(x)$定义知

$$\hat{j}_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\xi}j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx=\int_{\mathbf{R}^n}e^{-iy\varepsilon\xi}j(y)dy$$

因此，对每一点 ξ，令 $\varepsilon\to0$，则有 $\hat{j}_\varepsilon(x)\to1$，而当 $s<-n/2$ 时，由 Berger 控制定理知

$$\|j_\varepsilon-\delta\|_s^2=\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{j}(\varepsilon\xi)-1|^2d\xi\to0\qquad(\varepsilon\to0)$$

即当 $s<-n/2$ 时，在 $H^s(\mathbf{R}^n)$内 j_ε 收敛于 $\delta(x)$。

从例 4.3.1 还可以知道：若 m 是使得 $-m<-n/2$ 的正整数，则由定理 4.3.1 可知，δ 可以表示为 $L^2(\mathbf{R}^n)$中有限个函数的导数(导数阶$\leqslant m$)之和。

在 $H^s(\mathbf{R}^n)$内还可以定义乘积和卷积运算，在讨论这些运算之前，我们证明如下引理。

引理 对 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 上的可测函数 $K(x,y)$，若存在数 $C>0$ 使 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|dy\leqslant C,\quad\int_{\mathbf{R}^n}|K(x,y)|dx\leqslant C$$

则对 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$，

$$A:f=\int_{\mathbf{R}^n}K(x,y)f(y)dy$$

定义了从 L^p 到 L^p 的连续线性泛函。

利用上述引理可以证明如下定理。

定理 4.3.6 若 $\varphi\in\mathscr{S}$，$f\in H^s$，则 $\varphi\cdot f\in H^s$，且双线性映射 $A:(\varphi,f)\to\varphi\cdot f$ 是映 $\mathscr{S}\times H^s(\mathbf{R}^n)$到 H^s 的连续线性映射。

证 首先证明 $\varphi\cdot f\in H^s$。由卷积和 Fourier 变换的性质，有

$$\mathscr{F}(\varphi\cdot f)(\boldsymbol{\xi})=(2\pi)^{-n}(\hat{\varphi}*\hat{f})(\boldsymbol{\xi})=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat{f}(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}$$

将上式两边同乘以$(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}$后可以得到

$$(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}\mathscr{F}(\varphi\cdot f)(\boldsymbol{\xi})=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}\hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\hat{f}(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}=$$

$$(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}K(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})(1+|\boldsymbol{\eta}|^2)^{s/2}\hat{f}(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta}\qquad(4.3.5)$$

式中，$K(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{s/2}(1+|\boldsymbol{\eta}|^2)^{-s/2}\varphi(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})$。注意到 $\forall\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n$ 和 $s\in\mathbf{R}$，成立 Peetre 不等式

$$(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^{-s}\leqslant 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}$$

由此公式，可以从式(4.3.5)导出

$$|K(\xi,\eta)|\leqslant 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|/2}\,|\hat\varphi(\xi-\eta)|$$

再注意到 $\varphi\in\mathscr{S}$，因而 $(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s|/2)+n}|\hat\varphi(\xi-\eta)|$ 有界，因此存在 $C>0$，使得

$$|K(\xi,\eta)|\leqslant 2^{|s|/2}(1+|\xi-\eta|^2)^{(|s|/2)+n}\,|\hat\varphi(\xi-\eta)|\,(1+|\xi-\eta|^2)^{-n}\leqslant C(1+|\xi-\eta|^2)^{-n} \tag{4.3.6}$$

再由引理知 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}(\varphi\cdot f)(\xi)$ 为 L^2 到 L^2 的连续线性泛函，从而 $\varphi\cdot f\in H^s$。

然后证明映射 A 的连续性。由式(4.3.5)和式(4.3.6)知，存在常数 C 使得 $\|\varphi\cdot f\|_s\leqslant C\|f\|_s$，即 $A:(\varphi,f)\to\varphi\cdot f$ 关于 $f\in H^s$ 是连续的。而对 $\mathscr{S}$ 中收敛到 0 的函数列 $\{\varphi_j\}$，由式(4.3.6)和引理知

$$\|\varphi_j\cdot f\|_s=\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathscr{F}(\varphi_j\cdot f)(\xi)\|_{L^2}\leqslant CC_j\|f\|_s$$

其中，$C_j=\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^{|s|/2+n}|\hat\varphi_j(\xi)|$。由于 $\varphi_j\to 0$，于是 $C_j\to 0$，因此上式右端收敛到零，即乘积 $\varphi\cdot f$ 关于 $\varphi\in\mathscr{S}$ 是连续的。证毕。

例 4.3.2　系数为 $\mathscr{S}$ 中的函数的偏微分算子 $P(x,\mathrm{D})=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha$ 是 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ 的连续线性算子(s 是任意实数)。

事实上，按照 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 的定义，偏微分算子 D^α 是 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^{s-|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$ 的连续线性算子。又因为 $a_\alpha(x)\in\mathscr{S}$，因此由定理 4.3.6 知 $a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha\in H^{s-|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$，所以 $P(x,D)$ 为 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 到 $H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$ 的连续线性算子。

关于 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中的卷积运算，有如下定理。

定理 4.3.7　若 $\varphi\in\mathscr{S}$，$f\in H^s$，则 $\varphi*f\in H^s$，且双线性映射 $A:(\varphi,f)\to\varphi*f$ 是映 $\mathscr{S}\times H^s(\mathbf{R}^n)$ 到 H^s 的连续线性映射，并且 $\varphi*f\in H^\infty$。

证　对 $\varphi\in\mathscr{S}$，$f\in H^s$，容易证明 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat f(\xi)\in L^2$，而且 $\hat\varphi\in\mathscr{S}$，因此 $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat f(\xi)\hat\varphi(\xi)\in L^2$，于是 $\varphi*f\in H^s$。又由于

$$\|\varphi*f\|_s=\left[\int_{\mathbf{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\,|\hat\varphi\cdot\hat f|^2\mathrm{d}\xi\right]^{1/2}\leqslant\sup_{\xi\in\mathbf{R}^n}|\hat\varphi(\xi)|\cdot\|f\|_s$$

而 $\hat\varphi\in\mathscr{S}$ 保证 $\sup\limits_{\xi\in\mathbf{R}^n}|\hat\varphi(\xi)|$ 有界，所以 $\varphi*f$ 关于每个变量连续。

另外，从 $\varphi\in\mathscr{S}$ 可推出对任意整数 k，$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat\varphi(\xi)\in\mathscr{S}$。由此可知 $(1+|\xi|^2)^{(s+k)/2}\hat f(\xi)\hat\varphi(\xi)\in L^2$，由 k 的任意性知 $\varphi*f\in H^\infty$。证毕。

4.3.3　嵌入定理

本节讨论 Sobolev 空间中逐点性质与整体性质之间的联系，并证明 Sobolev 不等式。

定理 4.3.8　对整指数 Sobolev 空间 $W_0^{m,p}(\Omega)$，有

$$W_0^{m,p}\hookrightarrow\begin{cases}L^{mp(n-mp)}(\Omega), & mp<n\\ C^{k,\lambda}(\bar\Omega), & mp>n\end{cases}$$

式中，$k=[m-n/p]$，$\lambda=m-n/p-[m-n/p]$，且对 $f\in W_0^{m,p}$，存在常数 $C>0$，使得

$$\|f\|_{L^{mp/(n-mp)}}\leqslant C\|f\|_{m,p,\Omega},\qquad mp<n \tag{4.3.7}$$

$$\sup_\Omega|\mathrm{D}^\alpha f|\leqslant C(\Omega,\alpha,n)\|f\|_{m,p,\Omega},\qquad mp>n \tag{4.3.8}$$

其中，$C(\Omega,\boldsymbol{\alpha},n)$为与$(\Omega,\boldsymbol{\alpha},n)$有关的常数。

证 不失一般性，证明 $m=1$ 的情形。先对函数 $f\in C_0^\infty(\Omega)$证明式(4.3.7)在 $m=1$ 时成立。显然 $\forall i, 1\leqslant i\leqslant n$ 均有 $|f(x)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|D_i f|\,dx_i$。因此，$|f|^{n/(n-1)}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}|D_i f|\,dx_i\right)^{1/(n-1)}$。在此不等式两边对 x 积分，并利用 $n-1$ 个因子的 Hölder 不等式可得

$$\|f\|_{L^{n/(n-1)}}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_\Omega|D_i f|\,dx\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|D_i f|\,dx\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\|Df\|_{L^1}\quad(4.3.9)$$

其中第二个不等式是由于几何平均值不超过算术平均值；右端的不等式是由于$|Df|=(|D_1f|^2+\cdots+|D_nf|^2)^{1/2}$。式(4.3.9)是式(4.3.7)当 $m=p=1$ 时的形式。为了证明式(4.3.7)当 $m=1,1\leqslant p\leqslant n$ 时的形式，利用$|f|^\nu$代替式(4.3.9)中的 f，其中 $\nu=(n-1)p/(n-p)$，由 Hölder 不等式可得

$$\|f\|_{L^{n/(n-p)}}\leqslant\||f|^\nu\|_{L^{n/(n-1)}}\leqslant\frac{\nu}{\sqrt{n}}\int_\Omega|f|^{\nu-1}|Df|\,dx\leqslant\frac{\nu}{\sqrt{n}}\|Df\|_p\leqslant C\|f\|_{1,p;\Omega}$$

这证明了(4.3.7)。

为了证明式(4.3.8)，对 $m=1,p>n$，设 Ω_ρ 为边平行于坐标轴且边长为 $\rho>0$ 并含有原点的立方体，因此当 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$时

$$|f(\boldsymbol{x})-f(0)|\leqslant\sqrt{n}\,\rho\int_0^1|Df(t\boldsymbol{x})|\,dt,\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega_\rho$$

在上式两边取 Ω_ρ 上的积分，并对所得公式右端使用 Hölder 不等式得

$$\left|\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}-f(0)\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\rho^{n-1}}\int_0^1dt\int_{\Omega_\rho}|Df(t\boldsymbol{x})|\,d\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\frac{\sqrt{n}}{\rho^{n-1}}\int_0^1\frac{1}{t^n}\|Df\|_{L^p}(t\rho)^{n(1-\frac{1}{p})}dt\leqslant$$

$$\frac{\sqrt{n}}{p-n}p\rho^{(1-n/p)}\|Df\|_{L^p}\qquad(4.3.10)$$

对$\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}\in\Omega$，令 $\rho=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，总有边长为 2ρ 的边平行于坐标轴的立方体 $\Omega_{2\rho}$，使得 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega_{2\rho}$。由式(4.3.10)知

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant\frac{2\sqrt{n}}{p-n}p(2\rho^{(1-n/p)}\|Df\|_{L^p})\qquad(4.3.11)$$

设 $g\in W_0^{1,p}(\Omega)$，取 $g_j\in C_0^\infty(\Omega)$满足 $\|g_j-g\|_{1,p;\Omega}\to0(k\to\infty)$。为了方便，延拓 g_j 到 $\mathbf{R}^n$，使得 g_j 在 Ω 外取值是零，则由式(4.3.11)知，存在常数 $C>0$ 使得

$$|g_j(\boldsymbol{x})-g_j(\boldsymbol{y})|\leqslant C\|Dg_j\|_{L^p(\Omega)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{(1-n/p)}$$

这表明$\{g_j\}$在 Ω 的任意紧子集 Ω'上一致有界且等度一致连续。由 Arzela 定理知，存在子列 g_{j_i}以及连续函数 $f(\boldsymbol{x})\in C^\lambda(\Omega)$，使在 Ω'上一致有 $g_{j_i}\to f(\boldsymbol{x})$，且 $f(\boldsymbol{x})$满足

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|\leqslant C\|Dg\|_{L^p(\Omega)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{(1-n/p)}$$

而由 $\|g_j-g\|_{1,p;\Omega}\to0$ 知，存在$\{g_{j_i}\}$的子列(仍记为$\{g_{j_i}\}$)，使得 $g_{j_i}\to g$(几乎处处于 Ω)，因此 $g=f$ 即 $g\in C^\lambda(\overline{\Omega})$。式(4.3.8)可以由式(4.3.11)导出。

再利用 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中稠密的性质可证：对任何 $f\in W_0^{1,p}(\Omega)$，式(4.3.7)成立。证毕。

一般地，定理 4.3.8 中的 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 不能用 $W^{m,p}(\Omega)$ 替代，但在 Ω 为具有某些关于边界的光滑条件时，这种替代也是可行的。关于定理 4.3.8 中的常数 C 有许多讨论，可参考本章所附的有关参考文献。另外，关于嵌入还有如下重要定理。

定理 4.3.9 设 s 是任意实数，k 为非负整数，$s>\frac{n}{2}+k$，则 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 连续嵌入 $C^k(\mathbf{R}^n)$ 中。

以上的嵌入是把 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的某个函数空间中的元素映射到 Ω 上的另一空间中的元素，这种嵌入称为**同维嵌入**。还有一种把 Ω 中的函数映射到 Ω 内低维流形上的函数空间中的元素的嵌入，称为**低维嵌入**，例如：

定理 4.3.10 若 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开区域，$\partial\Omega$ 是 C 光滑的 $(m\geqslant 1)$，且 $u\in H^m(\Omega)$，则 u 及导数满足

$$\partial^j u\mid_{\partial\Omega}\in H^{m-j-1/2}(\partial\Omega),\qquad 0\leqslant j\leqslant m-1$$

反之，若在 $\partial\Omega$ 上有 $\{f_j\}$ 使得 $\forall j,0\leqslant j\leqslant m-1$，有 $f_j\in H^{-j-1/2}(\partial\Omega)$，则必有 $u\in H^m(\Omega)$ 使得 $\partial^j u\mid_{\partial\Omega}=f_j$。

这就是所谓的迹定理，通常用于研究方程解的函数类与初边值函数类相对应的关系。

以上的结果基本上是关于连续嵌入的。在适当的条件下也可以证明所谓的**紧嵌入**，即嵌入映射是紧的，例如：

定理 4.3.11 若 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开区域，则

$$W_0^{1,p}\to\begin{cases}L^q(\Omega), & q<np/(n-p),n>p\\ C^0(\bar{\Omega}), & p>n\end{cases}$$

的嵌入是紧的。

4.4 线性偏微分方程的基本方法

偏微分方程理论研究的主要内容是偏微分方程求解方法及解的各种性质，例如解在适当的定解条件下的存在性、惟一性，解的光滑性以及解对定解条件等的连续依赖性等等。本节讨论某些偏微分方程的一些特殊问题的典型求解方法以及相应的解的性质。

4.4.1 二阶线性椭圆型方程 Dirichlet 问题的经典解

根据定义 4.1.2，若线性偏微分方程

$$Lu=a_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{D}_{ij}u+b_i(\boldsymbol{x})\mathrm{D}_i u+c(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x})\tag{4.4.1}$$

的系数 $a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})\in C(\Omega)$ 满足：$a_{ij}(\boldsymbol{x})=a_{ji}(\boldsymbol{x})(i,j=1,\cdots,n)$，并且 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$，存在 $\lambda(\boldsymbol{x})>0$ 使得 $a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\geqslant\lambda(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{\xi}|^2$，则称方程(4.4.1)为二阶椭圆型方程，$L$ 被称为**二阶椭圆型算子**。另外，若存在正常数 C 使得 $\lambda(\boldsymbol{x})\geqslant C$ 成立，则称 L 为**严格椭圆型算子**。在方程(4.4.1)以及下文中均约定：每项若有某指标重复出现，则表示该项关于这个指标求和。

方程(4.4.1)的解在不同的定解条件下有不同的形式和不同的性质，以下讨论方程(4.4.1)的 **Dirichlet 问题**。

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^\infty$，则称

$$\begin{cases} Lu = a_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{D}_{ij}u + b_i(\boldsymbol{x})\mathrm{D}_i u + c(\boldsymbol{x})u = f(\boldsymbol{x}) \\ u\mid_{\partial\Omega} = \varphi(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{4.4.2}$$

为椭圆型算子 L 的 Dirichlet 问题。

为了讨论问题(4.4.2)的经典解的惟一性,先给出椭圆型偏微分方程(4.4.1)的解的两个极值原理。

定理 4.4.1 对 $\mathbf{R}^n$ 上有界域 Ω 中定义的椭圆型算子 L,若有 $c(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 且 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 使得 $Lu\leqslant 0(\geqslant 0)$,那么 u 或为常数,或 u 不在 Ω 内取到非正的最小值(非负的最大值)。

证 下面以 $Lu\leqslant 0$ 的 u 为例来证明该定理。对 $Lu\geqslant 0$ 的讨论与之类似。先采用反证法的思想考虑 $Lu<0$ 的情形。注意到对满足 $Lu<0$ 的 u,假设它在 Ω 内取到非正的最小值(记最小值点为 $\boldsymbol{x}_0$),则由 u 在其最小值点 $\boldsymbol{x}_0$ 的性质知,矩阵$(\mathrm{D}_{ij}u(\boldsymbol{x}_0))_{n\times n}$非负定,且 $\mathrm{D}u(\boldsymbol{x}_0)=0$。而 L 为椭圆型算子,按照其定义,L 的系数矩阵$(a_{ij}(\boldsymbol{x}_0))_{n\times n}$为正定矩阵,因此,$Lu(\boldsymbol{x}_0)=a_{ij}(\boldsymbol{y})D_{ij}u(\boldsymbol{y})+c(\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})\geqslant 0$,这与 $Lu<0$ 矛盾,故 u 不能在 Ω 内取到非正的最小值,除非 u 为常数。

再考虑 $Lu=0$ 情形的 u。假设 $\boldsymbol{y}\in\Omega$ 为 u 的非正的最小值点,则对充分大的常数 a,当 $\boldsymbol{x}$ 不在 $\boldsymbol{y}$ 的某一邻域内时,有

$$Le^{-a|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} = e^{-a|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\{4\alpha^2 a_{ij}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j) - 2\alpha[a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)]+C\}\geqslant$$
$$e^{-a|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}[4\alpha^2\lambda\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid^2 - 2\alpha(a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i))+c]>0$$

因此,$L(u-\varepsilon e^{-a|x-y|^2})<0$ 对任意 $\varepsilon>0$ 成立。从以上讨论可知,$u-\varepsilon e^{-a|x-y|^2}$ 在 Ω 内不能取非正的最小值。再由 ε 的任意性,u 不能在 Ω 内取非正的最小值。证毕。

由此定理可直接推出 $L(u)=0$ 的经典解的如下性质:

(1) 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$且在 $\bar{\Omega}$ 上不为常数,则当 $c(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 时有

$$\mid u(\boldsymbol{x})\mid < \sup_{\xi\in\partial\Omega}\mid u(\boldsymbol{\xi})\mid, \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega \tag{4.4.3}$$

(2) 若 $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$且在 $\bar{\Omega}$ 上不为常数,则当 $c(\boldsymbol{x})=0$ 时有

$$\inf_{\xi\in\partial\Omega}u(\boldsymbol{\xi}) < u(\boldsymbol{x}) < \sup_{\xi\in\partial\Omega}u(\boldsymbol{\xi}), \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in\Omega \tag{4.4.4}$$

一般将定理 4.4.1 称为弱极值原理,还可以证明如下的强极值原理。

定理 4.4.2 设 $u(\boldsymbol{x})\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$使得 $Lu(\boldsymbol{x})\leqslant 0$,若在 Ω 内 $c(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 并且 $u(\boldsymbol{x})$不是常数,在 u 的非正最小值点 $\boldsymbol{x}_0\in\partial\Omega$ 处存在内切球,那么

$$\lim_{x\to x_0}\inf_{x\in\boldsymbol{v}}\frac{u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)}{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\mid}>0$$

式中,$\boldsymbol{v}$ 为满足 $\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})>0$ 的某一方向,$\boldsymbol{n}$ 为 Ω 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的内法向。

证 设 $\boldsymbol{x}_0$ 点的内切球是 $B(\boldsymbol{y},R)$,其中 $\boldsymbol{y}$ 为球心,R 为半径。对 $R>\rho>0$,定义

$$v(\boldsymbol{x}) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}, \qquad r=\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid>\rho$$

式中,α 是待定常数。把 $v(\boldsymbol{x})$代入式(4.4.1),得

$$Lv = e^{-\alpha r^2}\{4\alpha^2 a_{ij}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j) - 2\alpha[a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)]\}+cv\geqslant$$
$$e^{-\alpha r^2}\{4\alpha^2\lambda r^2 - 2\alpha[a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)]+c\} - ce^{-\alpha R^2}$$

因此,可以选取 α 使得在 $A=B(\boldsymbol{y},R)-B(\boldsymbol{y},\rho)$上 $Lv\geqslant 0$。而由定理 4.4.1 知,$u(\boldsymbol{x}_0)<\inf_{\partial B(\boldsymbol{y},\rho)}u(\boldsymbol{\xi})$,因此在$\partial B(\boldsymbol{y},\rho)$上存在常数 k 使得 $u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)\geqslant k>0$。故有 $\varepsilon>0$,使得在$\partial B(\boldsymbol{y},\rho)$上,$w(\boldsymbol{x})\equiv u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon v\geqslant 0$。

再注意到在$\partial B(y,R)$上，$v=0$，$w(x)\geqslant 0$，并且可以证明$w(x)$在A上也是非负的。事实上若不如此，则有点$x\in A$使得w在x点达到最小值$w(x)<0$。因此在x点$a_{ij}D_{ij}w\geqslant 0$，$cw\geqslant 0$，$Dw(x)=0$。代入算子L中可知$Lw\geqslant 0$。这与$Lw=Lu+cu(x_0)-\varepsilon Lv\leqslant -\varepsilon Lv<0$矛盾。

综上所述，在$\bar{A}$上$w(x)\geqslant 0$，即$u(x)-u(x_0)\geqslant \varepsilon[v(x)-v(x_0)]$。因此，在方向$\nu$上

$$\lim_{x\to x_0}\inf_{x\in \nu}\frac{u(x)-u(x_0)}{|x-x_0|}>\varepsilon\left.\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right|_{x_0}>0$$

这就是要证明的结论。证毕。

类似地，可以证明，对于$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$且$Lu(x)\geqslant 0$，若在$\Omega$内$c(x)\leqslant 0$且$u(x)$不是常数，并且在$u$的非负最大值点$x_0\in\partial\Omega$处存在内切球，那么

$$\lim_{x\to x_0}\inf_{x\in \nu}\frac{u(x)-u(x_0)}{|x-x_0|}<0$$

利用上述极值原理可以证明，对于式(4.4.1)所定义的算子L，若其中的系数$c(x)\leqslant 0$，则对应的Dirichlet问题(4.4.2)满足$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$的解存在则惟一，而且这样的解关于初始条件$\varphi(x)$是稳定的。其证明留作习题。

以下借助上述极值原理讨论二阶椭圆型方程的Dirichlet问题(4.4.2)的经典解的适定性。首先讨论最简单的常系数椭圆型方程即Poisson方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x), & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi, & \varphi\in C(\partial\Omega)\end{cases}\tag{4.4.5}$$

的经典解的存在性。在此，使用所谓的上下解的方法求式(4.4.5)在$f(x)\equiv 0$时解的存在性。

定义 4.4.1 若$u\in C^2(\Omega)$使得$\Delta u=0$，则称u为Ω上的**调和函数**。若$u\in C^0(\Omega)$且$\bar{B}$为Ω中的任意球，h为B上的任意调和函数，使得当在∂B上$u\leqslant h(u\geqslant h)$时，$u\leqslant h(u\geqslant h)$在$B$内成立，则称$u$为**下(上)调和函数**。

定义 4.4.2 若$u\in C^0(\bar{\Omega})$为下(上)调和函数，φ为$\partial\Omega$上的有界函数，使得在$\partial\Omega$上$u\leqslant\varphi\ (u\geqslant\varphi)$，则称$u$为关于$\varphi$的**下(上)函数**。

定义 4.4.3 设u为Ω上的下调和函数，$\bar{B}\subset\Omega$是Ω内的球，若$\bar{u}$为B上的调和函数且在∂B上$\bar{u}=u$，则称

$$v(x)=\begin{cases}\bar{u}(x), & x\in B\\ u(x), & x\in\Omega-B\end{cases}$$

是Ω上的下调和函数u的**调和提升**。

关于这些概念有如下一些性质：

(1) **Ω上的下调和函数u在Ω内不可能取到最大值。**

这是因为若$x_0\in\Omega$使得$u(x_0)=\sup u$，则必有球$\bar{B}\in\Omega$及函数h，使得h在B上调和且$h|_{\partial B}=u|_{\partial B}$。而由下调和函数的定义知$u(x_0)\leqslant h(x_0)$，因此$h|_{\partial B}\leqslant h(x_0)$，进而$h|_B\leqslant u(x_0)$。这说明在$\bar{B}$上$h\equiv u(x_0)$为常数。再由$B$的任意性可知，在$\Omega$内$u$不可能取到最大值，除非$u$为常数。

(2) **Ω上的下调和函数u的调和提升v也是下调和函数。**

事实上，对球$\bar{B}'\in\Omega$及在$\partial B'$上满足$h\geqslant v$并在B'上调和的函数h，由于在B'上$u\leqslant v$，故在B'上$u\leqslant h$，所以在$B'-B$上有$v\leqslant h$。而v在B上调和，由极值原理知，在$B\cap B'$上$v\leqslant h$。因此，$v\leqslant h$在B'上成立，即v在Ω上是下调和函数。

(3) 若 $u_1,\cdots,u_n$ 均为 Ω 上的下调和函数，那么 $u(\boldsymbol{x})=\max\{u_1(\boldsymbol{x}),\cdots,u_n(\boldsymbol{x})\}$ 也是下调和函数。

定理 4.4.3 设 u 为 Ω 上的调和函数，Ω' 为 Ω 中的紧子集，则存在常数 c 使得

$$\sup_{\Omega'}|Du|\leqslant(c/d)\sup_{\Omega}|u| \tag{4.4.6}$$

式中，$d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$ 为 Ω' 到 $\partial\Omega$ 的距离。

证 注意到由于 Ω 有界且 Ω' 为其紧子集，因此存在有限个球 $B(\boldsymbol{x}^{(i)},a_i)$，组成 Ω' 的一个有限开覆盖，其中 $B(\boldsymbol{x}^{(i)},a_i)$ 是以 $\boldsymbol{x}^{(i)}$ 为中心，a_i 为半径的球。由此可知，该定理的证明可以简化为只证明在每个 $B(\boldsymbol{x}^{(i)},a_i)$ 上式(4.4.6)成立。进一步讲，每个 $B(\boldsymbol{x}^{(i)},a_i)$ 可通过平移使得球心位于原点，因此只需讨论在 $B(\mathbf{0},a)$ 上的调和函数满足式(4.4.6)即可。在 $B(\mathbf{0},a)$ 上定义辅助函数

$$w\equiv(a^2-|\boldsymbol{x}|^2)D_iuD_iu+(cu)^2$$

式中，c 为待定常数。对上式两边求 Laplace 算子的映像并注意到 $\Delta u=0$，则有

$$\Delta w=2(a^2-|\boldsymbol{x}|^2)D_{ij}uD_{ij}u+(2c-2)D_iuD_iu-8x_jD_iuD_{ij}u$$

对右端最后一项使用 Schwartz 不等式，并取 c 使得

$$\Delta w\geqslant(a^2-|\boldsymbol{x}|^2)D_{ij}uD_{ij}u+cD_iuD_iu$$

对这样取定的 c，只要 u 不为常数，则 $\Delta w>0$。故 w 不在 $B(\mathbf{0},a)$ 的内部取得最大值，而在 $\partial B(\mathbf{0},a)$ 上 $w|_{\partial B(\mathbf{0},a)}\leqslant(cu)^2|_{\partial B(\mathbf{0},a)}$，因此在 $B(\mathbf{0},a)$ 上有

$$(a^2-|\boldsymbol{x}|^2)D_iuD_iu\leqslant c^2\sup_{\partial B(\mathbf{0},a)}|u|^2$$

由前面的分析知

$$\sup_{\Omega'}|Du|^2\leqslant\frac{c^2}{d^2}\sup|u|^2$$

由此可推出式(4.4.6)。证毕。

定理 4.4.4 S_φ 表示关于 φ 的全体下函数的集合，记 $u(\boldsymbol{x})=\sup_{S_\varphi}v(\boldsymbol{x})$，则 $u(\boldsymbol{x})$ 为 Ω 中的调和函数。

证 因为 $\inf_\Omega\varphi$ 是 S_φ 中的元素，所以 S_φ 非空，进而 u 存在。对固定的点 $\boldsymbol{y}\in\Omega$，取 $B(\boldsymbol{y},R)\in\Omega$。由 $u(\boldsymbol{x})$ 的定义知，存在子列 $\{u_k\}\subset S_\varphi$ 使得 $u_k(\boldsymbol{y})\to u(\boldsymbol{y})$。由于用 $\max(u_k,\inf_\Omega\varphi)$ 代替 u_k 后收敛性质不变，不妨设 $\{u_k(\boldsymbol{x})\}$ 有下界。设 v_k 为 u_k 在 B 上的调和提升，则 $v_k\in S_\varphi$ 且 $v_k(\boldsymbol{y})\to v(\boldsymbol{y})$。由定理 4.4.3 知，$\{v_k\}$ 在 $B(\boldsymbol{y},R/2)$ 上是一致有界且等度连续的，因此有子列（仍然记作 $\{v_k\}$）收敛于一个调和函数 v。由收敛极限的惟一性知 $u(\boldsymbol{y})=v(\boldsymbol{y})$。

以下证明对 $\forall\,\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{y},R/2)$，有 $v(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})$。事实上，如果对某一点 $\boldsymbol{z}\in B$，$v(\boldsymbol{z})<u(\boldsymbol{z})$，那么存在 $\bar{u}\in S_\varphi$，使得 $v(\boldsymbol{z})<\bar{u}(\boldsymbol{z})$。取 $w_k=\max(\bar{u},v_k)$，记 W_k 为 w_k 的调和提升。与前面类似地讨论知，$\{W_k\}$ 有子列收敛于调和函数 $w(\boldsymbol{x})$，且在 $B(\boldsymbol{y},R/2)$ 上 $v\leqslant w\leqslant u$ 以及 $v(\boldsymbol{y})=w(\boldsymbol{y})=u(\boldsymbol{y})$。由极值原理知，在 $B(\boldsymbol{y},R/2)$ 内 $v=w$，这与 w_k 的定义矛盾，因此 u 在 $B(\boldsymbol{y},R/2)$ 中调和。由于 $\boldsymbol{y}$ 为 Ω 中的任意点，故 $u(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内调和。证毕。

定义 4.4.4 若对 $\xi\in\partial\Omega$ 存在 $w(\boldsymbol{x})\in C^0(\bar{\Omega})$，使得 $w(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 中为上调和函数且 $w(\boldsymbol{\xi})=0$，而对 $\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}\backslash\boldsymbol{\xi}$，有 $w(\boldsymbol{x})>0$，则称 $w(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{\xi}$ 点的**闸函数**，$\partial\Omega$ 上存在闸函数的点为**正则点**。

定理 4.4.5 若 Ω 的每个边界点均为正则点，则 $\forall\,\varphi\in C(\partial\Omega)$，问题(4.4.5)在 $f(\boldsymbol{x})\equiv0$ 时存在惟一的经典解。

证　令 S_φ 为关于 φ 的下函数集合。由定理 4.4.4 知，$u(x)=\sup\limits_{w\in S_\varphi} w(x)$ 在 Ω 内为调和函数。以下证明 $u(x)$ 即是问题(4.4.5)的解，为此仅需证明当 $x\to\xi\in\partial\Omega$ 时 $u(x)\to\varphi(\xi)$。事实上，$\forall\varepsilon>0$，由 φ 的性质知，存在 ξ 的邻域 $\sigma(\xi)$，在 $\sigma(\xi)\cap\partial\Omega$ 上 $|\varphi(\eta)-\varphi(\xi)|<\varepsilon$。取 k 充分大，使得

$$k\min_{\Omega\setminus\sigma} w(x)\geqslant 2\max_{\Omega}|\varphi|$$

式中，$w(x)$ 为 ξ 点的闸函数。因此，$\varphi(\xi)-\varepsilon-kw(x)$ 是关于 φ 的下函数，$\varphi(\xi)+\varepsilon+kw$ 是关于 φ 的上函数。由 u 的定义知

$$\varphi(\xi)-\varepsilon-kw(x)\leqslant u(x)\leqslant\varphi(\xi)+\varepsilon+kw(x)$$

在上式中令 $x\to\xi,\varepsilon\to 0$，并注意到闸函数的性质知 $u(x)\to\varphi(\xi)$。因此 $u(x)$ 为问题(4.4.5)的经典解。

关于问题(4.4.5)的经典解的惟一性，可以直接利用上述极值原理进行证明。证毕。

由该定理知，讨论问题(4.4.5)的可解性，也就是讨论 $\partial\Omega$ 上每一点是否具有正则性。$\partial\Omega$ 的每点都是正则点的 Ω 是存在的。例如，当 $\partial\Omega$ 满足所谓的外部球条件：$\forall\xi\in\partial\Omega$，$\exists B(y,R)$ 使得 $B(y,R)\cap\bar{\Omega}=\{\xi\}$，此时

$$w(x)=\begin{cases}R^{2-n}-|x-\xi|^{2-n}, & n>2\\ \ln\dfrac{|x-\xi|}{R}, & n=2\end{cases}$$

是 ξ 点的闸函数，因此 $\partial\Omega$ 的每点都是正则点。

然后给出问题(4.4.5)在 $f(x)\neq 0$ 时解的存在性。以下要用到例 4.2.11 所求得的 Laplace算子 Δ 的基本解

$$\Gamma(x)=\Gamma(|x|)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2-n)w_n}|x|^{2-n}, & n>2\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x|}, & n=2\end{cases}$$

式中，w_n 为 n 维单位球面的面积。定义函数 f 的**牛顿位势** $w(x)=\int_\Omega\Gamma(x-y)f(y)\mathrm{d}y$，则有如下引理。

引理 1　若 $f\in C^{0,\alpha}(\Omega)$，则 $w\in C^2(\Omega)$，$\Delta w=f(x)$ 且 $\forall x\in\Omega$，有

$$\mathrm{D}_i w=\int_\Omega \mathrm{D}_i\Gamma(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{D}_{ij}w(x)=\int_\Omega \mathrm{D}_{ij}\Gamma(x-y)(f(y)-f(x))\mathrm{d}y-f(x)\int_{\partial\Omega}\mathrm{D}_i\Gamma(x-y)\nu_j(y)\mathrm{d}S,$$

式中，$i,j=1,\cdots,n$，ν_j 为 $\partial\Omega$ 的单位内法方向的第 j 个分量。

由此引理可以证明 $f(x)\neq 0$ 时问题(4.4.5)的解的存在性。

定理 4.4.6　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界域并且 $\partial\Omega$ 的每个边界点均为关于 Δ 算子的正则点，则 $\forall\varphi\in C(\partial\Omega)$ 和 $f(x)\in C^{0,\alpha}(\Omega)$，问题(4.4.5)存在惟一的经典解。

证　设 w 为函数 $f(x)\in C^{0,\alpha}(\Omega)$ 的牛顿位势，令 $v=u-w$，则由引理 1 知，u 满足 $\Delta u=f$ 和 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$ 等价于 v 满足 $\Delta v=0$ 并且 $v|_{\partial\Omega}=\varphi-w$。而且由定理 4.4.5 知，存在惟一的经典解 v 满足 $\Delta v=0$ 并且 $v|_{\partial\Omega}=\varphi-w$。因此，存在且惟一的经典解 u 满足问题(4.4.5)。证毕。

以下利用 Schauder 估计法讨论较一般的变系数椭圆型方程 Dirichlet 问题(4.4.2)的解的

存在性。Schauder 方法的基本思想是把式(4.4.2)定义的变系数方程问题的求解转化为上述 Poisson 方程问题的求解。在下面的讨论中，记

$$[f]_{\alpha;\Omega}=\sup_{x,y\in\Omega;x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(k)}=\sup_{x\in\Omega}d_x^k+\sup_{x,y\in\Omega;x\neq y}d_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$[u]_{k,0;\Omega}=|D^k u|_{0;\Omega}=\sup_{|\beta|=k}\sup_{\Omega}|D^{\beta}u|$$

$$[u]_{k,\alpha;\Omega}=|D^k u|_{\alpha;\Omega}=\sup_{|\beta|=k}[D^{\beta}u]_{\alpha;\Omega}$$

$$[u]_{k,0;\Omega}^*=[u]_{k;\Omega}^*=\sup_{|\beta|=k}\sup_{\Omega}d_x^k|D^{\beta}u(x)|$$

$$|u|_{k;\Omega}^*=|u|_{k,0;\Omega}^*=\sum_{j=1}^{k}[u]_{j;\Omega}^*$$

$$[u]_{k,\alpha;\Omega}^*=\sup_{|\beta|=k}\sup_{\Omega}d_{x,y}^{k+\alpha}\frac{|D^{\beta}u(x)-D^{\beta}u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}$$

$$|u|_{k,\alpha;\Omega}^*=|u|_{k;\Omega}^*+[u]_{k,\alpha;\Omega}^*$$

式中，$0<\alpha\leqslant 1$，$d_x=\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$，$d_{x,y}=\min(d_x,d_y)$ 。

首先给出问题(4.4.2)的解的 Schauder 估计。对椭圆型方程(4.4.1)，以后假设 Ω 为有界区域，并且 $\forall\,0<\alpha<1$，$a_{ij}(x)\in C^{0,\alpha}(\Omega)$，$b_i\in C^{1,\alpha}(\Omega)$，$c,f\in C^{2,\alpha}(\Omega)$，因此存在 Λ，使得

$$|a_{ij}|_{0,\alpha;\Omega}^{(0)},\ |b_i|_{0,\alpha;\Omega}^{(1)},\ |c|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)}\leqslant\Lambda \tag{4.4.7}$$

引理 2　若 $u\in C^2(\Omega)$ 是 $a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x)=f(x)$，$f(x)\in C^{\alpha}(\Omega)$ 在 Ω 上的解，其中 $x_0\in\Omega$，$a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2$，则只要存在半径 R，使得球 $B_1=B(x_0,R)\subset B_2=B(x_0,2R)\subset\subset\Omega$，就有 $C=C(\lambda,\alpha,n)$ 满足

$$R^2|D^2u(x_0)|+R^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x)-D^2u(x_0)|}{|x-x_0|^{\alpha}}\leqslant C(|u|_{0;B_2}+R^2|f|_{0;B_2}+R^{2+\alpha}[f]_{\alpha;B_2}),$$
$$\forall x\in B_1$$

引理 3　设 $u\in C^k(\Omega)$，则 $\forall\varepsilon>0$ 和正整数 k，存在常数 $C(\varepsilon,k)$，使 $|u|_{k-1;\Omega}^*\leqslant\varepsilon[u]_{k;\Omega}^*+C(\varepsilon,k)|u|_{0;\Omega}$。

定理 4.4.7　设 $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ 为 $Lu=f(x)$ 的有界解，椭圆型算子 L 满足式(4.4.7)，则

$$|u|_{2,\alpha;\Omega}^*\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)}) \tag{4.4.8}$$

式中，$C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)$。

证　考虑到 $\forall\varepsilon>0$，若在 $\Omega_\varepsilon=\{x|\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$ 上式(4.4.8)成立，则存在与 ε 无关的常数 C(证明中所使用的记号 C_i 都表示常数)，使得

$$(d_{x,y,\Omega_\varepsilon})^{2+\alpha}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}\leqslant[u]_{2,\alpha;\Omega_\varepsilon}^*\leqslant$$
$$C(|u|_{0;\Omega_\varepsilon}+|f|_{0,\alpha;\Omega_\varepsilon}^{(2)})\leqslant C(|u|_{0;\Omega}+|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)}), \tag{4.4.9}$$

式中，$d_{x,y,\Omega_\varepsilon}=\min\{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega_\varepsilon),\mathrm{dist}(y,\partial\Omega_\varepsilon)\}$。在式(4.4.9)中令 $\varepsilon\to 0$，则可推出式(4.4.8)。故式(4.4.8)的证明可转化为证明式(4.4.9)。而在 Ω_ε 上 $[u]_{2,\alpha;\Omega_\varepsilon}^*$ 有界，以下不妨设 $[u]_{2,\alpha;\Omega}^*$ 有界。对任意互异的两点 $x_0,y_0\in\Omega$，记 $R=\mu d_{x_0}$ $(0<\mu\leqslant 1/2)$，$B_1=B(x_0,R)$，$B_2=B(x_0,2R)$。把 $Lu=f$ 写成

$$L_{x_0}u \equiv a_{ij}(x_0)D_{ij}u(x) = [a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)]D_{ij}u(x) - b_iD_iu - cu + f \equiv F(x) \tag{4.4.10}$$

又由引理 3 知，为证式(4.4.8)，只需证明

$$[u]^*_{2;\Omega} \leqslant C_1(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{4.4.11}$$

和

$$[u]^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant C_2(|u|_{0;\Omega} + |f|^{(2)}_{0,\alpha;\Omega}) \tag{4.4.12}$$

首先证明式(4.4.11)。由$[u]^*_{2;\Omega}$的定义知，至少存在一点 $x_0\in\Omega$，使得

$$[u]^*_{2;\Omega} \leqslant 2d^2_{x_0}\ |D_{ij}u(x_0)|$$

而由式(4.4.10)和引理 2 可知，上式右端有下述估计

$$|D_{ij}u(x_0)| \leqslant C_3(|u|_{0;B_1}R^{-2} + |F|_{0;B_1} + R^\alpha[F]_{\alpha;B_1})$$

由于 $\operatorname{dist}(B_1,\partial\Omega)\geqslant(1-\mu)d_{x_0}$，当 $x\in B_1$ 时

$$|(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))D_{ij}u(x)| \leqslant$$

$$\frac{|a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)|}{|x_0 - x|^\alpha}((1-\mu)d_{x_0})^\alpha\ |x_0 - x|^\alpha((1-\mu)d_{x_0})^{-\alpha-2}[u]^*_{\alpha;\Omega} \leqslant$$

$$\Lambda\mu^\alpha d^{-2}_{x_0}[u]^*_{\alpha;\Omega}$$

因此，由式(4.4.10)可得 $F(x)=L_{x_0}u-Lu$ 的一个估计

$$|F(x)|_{0;\Omega} \leqslant d^{-2}_{x_0}[\Lambda\mu^\alpha[u]^*_{\alpha;\Omega} + \Lambda\ |u|_{1;\Omega} + C_4\ |f|^{(2)}_{0;\Omega}]$$

由$[F]_{\alpha;\Omega}$的定义，有

$$[(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))D_{ij}u(x)]_{\alpha;\Omega} \leqslant \Lambda\,[(1-\mu)d_{x_0}]^{-2-\alpha}[u]^*_{2;\Omega}$$

因此由中值定理可以得到估计

$$[F]_{\alpha;\Omega} \leqslant d^{-2-\alpha}_{x_0}(\Lambda[u]^*_{2;\Omega} + \Lambda\ |u|_{1;\Omega} + C_5\ |f|^{(2)}_{\alpha;\Omega})$$

综上所述，可得

$$[u]^*_{2;\Omega} \leqslant C_6(\mu^{-2}\ |u|_{0;\Omega} + \mu^\alpha[u]^*_{2;\Omega} + |u|_{1;\Omega} + |f|^{(2)}_{\alpha;\Omega})$$

由于 μ 的任意性可选择 μ 使得 $C_6\mu^\alpha\leqslant1/2$。代入上式，并注意到引理 3，从而有

$$[u]_{1;\Omega} \leqslant \varepsilon[u]^*_{2;\Omega} + C(\varepsilon)\ |u|_{0;\Omega}$$

取 ε 充分小，使得 $\varepsilon k\leqslant1/2$，则可从上式推出式(4.4.11)。

其次，证明式(4.4.12)。该式的证明可与式(4.4.11)的证明类似进行。事实上，显然存在两点 x_0, x'_0，使得

$$[u]^*_{2,\alpha;\Omega} \leqslant 2\ |D_{ij}u(x_0) - D_{ij}u(x'_0)|\cdot d^{2+\alpha}_{x_0}\cdot|x_0 - x'_0|^{-\alpha}$$

不妨设 $d_{x_0}\leqslant d_{x'_0}$，从$[u]^*_{2;\Omega}$的定义容易知道，当$|x_0-x'_0|\geqslant\frac{1}{4}\mu\, d_{x_0}$时，由于$[u]^*_{2,\alpha;\Omega}\leqslant4[u]^*_{2;\Omega}\cdot\left(\frac{1}{4}\mu\right)^{-\alpha}\leqslant C[u]^*_{2;\Omega}$，式(4.4.12)成立；若$|x_0-x'_0|<\frac{1}{4}\ \mu d_{x_0}$，可以参照式(4.4.11)的证明进行证明。证毕。

以下用连续性方法讨论方程(4.4.1)的解的存在性。

定理 4.4.8　设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 $C^{2,\alpha}(\Omega)$ 区域，L 为式(4.4.1)定义的**严格椭圆型算子**，其系数 $a_{ij}\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$，$b_i\in L^{1,\alpha}(\Omega)$，$c\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，$c\leqslant0$，$|a_{ij}|_{0,\alpha,\Omega}$，$|b_i|^{(1)}_{0,\alpha}$，$|c|^{(2)}_{0,\alpha}\leqslant\Lambda$，那么若 f，$\varphi\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$时，方程 $\Delta u=f$，$u|_{\partial\Omega}=\varphi(x)$有解，则对同样的 f,φ，方程

$$Lu = f,\qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi \tag{4.4.13}$$

有解且解惟一。

证 由极值原理知道,若式(4.4.13)的解存在则惟一。以下证明解的存在性。由于 $Lv=f-L\varphi\equiv f'$ 中的 $u|_{\partial\Omega}=0$,不妨设 $\varphi|_{\partial\Omega}=0$。令 $L_tu=tLu+(1-t)\Delta u=f,0\leqslant t\leqslant 1$。显然 L_t 的系数仍然满足定理的条件。若 $L_tu=f$ 的解存在,记为 $u(t,\boldsymbol{x})$,则可以证明 $\sup\limits_{x\in\Omega}|u(t,\boldsymbol{x})|\leqslant C|f|_{0,\alpha,\Omega}$。事实上,对任何 $\boldsymbol{x}\in\Omega$,取球 $B(\boldsymbol{y},R)$,使得 $\bar{\Omega}\subset B(\boldsymbol{y},R)$,记

$$w=\sup_{\partial\Omega}|u(t,\boldsymbol{x})|+(e^{\alpha R^2}-e^{\alpha r^2})\sup_{\Omega}\frac{|f|}{\lambda},\qquad \boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{y},R)$$

式中,$r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$,$\boldsymbol{\alpha}$ 为待定常数。代入 L 的定义知

$$Lw=-e^{\alpha r^2}[4\boldsymbol{\alpha}^2a_{ij}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i)(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j)+2\boldsymbol{\alpha}(a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i))]\sup_{\Omega}\frac{|f|}{\lambda}+cw\leqslant$$

$$-e^{\alpha r^2}[4\boldsymbol{\alpha}^2(\lambda r)^2+2\boldsymbol{\alpha}(a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i))]\sup_{\Omega}\frac{|f|}{\lambda}+cw$$

取 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $e^{\alpha r^2}[4\boldsymbol{\alpha}^2(\lambda r)^2+2\boldsymbol{\alpha}(a_{ij}+b_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i))]\geqslant\lambda$,从而 $Lw\leqslant-\lambda\sup\limits_{\Omega}(|f|/\lambda)$,所以 $L(w-u(t,\boldsymbol{x}))\leqslant-\lambda\sup\limits_{\Omega}|f|/\lambda-f\leqslant 0$。而在$\partial\Omega$ 上 $w-u(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0$,由极值原理知

$$\sup_{\Omega}|u(t,\boldsymbol{x})|\leqslant C\sup_{\Omega}|f|\leqslant C|f|_{0,\alpha,\Omega}\tag{4.4.14}$$

因此,L_t 可看作$\{u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})|u|_{\partial\Omega}=0\}$到 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$的有界线性映射。$L_tu=f$ 的可解性等于映射 L_t 在 $C^{\alpha}(\bar{\Omega})$上的逆的存在性。

如果对某个 $s\in[0,1]$,L_s 是映上的,由式(4.4.11)知 L_s 也必定是一一的,记其逆为 L_s^{-1}。对任意 $t\in[0,1]$,$f\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$,方程 $L_tu=f,u|_{\partial\Omega}=0$ 等价于 $L_su=f+(t-s)(L_0-L_1)u$,即 $u=L_s^{-1}f+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)u$。因此,$u$ 可以看成是$\{u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})|u=0,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega\}$到自身的映射 $Tu=L_s^{-1}f+(t-s)L_s^{-1}(L_0-L_1)u$ 的不动点。当$|s-t|<[C(\|L_0\|+\|L_1\|)]^{-1}$(其中 C 由式(4.4.14)确定,$\|\cdot\|$ 为算子的模)时,T 为压缩映射,即 $L_tu=f$ 的解存在。若问题 $\Delta u=f,u|_{\partial\Omega}=0$存在解,则 $L_tu=f,u|_{\partial\Omega}=0$ 对 $0\leqslant t<[C(\|L_0\|+\|L_1\|)]^{-1}$均可解。通过分$[0,1]$为长度不超过$[C(\|L_0\|+\|L_1\|)]^{-1}$的区间,把每个区间的右边界作为 s,使用以上方法可证明,$\forall t\in[0,1]$,$L_tu=f,u|_{\partial\Omega}=0$ 有解。因此 $L_tu=f,u|_{\partial\Omega}=0$ 有解。证毕。

4.4.2 椭圆型方程的广义解及其正则性

本小节将用 Sobolev 空间方法讨论弱解及其性质。

定义 4.4.5 若 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$,使得 $\forall v\in C_0^{\infty}(\Omega)$,有

$$L(u,v)\equiv\int_{\Omega}\{(a_{ij}D_ju+b_iu)D_jv-c^iD_iu+du)v\}d\boldsymbol{x}=F(\boldsymbol{x})\tag{4.4.15}$$

且 $u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$,其中 $F(v)\equiv\int_{\Omega}(f^iD_iu-gv)d\boldsymbol{x}$,则 u 为

$$\begin{cases}Lu=D_i(a_{ij}(\boldsymbol{x})D_ju+b_i(\boldsymbol{x})u)+c^i(\boldsymbol{x})D_iu+d(\boldsymbol{x})u=g+D_if^i\\u|_{\partial\Omega}=\varphi\in W^{1,2}(\Omega)\end{cases}\tag{4.4.16}$$

的**弱解或广义解**。问题(4.4.16)称为**广义 Dirichlet 问题**。

对方程(4.4.16),若存在与 $\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}$ 无关的常数 $\lambda>0$,使得 $\forall\boldsymbol{x}\in\Omega,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$,$a_{ij}(\boldsymbol{x})\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\boldsymbol{\xi}|^2$,则称(4.4.16)中的方程为**一致椭圆型方程**。

讨论方程(4.4.16)的弱解存在性时,对 L 的系数的光滑性要求可以比经典解弱,一般只要 $a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c^i(\boldsymbol{x}),d(\boldsymbol{x})$有界可测,即存在 $\Lambda>0$ 与 $\nu>0$,使得

$$\sum |a_{ij}(x)|^2 \leqslant \Lambda^2, \lambda^{-2}\sum(|b_i(x)|^2+|c^i(x)|^2)+\lambda^{-1}|d(x)| \leqslant \nu^2 \qquad (4.4.17)$$

在以下的公式中，$u\in W^{1,2}(\Omega)$在$\partial\Omega$上满足$u\leqslant 0$的意义为$u^+=\max\{u,0\}\in W_0^{1,2}(\Omega)$。对别的不等式也作类似的理解。如$\sup\limits_{\Omega} u=\inf\{k\mid u\leqslant k, x\in\partial\Omega, k\in\mathbf{R}\}$，$\inf\limits_{\Omega} u=-\sup\limits_{\Omega}(-u)$等等。$Lu\geqslant F$理解为$L(u,v)\geqslant F(v)$，$\forall v\geqslant 0, v\in C_0^1(\Omega)$，其中$F=g+D_if^i$。若$u$满足$Lu\geqslant F$，则称$u$为$Lu=F$的下解；称满足$Lu\leqslant F$的$u$为$Lu=F$的上解。

和求经典解一样，从方程$Lu\geqslant F$的极值原理入手。以下设

$$\int_\Omega (dv-b_iD_iv)\mathrm{d}x\leqslant 0, \qquad \forall v\geqslant 0, v\in C_0^1(\Omega) \qquad (4.4.18)$$

定理 4.4.9　对满足式(4.4.17)的一致椭圆型算子L，若$u\in W^{1,2}(\Omega)$，使得$Lu\geqslant 0(\leqslant 0)$，则

$$\sup_\Omega u\leqslant \sup_\Omega u^+\ (\inf_\Omega u\geqslant \inf_\Omega u^-) \qquad (4.4.19)$$

证　首先设u为$Lu=0$的下解，因此$\forall v\geqslant 0, v\in W_0^{1,2}(\Omega)$，$L(u,v)\leqslant 0$。而对$u\in W^{1,2}(\Omega)$，$uv\in W_0^{1,1}(\Omega)$，因此有

$$\int_\Omega \{a_{ij}D_juD_iv-(b_i+c^i)vD_iu\}\mathrm{d}x\leqslant \int_\Omega\{duv-b_iD_i(uv)\}\mathrm{d}x$$

由上式，若$uv\geqslant 0$，则根据式(4.4.18)及式(4.4.17)知

$$\int_\Omega a_{ij}D_juD_iv\mathrm{d}x\leqslant 2\lambda\nu\int_\Omega v\mid Du\mid \mathrm{d}x \qquad (4.4.20)$$

以下用反证法。若式(4.4.19)不成立，即存在k使得$\sup\limits_\Omega u^+\leqslant k<\sup\limits_\Omega u$。取$v=(u-k)^+$，令$A(k)=\operatorname{supp} Dv$，显然$v\in W_0^{1,2}(\Omega)$。由式(4.4.20)可知$\int_\Omega a_{ij}D_jvD_iv\mathrm{d}x\leqslant 2\lambda\nu\int_{A(k)} v\mid Dv\mid \mathrm{d}x$。由$L$的一致性及Schwartz不等式知$\int_\Omega |Dv|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\nu\ \|v\|_{2,A(k)}\|Dv\|_{2,\Omega}$，因此有

$$\|Dv\|_{2,\Omega}\leqslant 2\nu\ \|v\|_{2,A(k)} \qquad (4.4.21)$$

由Sobolev不等式知，存在常数C使得$\|v\|_{2n/(n-2)}\leqslant C\|Dv\|_2$，$\|v\|_{2,A(k)}\leqslant |A(k)|^{1/n}\|v\|_{2n/(n-2)}$，式中$|A(k)|$为$A(k)$的测度。将其代入式(4.4.21)得$|A(k)|\leqslant C^{-n}$，式中$C$只与$n$和$\nu$有关，与$k$无关。因此，当取$k=\sup\limits_\Omega u$时，$|A(\sup\limits_\Omega u)|\geqslant C^{-n}$，$v=0$，即$Dv=0$。这一矛盾说明假设的$k$不存在。故只能$\sup\limits_\Omega u\leqslant\sup\limits_\Omega u^+$。以$-u$代替$u$可证明式(4.4.19)的余下部分。证毕。

推论　当$Lu=0$，且$u|_{\partial\Omega}=0$时，u必为零。

证　由于$\sup\limits_\Omega u\leqslant\sup\limits_\Omega u^+=0$，而$\inf\limits_\Omega u\geqslant\inf\limits_\Omega u^-=0$，因此$u=0$。证毕。

此推论说明，若广义Dirichlet问题

$$\begin{cases} Lu=F(x), & x\in\Omega, F(x)=g+D_if^i \\ u\mid_{\partial\Omega}=\varphi \end{cases} \qquad (4.4.22)$$

的解存在，则惟一。

下面讨论方程(4.4.22)解的存在性。

定理 4.4.10　对式(4.4.16)定义的算子L，若为一致椭圆型算子且满足式(4.4.17)及式(4.4.18)，$g, f^i\in L^2(\Omega)$，$i=1,\cdots,n$，$\varphi\in W^{1,2}(\Omega)$，则问题(4.4.22)有惟一解存在，且

$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\| f \|_2 + \| g \|_2 + \| \varphi \|_{W^{1,2}(\Omega)})$，其中 $f=(f^1,\cdots,f^n)$.

证 由于 $Lw = Lu - L\varphi = g - c^i \mathrm{D}_i\varphi - d\varphi + \mathrm{D}(f^i - a_{ij}\mathrm{D}_i\varphi - b_i\varphi)$。记 $\tilde{g} = g - c^i\mathrm{D}_i\varphi + d\varphi$，$\tilde{f}^i = f^i - a_{ij}\mathrm{D}_i\varphi - b_i\varphi$，则 $\tilde{f},\tilde{g}\in L^2(\Omega)$，且 $w\in W_0^{1,2}(\Omega)$。不妨设 $\varphi=0$，即式(4.4.22)的求解等价于求 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$使得 $\forall v\in W_0^{1,2}(\Omega)$满足 $L(u,v)=F(v)$。而由 L 的性质知

$$L(u,u) = \int_\Omega (a_{ij}\mathrm{D}_iu\mathrm{D}_ju + (b_i - c^i)u\mathrm{D}_iu - (du)^2)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\int_\Omega \left(\lambda \mid \mathrm{D}u \mid^2 - \frac{\lambda}{2} \mid \mathrm{D}u \mid^2 - \lambda\nu^2u^2\right)\mathrm{d}x \geqslant$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega \mid \mathrm{D}u \mid^2 \mathrm{d}x - \lambda\nu^2\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \tag{4.4.23}$$

故对 $\sigma>\lambda\nu^2$，双线性映射 $L(u,v)+\sigma(u,v)$是强迫的。另一方面，$\forall v\in W_0^{1,2}(\Omega)$，有 $|F(v)|\leqslant (\| f \|_2 + \| g \|_2)\| \varphi \|_{W^{1,2}(\Omega)}$，即 $F(v)$为 $W_0^{1,2}(\Omega)$上的有界线性泛函。由 Lax-Milgram 定理知 $L_\sigma\tilde{u} = L\tilde{u} - \sigma\tilde{u} = F$ 有惟一解 $\tilde{u} = L_\sigma^{-1}(F)$。但 $Lu=F$ 等价于 $L_\sigma u + \sigma u = F$，此即$u + \sigma L_\sigma^{-1}(Iu) = L_\sigma^{-1}(F)$，其中 $Iu(v) = \int_\Omega uv\mathrm{d}x$，$\forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ 为紧映射，L_σ^{-1} 至少为有界的，因此 $L_\sigma^{-1}I$ 为紧算子。再由 Fredholm 二择一定理知，若 $Lu=0$ 仅有零解，则 $Lu=f$ 有解。结合推论知式(4.4.22)的解存在。

由于 L_σ^{-1} 为 $L^2(\Omega)$到 $W_0^{1,2}(\Omega)$的有界算子，存在 C 使得 $\| L_\sigma^{-1}(g + \mathrm{D}_if^i) \|_{W^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\| f \|_2 + \| g \|_2)$。另一方面，$\forall \sigma\in[0,\infty]$，$(I+\sigma L_\sigma^{-1}I)^{-1}$为 $W_0^{1,2}(\Omega)$到自身的有界线性算子，因此 $\| u \|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\| f \|_2 + \| g \|_2)$。根据 w 的定义，有 $\| w \|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leqslant C(\| \tilde{f} \|_2 + \| \tilde{g} \|_2)$。由此式容易知道问题(4.4.22)的解满足定理。证毕。

定理 4.4.11 u 为严格椭圆型方程 $Lu=f$ 的弱解，$a_{ij},b_i,i,j=1,\cdots,n$ 是 Ω 上的一致 Lipschitz 连续函数，$c,i=1,\cdots,n,d$ 为有界函数，$f\in L^2(\Omega)$，则 $\forall \Omega'\subset\subset\Omega$ 有 $u\in W^{1,2}(\Omega')$且存在 $C=C(n,\lambda,K,\delta)$使得

$$\| u \|_{W^{2,2}(\Omega')} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_{L^2(\Omega)})$$

式中，$K=\max\{\| a_{ij},b_i \|_{C^{0,1}}(\Omega), \| c^i,d \|_{L^\infty(\Omega)}\}$，$\delta=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$。而且 u 在 Ω 中几乎处处满足

$$Lu = a_{ij}\mathrm{D}_{ij}u + (\mathrm{D}_ja_{ij} + b_i + c^i)\mathrm{D}_iu + (\mathrm{D}_ib_i + d)u = f$$

证 令 $g=(b_i+c^i)\mathrm{D}_iu + (\mathrm{D}_ib_i + d)u - f$。显然 $g\in L^2(\Omega)$，因此 $\forall v\in C_0^1(\Omega)$有

$$\int_\Omega a_{ij}\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_iv\mathrm{d}x = \int_\Omega gv\mathrm{d}x \tag{4.4.24}$$

对任何 $h<\frac{1}{2}\min\{\delta,\mathrm{dist}(\mathrm{supp}v,\partial\Omega)\}$，记 $\Delta_hu = [u(x+he_1)-u(x)]/h$，$e_1=(1,0,\cdots 0)$。在式(4.4.24)中用 $\Delta_{-h}v$ 代替 v，得

$$\int_\Omega \Delta_h(a_{ij}\mathrm{D}_ju)\mathrm{D}_iv\mathrm{d}x = -\int_\Omega a_{ij}\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_i\Delta_{-h}v\mathrm{d}x = -\int_\Omega g\Delta_{-h}v\mathrm{d}x$$

而 $a_{ij}\mathrm{D}_ju$ 的差商可写成 $\Delta_h(a_{ij}\mathrm{D}_ju) = a_{ij}(x+he_1)\Delta_h\mathrm{D}_ju + \Delta_ha_{ij}(x)\mathrm{D}_ju$，因此

$$\int_\Omega a_{ij}(x+he_1)\mathrm{D}_j\Delta_hu\mathrm{D}_iv\mathrm{d}x = -\int_\Omega \{\Delta_ha_{ij}\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_iv + g\Delta_hv\}\mathrm{d}x \tag{4.4.25}$$

另一方面，对 $u\in C^1(\Omega)$，由 Schwartz 不等式得

$$\mid \Delta_hu \mid^2 = \left| \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{D}_{x_1}u(x_1+\xi,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}\xi \right|^2 \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \mid \mathrm{D}_{x_1}u(x_1+\xi,x_2,\cdots,x_n) \mid^2\mathrm{d}\xi$$

故有 $\| \Delta_h u \|_{2,\Omega} \leqslant \| D_{x_1} u \|_{2,\Omega}$。再由 $C^1(\bar{\Omega})$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中稠密,可推出 $\forall u \in W^{1,2}(\Omega)$ 亦成立 $\| \Delta_h u \|_{2,\Omega} \leqslant \| Du \|_{2,\Omega}$。代入式(4.4.25)得

$$\int_\Omega a_{ij} D_j \Delta_h u(x+he_1) D_i v \mathrm{d}x \leqslant (K \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| g \|_2) \| Dv \|_2 \leqslant$$
$$(K \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2) \| Dv \|_2$$

在上式中取 $v = \eta^2 \Delta_h u$,其中 $\eta \in C_0^1(\Omega)$,$0 \leqslant \eta \leqslant 1$,$|D\eta| \leqslant \frac{K}{\delta}$,在 Ω' 中 $\eta = 1$。则由 Schwartz 不等式知

$$\lambda \int | \eta D\Delta_h u |^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega | a_{ij}(x+he_1) D_j \Delta_h u [D_i(\eta^2 \Delta_h u) - 2\eta D_i \eta \Delta_h u] | \mathrm{d}x \leqslant$$
$$(K \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2)(\| \eta D\Delta_h u \|_2 +$$
$$2 \| \Delta_h u D\eta \|_2) + K \| \eta D\Delta_h u \|_2 \| \Delta_h u D\eta \|_2 \leqslant$$
$$\frac{\lambda}{2} \int_\Omega | \eta D\Delta_h u |^2 \mathrm{d}x + K(1 + \sup_\Omega | D\eta |)(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2)^2$$

上式最后一个不等式是由 Young 不等式得到的。因此,存在 $C = C(n, \lambda, K, \delta)$,使得 $\| \Delta_h Du \|_{2,\Omega} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2)$。

由于 $L^2(\Omega)$ 中的有界子集为弱紧的,若取 $\{h_m\}$ 为收敛到零的列,则对一切 i,$1 \leqslant i \leqslant n$,$\{\Delta_{h_m} D_i u\}$ 为 $L^2(\Omega')$ 中的有界集。因此,存在 $w_i \in L^2(\Omega')$ 与 $\{\Delta_{h_m} D_i u\}$ 有共同的界,且使得 $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega')$,$\int_{\Omega'} \varphi \Delta_{h_m} D_i u \mathrm{d}x \to \int_{\Omega'} \varphi w_i \mathrm{d}x, m \to \infty$,但 $\int_{\Omega'} \varphi \Delta_{h_m} D_i u \mathrm{d}x = -\int_\Omega D_i u \Delta_{-h_m} \varphi \mathrm{d}x \to -\int_{\Omega'} D_i u D_1 \varphi \mathrm{d}x$。因此 $\int_{\Omega'} \varphi w_i \mathrm{d}x = \int_{\Omega'} \varphi D_i D_{x_1} u \mathrm{d}x$,即 $w_i = D_i D_{x_1} u$。故 $\| DD_{x_1} u \|_{2,\Omega'} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2)$。同理知 $DD_j u, j = 2, \cdots, n$ 都满足上式,因此

$$\| D^2 u \|_{2,\Omega'} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_2)$$

这是要证明的公式。而 Ω' 是 Ω 中任意的区域,且 $\Omega' \subset\subset \Omega$。故对 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{2,2}(\Omega)$,由于 $\int_\Omega (Lu - f) v \mathrm{d}x = 0, \forall v \in C_0^1(\Omega)$,可得 $Lu = f$ 在 Ω 中处处成立。证毕。

由该定理可知,$\forall f \in L^2(\varphi)$,$\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$,存在惟一的函数 $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W_{\mathrm{loc}}^{2,2}(\Omega)$ 满足 $Lu = f$,且 $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$。若加强算子 L 系数的光滑性条件,可得到如下定理。

定理 4.4.12　若严格椭圆型算子 L 的系数 $a_{ij}, b_i \in C^{k,1}(\bar{\Omega})$,$c^i, d \in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$,则当 $Lu = f$ 的弱解 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 时,$\forall \Omega' \subset\subset \Omega$,$f \in W^{1,2}(\Omega)$,$k \geqslant 1$,有 $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$ 且 $\| u \|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leqslant C(\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} + \| f \|_{W^{k,2}(\Omega)})$,其中 $C = C(n, \lambda, k, \delta, K)$,$\delta = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$,$K = \max\{ \| a_{ij}, b_i \|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})}, \| c^i, d \|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})} \}$。

证　当 $k = 1$ 时,在 $\int_\Omega Luv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x$ 中用 $D_l v$ 代替 v,$1 \leqslant l \leqslant n$,然后经分部积分后得 $\int_\Omega a_{ij} D_{jl} u D_i v \mathrm{d}x = \int_\Omega D_l g v \mathrm{d}x, \forall v \in C_0^1(\Omega)$,其中 $g = (b_i + c^i) D_i u + (D_i b_i + d) u - f$,而 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(\Omega)$,故 $D_l g \in L_{\mathrm{loc}}^2(\Omega)$。进而 $\forall l, 1 \leqslant l \leqslant n$,$D_l u \in W_{\mathrm{loc}}^{2,2}(\Omega)$,即 $Du \in W_{\mathrm{loc}}^{2,2}(\Omega)$。由归纳法可推出对任何 k 定理成立。证毕。

现在给出弱解在 Ω 上的整体光滑性。

定理 4.4.13　若在定理 4.4.11 中设 $\partial\Omega \in C^2$,且存在 φ 使得 $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$,$u - \varphi \in$

$W_0^{2,2}(\Omega)$，则 $u\in W^{2,2}(\Omega)$，且 $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)})$，其中 $C=C(n,\lambda,K,\partial\Omega)$。

证 如定理 4.4.11 中的描述，可以不失一般性地设 $\varphi=0$，因此 $u\in W_0^{2,2}(\Omega)$。在 $L(u,v)=(f,v)$ 中取 $v=u$ 可得 $\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_2+\|f\|_2)$，其中 $C=C(n,\lambda,K)$。而由 $\partial\Omega\in C^2$ 知，对任意点 $x_0\in\partial\Omega$，存在球 $B_2=B(x_0,2R)$ 及子区域 $\Omega'\subset\mathbf{R}^n$ 和映射 $\psi:B_2\to\Omega'$ 使得 $\psi(B_2\cap\Omega)\subset\mathbf{R}_+^n=\{x\in\mathbf{R}^n\mid x_n>0\}$，$\psi(B_2\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbf{R}_+^n$，$\psi\in C^2(B_2)$，$\psi^{-1}\in C^2(\Omega')$。取 $B_1=B(x_0,R)$。记 $B^+=B_1\cap\Omega$，$\Omega'=\psi(B_1)$，$\Omega^+=\psi(B_1^+)$，则 ψ 把 B^+ 中的方程 $Lu=f$ 变换成 Ω^+ 中同样形式的方程。变换后的常数 λ',k' 可由原方程的 λ,k 作估计。令变换后的解为 v，则由 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 知，$v=u\psi^{-1}\in W^{1,2}(\Omega^+)$。故对任意 $\eta\in C_0^1(\Omega')$，$\eta v\in W_0^{1,2}(\Omega')$。进而有 $\eta^2\Delta_h v\in W_0^{1,2}(\Omega')$，其中 $|h|<\frac{1}{2}\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\eta,\partial\Omega')$。由定理 4.4.11 知 $D_{ij}v\in L^2(\psi(B_1\cap\Omega))$，$i=1,2,\cdots,n-1$，$j=1,2,\cdots,n$。故 $D^2v\in L^2(\psi(B_1\cap\Omega))$。再由 v 与 u 的关系可导出 $u\in W^{2,2}(\Omega\cap B_1)$。在$\partial B$ 上选择有限个如 $\boldsymbol{x}_0$ 这样的点 $\boldsymbol{x}^{(i)}$，使得 $B(\boldsymbol{x}^{(i)},\mathbf{R})$ 构成$\partial\Omega$ 的一个有限开覆盖，就可完成本定理的证明。证毕。

通过类似的讨论还可以得到

定理 4.4.14 在定理 4.4.11 的假设下，若还存在$\partial\Omega\in C^{k+2}(k\geqslant1)$ 及 $\varphi\in W^{k+2,2}(\Omega)$ 使 $u-\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$，则 $u\in W^{k+2,2}(\Omega)$，且 $\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}+\|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)})$，式中 $C=C(n,\lambda,K,\partial\Omega)$。

4.4.3 线性发展方程的 Cauchy 问题

在偏微分方程理论中，一般将描述物理现象随时间变化的规律的微分方程称为发展方程。本节讨论线性发展方程的 Cauchy 问题。为了方便，在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中讨论，令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 表示空间变量，$t=x_{n+1}\in\mathbf{R}$ 表示时间变量。在这种情况下，线性偏微分算子 $P(\boldsymbol{x},\mathrm{D})$ 可以表示为

$$P(\boldsymbol{x},t,\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_t)=\sum_{|\alpha|+k\leqslant m}a_{\alpha,k}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{D}_x^\alpha\mathrm{D}_t^k \tag{4.4.26}$$

其中，$\mathrm{D}_x=(\mathrm{D}_{x_1},\cdots,\mathrm{D}_{x_n})$，$\mathrm{D}_x^\alpha=\mathrm{D}_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\mathrm{D}_{x_n}^{\alpha_n}$。记 $\Omega=\mathbf{R}^n\times(0,b)$，$\partial\Omega_0$ 为 Ω 与半空间 $t\geqslant0$ 的交，则方程(4.4.26)在 Ω 上的 Cauchy 问题为

$$\begin{cases}P(\boldsymbol{x},t,\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_t)u=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\Omega\\ \mathrm{D}_t^k(\boldsymbol{x},0)=g_k(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_0,0\leqslant k\leqslant m\end{cases} \tag{4.4.27}$$

式中，f 是 Ω 上的已知函数，而 g_k 是在$\partial\Omega_0$ 上给定的函数。为使 Cauchy 问题(4.4.27)有解，一般还设式(4.4.27)中的 D_t^m 的系数在$\partial\Omega_0$ 上处处不为零。本节将介绍 Cauchy 问题(4.4.27)的适定性问题，即 Cauchy 问题(4.4.27)的解的存在性、惟一性和稳定性。

首先讨论 Cauchy 问题(4.4.27)的弱解。为了方便，本节将只讨论 $P(\boldsymbol{x},t,\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_t)$ 为常系数算子的情形。以下将讨论的问题为

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\Omega\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\ 0\leqslant k\leqslant m\end{cases} \tag{4.4.28}$$

式中，$P(\mathrm{D})=P(\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_t)=\sum_{|\alpha|+k\leqslant m}a_{\alpha,k}\mathrm{D}_x^\alpha\mathrm{D}_t^k$，$a=a_{(0,\cdots,0),m}\neq0$。为了讨论问题(4.4.28)的解，将先推广解的定义。

定义 4.4.6 若 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，存在广义函数 $u\in\mathscr{D}'$ 使得 $\langle u,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle$，则

$u\in L^2(\Omega)$，称 u 为 Cauchy 问题(4.4.28)的**弱解**或**广义解**。

对于 Cauchy 问题(4.4.28)，可以证明其弱解的存在性。

定理 4.4.15　$\forall f\in L^2(\Omega)$，式(4.4.28)有弱解的一个充要条件是：存在常数 C，使得

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2},\qquad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{4.4.29}$$

式中，$P^*(\mathrm{D})$表示线性算子 $P(\mathrm{D})$的共轭算子。

证　首先证明必要性。若 u 为式(4.4.28)的弱解，则 $\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，有 $\langle u,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle$，由 Schwartz 不等式可得 $|\langle f,\varphi\rangle|=|\langle u,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle|\leqslant\|u\|_{L^2}\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2}$，其中，$\|\cdot\|$是 L^2 范数。由于 u 为 Cauchy 问题(4.4.28)的弱解，因此 $\|u\|_{L^2}$有界，将其作为常数 C，那么 $|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2}$。

再证明充分性。若存在常数 C，使得 $|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant C\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2}$，则由 Hahn-Banach 定理，可以将 f 延拓为 $L^2(\Omega)$空间上的有界线性泛函。因此，根据 Riesz 定理可知，存在函数 $u\in L^2(\Omega)$，使得 $\|u\|_{L^2}=\|f\|_{L^2}$，并且对所有的 $g=P^*(\mathrm{D})\varphi\in L^2(\Omega)$，该有界线性泛函由 $\langle g,u\rangle$定义。特别地，若 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $P^*(\mathrm{D})\varphi=g$，于是 $\langle u,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle$。因此 u 为 Cauchy 问题(4.4.28)的弱解。证毕。

还可以证明类似于定理 4.4.15 的如下另一个定理。

定理 4.4.16　$\forall f\in L^2(\Omega)$，Cauchy 问题(4.4.28)有弱解的一个充要条件是：存在常数 C，使得

$$\|\varphi\|_{L^2}\leqslant C\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2},\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{4.4.30}$$

证　证明充分性较简单。根据式(4.4.29)和 Schwartz 不等式可得 $|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}\leqslant C\|f\|_{L^2}\|P^*(\mathrm{D})\varphi\|_{L^2}$，因此 Cauchy 问题(4.4.28)有弱解。

为证明必要性，用反证法。若式(4.4.30)不成立，则存在$\{\varphi_k\}\subset C_0^\infty(\Omega)$使得

$$\|\varphi_k\|_{L^2}\to\infty,\|P^*(\mathrm{D})\varphi_k\|_{L^2}=1,k\to\infty\tag{4.4.31}$$

而由定理 4.4.15 知，对每一个 $k,k=1,2,\cdots$ 都有 $|\langle f,\varphi_k\rangle|\leqslant C\|P^*(\mathrm{D})\varphi_k\|_{L^2}=C$，因此根据 Banach-Steinhaus 定理，应存在常数 C，使得 $|\langle f,\varphi_k\rangle|\leqslant C\|f\|_{L^2}$，$k=1,2,\cdots$。取 $f=\varphi_k$，得到 $\|\varphi_k\|_{L^2}\leqslant C$。这与式(4.4.31)矛盾。因此式(4.4.30)成立。证毕。

从该定理可推出：对区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^{n+1}$，当且仅当式(4.4.30)成立时，Cauchy 问题(4.4.28)才存在弱解。因此，求 Cauchy 问题(4.4.28)的弱解就是验证算子 $P(\mathrm{D})$是否满足式(4.4.30)。下面的双曲型方程的 Cauchy 问题满足式(4.4.30)。

按照双曲型算子的定义，$P(\mathrm{D})$是双曲型算子，当且仅当其共轭算子 $P^*(\mathrm{D})$是双曲型算子。另外，$P(\mathrm{D})$是双曲型算子的一个充要条件是，该算子的主部是双曲型算子。现在讨论双曲型算子的 Cauchy 问题解的存在性。下面先讨论零初始条件的问题。

定理 4.4.17　若 $P(\mathrm{D})$是双曲型算子，$f\in\mathscr{S}$，则有

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0<t<b\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}\tag{4.4.32}$$

有解 $u\in\mathscr{S}$。

证　若 Cauchy 问题(4.4.32)有解 $u\in\mathscr{S}$，则对固定的 t，有

$$\begin{cases}P(\boldsymbol{\xi},\mathrm{D}_t)\hat{u}=\hat{f}(\boldsymbol{\xi},t), & \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n\\ \mathrm{D}_t^k\hat{u}(\boldsymbol{\xi},0)=0, & \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}$$

式中，ˆ表示 Fourier 变换。对于固定的 $\boldsymbol{\xi}$，这是关于 t 的常微分方程，其解为

$$\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t)=i\int_0^t \hat{f}(\boldsymbol{\xi},t)w(\boldsymbol{\xi},t-s)\mathrm{d}s \tag{4.4.33}$$

式中，$w(\boldsymbol{\xi},t)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \dfrac{\mathrm{e}^{itz}}{P(\boldsymbol{\xi},z)}\mathrm{d}z$。$\Gamma$ 是复平面上的一条简单闭曲线，它包围多项式 $P(\boldsymbol{\xi},z)$ 的全部根，即可以选取 Γ 使得 $P(z)$ 的根都包含在带形区域 $|\mathrm{Im}z|\leqslant K$ 中。用 $\tau_1,\cdots,\tau_m$ 来表示这些根，把每个 τ_j 都用一个中心在 τ_j 边长为 2，并且平行于实轴和虚轴的正方形包围起来。设 G 是这些正方形的并集，而 Γ 是 G 的边界。虽然 Γ 可能不是一条简单闭曲线，但可以通过做割线的办法使 Γ 成为简单闭曲线，而且 Γ 的长度至多为 $8m$。因此，只要能证明式(4.4.33)中的 $\hat{u}\in\mathscr{S}$，就证明了该定理。下面证明 $\hat{u}\in\mathscr{S}$。首先注意到

$$\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{\xi},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{z^k\mathrm{e}^{itz}}{P(\boldsymbol{\xi},z)}\mathrm{d}z$$

由归纳法可得 $|\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{\xi},t)|\leqslant C(1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2k}\mathrm{e}^{t(k+1)}$。显然，存在次数小于等于 $(m-1)|\boldsymbol{\nu}|$ 的多项式 $Q_\nu(\boldsymbol{\xi},z)$，使得 $\mathrm{D}_\xi^\nu\left[\dfrac{1}{P(\boldsymbol{\xi},z)}\right]=\dfrac{Q_\nu(\boldsymbol{\xi},z)}{[P(\boldsymbol{\xi},z)]^{|\nu|+1}}$。因此，每个导数 $\mathrm{D}_\xi^\nu\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{\xi},t)$ 都是形为 $C\boldsymbol{\xi}^\alpha\oint_\Gamma \dfrac{z^{j+k}\mathrm{e}^{itz}}{[P(\boldsymbol{\xi},z)]^{|\nu|+1}}\mathrm{d}z$ 的项之和，其中 C 为常数，$|\alpha|+j\leqslant(m-1)|\nu|$。从这里可以推出

$$|\mathrm{D}_\xi^\nu\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{\xi},t)|\leqslant C(1+|\boldsymbol{\xi}|)^{2(m-1)|\nu|+2k}\mathrm{e}^{t(k+1)} \tag{4.4.34}$$

另一方面，由于 $f\in\mathscr{S}$，所以 $\hat{f}\in\mathscr{S}$，因此由缓增广函的定义，对任意 j,k,ν，存在常数 C，使得

$$|\mathrm{D}_\xi^\nu\mathrm{D}_t^k\hat{f}(\boldsymbol{\xi},t)|\leqslant C/(1+|\boldsymbol{\xi}|)^j \tag{4.4.35}$$

而 $$\mathrm{D}_\xi^\nu\mathrm{D}_t^k\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t)=\sum_{j=m}^k\mathrm{D}_\xi^\nu[\mathrm{D}_t^{k-j}\hat{f}(\boldsymbol{\xi},t)\mathrm{D}_t^{j-1}w(\boldsymbol{\xi},0)]+i\mathrm{D}_\xi^\nu\int_0^t\hat{f}(\boldsymbol{\xi},s)\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{\xi},t-s)\mathrm{d}s$$

将式(4.4.34)和式(4.4.35)代入上式得，$|\mathrm{D}_\xi^\nu\mathrm{D}_t^k\hat{u}(\boldsymbol{\xi},t)|\leqslant C/(1+|\boldsymbol{\xi}|)^j$，即 $\hat{u}\in\mathscr{S}$。证毕。

定理 4.4.18 若 $P(\mathrm{D})$ 是双曲型算子，$f\in L^2(\mathbf{R}^{n+1})$，则

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t),0<t<b, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases} \tag{4.4.36}$$

有弱解。

证 根据定理 4.2.2 的证明，$\forall\,\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$C_0^\infty(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的稠密子空间。因此 $\forall\,f\in L^2$，存在 $\mathscr{D}$ 中的一个函数列 $\{f_k\}$，使得 $f_k\to f$。而由定理 4.4.17 知，对每一个 f_k，Cauchy 问题(4.4.36)存在解 $u_k\in\mathscr{S}$，并且 $\|u_k\|\leqslant C\|f_k\|$，$k=1,2,\cdots$，而由 f_k 的收敛性知，f_k 的 L^2 范数是有界的，因此 $\|u_k\|$ 是有界的。于是存在 $\{u_k\}$ 的子列（仍然用 $\{u_k\}$ 表示）弱收敛于一个 L^2 函数 u。而 u_k 可以被看成函数型广义函数，即 $\forall\,\varphi(x,t)\in\mathscr{D}$ 有 $\langle u_k,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle=\langle f_k,\varphi\rangle$。令 $k\to\infty$ 可得

$$\langle u,P^*(\mathrm{D})\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle,\ \forall\,\varphi(x,t)\in\mathscr{D}$$

因此 Cauchy 问题(4.4.36)有弱解 u。证毕。

然后讨论非齐次的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t), & 0<t<b,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=g_k(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases} \tag{4.4.37}$$

的解的存在性。对于该问题，有下述定理。

定理 4.4.19　对双曲型算子 $P(\mathrm{D})$ 和任意 $f,g_1,g_2,\cdots,g_{m-1}\in\mathscr{S}$，存在函数 $u\in\mathscr{E}\cap L^2$ 是 Cauchy 问题(4.4.37)的解。

证　对任意 $f,g_1,g_2,\cdots,g_{m-1}\in\mathscr{S}$，注意到当取 $\mathscr{D}$ 中的函数 $\rho(t)$ 使得它在 $t=0$ 的一个邻域中等于 1，则函数 $w(\boldsymbol{x},t)=\rho(t)\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}t^k g_k(\boldsymbol{x})$ 满足 $\mathrm{D}_t^k w(\boldsymbol{x},0)=g_k(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m$。再令函数 v 是问题

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})v=f(\boldsymbol{x},t)-P(\mathrm{D})w, & 0<t<b,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \mathrm{D}_t^k v(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}$$

的解，则 $u=v+w$ 就是 Cauchy 问题(4.4.39)的解。证毕。

还可以证明双曲型方程的 Cauchy 问题解的惟一性。为了证明 Cauchy 问题解的惟一性，这里不加证明地介绍如下引理。

引理 4　存在只依赖于 $P(\mathrm{D})$ 和 b 的常数 C，使得 $\int_\Omega \mathrm{e}^{-\lambda t}\mid v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant C\int_\Omega \mathrm{e}^{-\lambda t}\mid P(\mathrm{D})v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$。对任意实数 λ 和任意在 $t=b$ 的一个邻域中等于零的 $v\in C^\infty(\bar\Omega)$ 成立，并且 v 还满足 $\mathrm{D}_t^k v(\boldsymbol{x},0)=0,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m$，并使得任何 $\alpha,k,P^{(\alpha,k)}(\mathrm{D})v\in L^2$。

由此引理可以证明如下定理。

定理 4.4.20　若 $P(\boldsymbol{\xi},\tau)$ 是 τ 的 m 次多项式，且 τ^m 项的系数不等于 0，则对

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t), & 0<t<b,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}\tag{4.4.38}$$

的解 u，如果 $\forall\boldsymbol{\alpha},k,P^{(\boldsymbol{\alpha},k)}(\mathrm{D})u\in L^2$，那么 $u\equiv0$，其中 $P^{(\boldsymbol{\alpha},k)}(\mathrm{D})=\mathrm{D}_{\xi}^{\alpha}\mathrm{D}_\tau^k P(\boldsymbol{\xi},\tau)\mid_{\xi=\mathrm{D}_x,\tau=\mathrm{D}_t}$。

证　令 $\rho(t)$ 是 $C_0^\infty(R^1)$ 中满足下列条件的函数：当 $0\leqslant t<\infty$ 时，$0\leqslant\rho(t)\leqslant1$，并且当正数 a 和 ε 满足 $a+2\varepsilon<b$ 时，

$$\rho(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant a+\varepsilon\\ 0, & a+\varepsilon<t\leqslant b\end{cases}$$

对满足方程(4.4.38)的解 u，令 $v=u\rho(\boldsymbol{x})$，则 v 满足引理 4 的条件。对任何实数 λ，有 $\int_\Omega \mathrm{e}^{-\lambda t}\mid v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant C\int_\Omega \mathrm{e}^{-\lambda t}\mid P(\mathrm{D})v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$，因此 $\int_0^a\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mid u\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant C\int_{a+\varepsilon}^b\int_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mid P(\mathrm{D})v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t$。对任意 $\lambda>0$，有

$$\int_0^a\int_{\mathbf{R}^n}\mid u\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant C\mathrm{e}^{-\lambda\varepsilon}\int_{a+\varepsilon}^b\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\lambda t}\mid P(\mathrm{D})v\mid^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\tag{4.4.39}$$

而 $P(\mathrm{D})v=\sum\limits_k P^{(0,k)}(\mathrm{D})u\mathrm{D}_t^k\rho(t)/k!$ 是 L^2 函数。取 a 为小于 b 的任何正数，当 $\lambda\to\infty$ 时，式(4.4.39)的右边在 $0\leqslant t\leqslant a$ 的情况下收敛到 0，所以函数 $u\equiv0$。证毕。

下面介绍常系数双曲型方程的 Cauchy 问题的强解。

定义 4.4.7　对空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的函数 f，若存在 $\mathscr{S}$ 中的函数序列 $\{u_j\}$ 和 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，使得当 $u_j\to u$ 时，$P(\mathrm{D})u_j\to f(W^{m,p}(\Omega))$，则称 u 为 Cauchy 问题(4.4.27)的强解。

先讨论双曲型偏微分方程的齐次初始条件的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x}\in\Omega\\ \mathrm{D}_t^k u(\boldsymbol{x},0)=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega_0,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}\tag{4.4.40}$$

对该问题，其强解有如下定理。

定理 4.4.21 若 $P(\mathrm{D})$是双曲型算子，$f\in L^2(\Omega)$，则 Cauchy 问题(4.4.40)存在强解。

证 由于空间 $C_0^\infty(\Omega)$是 $L^2(\Omega)$的稠密子空间，因此存在 $C^\infty(\Omega)$中的函数序列$\{\phi_j\}$使得 $\phi_j\to f(L^2(\Omega))$。而由定理 4.4.19 知，存在 $u_j\in C^\infty(\Omega)$使得 Cauchy 问题

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u_j=\phi_j, & x\in\Omega\\ \mathrm{D}_t^k u_j(x,0)=0, & x\in\partial\Omega_0,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}$$

得以满足，并且对任何正整数 j 和 k，有 $\mathrm{D}_x^\alpha \mathrm{D}_t^k u_j\in L^2(\Omega)$。因此，$u_j-u_k$ 是满足

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})(u_j-u_k)=\phi_j-\phi_k, & x\in\Omega\\ \mathrm{D}_t^k[u_j(x,0)-u_k(x,0)]=0, & x\in\partial\Omega_0,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}$$

的惟一解。根据定理 4.4.18 的证明，存在常数 C，使得 $\|u_j-u_k\|\leqslant C\|\phi_j-\phi_k\|\to0,j,k\to\infty$。说明$\{u_j\}$为一 Cauchy 序列，因此存在函数 $u\in L^2(\Omega)$使得$\{u_j\}\to u$，$P(\mathrm{D})u_j\to f(L^2(\Omega))$。这说明 u 是 Cauchy 问题(4.4.40)的一个强解。证毕。

为了进一步的讨论，下面介绍两个引理。

引理 5 若 $P(\mathrm{D})$是双曲型算子，$g\in C_0^\infty(\Omega)$，则存在 $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{n+1})$的函数 v,w，使得在 $t=0$ 附近 $v=0$，而在 $t=b$ 附近 $w=0$，并且 $P(\mathrm{D})v=P(\mathrm{D})w=g$。

证 对任意给定的函数 $g\in C_0^\infty(\Omega)$，由 $C_0^\infty(\Omega)$空间中的元素性质知，函数 g 的紧支集在 Ω 内。因此，存在 $\delta>0$，使得对 $0<t<\delta$ 有 $g=0$。再由定理 4.4.19 知，存在函数 $v\in\mathscr{S}$，使得

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})v=f(x,t), & x\in\Omega,\delta<t<b\\ \mathrm{D}_t^k v(x,0)=0, & x\in\partial\Omega_0,0\leqslant k\leqslant m\end{cases}\tag{4.4.41}$$

下面将证明式(4.4.41)中所获得的函数 v 可延拓成所要的函数。延拓函数 v 的方法是：定义 $v(x,t)$在 $0<t<\delta$ 中等于零。另外，根据双曲型算子的定义，算子 $P(\mathrm{D})$中的 D_t^m 的系数不等于零，而函数值 $g(x,\delta)=0$，因此 $t=\delta$ 时，$\mathrm{D}_t^m g(x,\delta)=0$。在式(4.4.41)中的第一个等式两边关于 t 求微分。由于对每个 k，当 $t=\delta$ 时 $\mathrm{D}_t^k g(x,\delta)=0$，因此 $\mathrm{D}_t^k v(x,\delta)=0$，从而该函数 $v\in\mathscr{S}$在 $t=0$ 附近为 0。

同理，可以证明本引理中的函数 w 的存在性。证毕。

引理 6 若 $P(\mathrm{D})$是双曲型算子，则 Cauchy 问题(4.4.40)的弱解惟一。

证 该引理的证明可以转化为证明下述事实：若存在函数 $u\in L^2(\Omega)$使得

$$\langle u,P(\mathrm{D})\varphi\rangle=0,\qquad \varphi\in C_0^\infty(\Omega)\tag{4.4.42}$$

则在 Ω 中 $u\equiv0$。为证此式，设函数 $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$满足 $\psi(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>2\end{cases}$，而函数 $\rho(t)\in C_0^\infty(R)$ 满足 $\rho(t)=\begin{cases}1, & 0<t<b\\ 0, & t<-1/2\end{cases}$。令函数 $\varphi_R(x,t)=w(x,t)\rho(t)\psi(x/R)$，$R$ 为正实数，w 是引理 5 所获得的函数。显然，这样定义的函数 $\varphi_R\in C_0^\infty(\Omega)$，而且在区域 Ω 中

$$P(\mathrm{D})\varphi_R=\rho(t)\sum_\alpha\frac{P^{(\alpha,0)}(\mathrm{D})w\mathrm{D}_x^\alpha\psi(x/R)}{\alpha!}$$

式中，$P^{(\alpha,0)}(\mathrm{D})=\mathrm{D}_\xi^\alpha \mathrm{D}_t^0 P(\xi)|_{\xi=\mathrm{D}}$。再由于 $\mathrm{D}_x^\alpha\psi(x/R)=\frac{1}{R^{|\alpha|}}\mathrm{D}_\xi^\alpha\psi(\xi)|_{\xi=x/R}$，可得

$$\|P(\mathrm{D})(\varphi_R-w)\|\leqslant\|(1-\psi(x/R))P(\mathrm{D})w\|+\max_\alpha\max_x|\mathrm{D}_x^\alpha\psi(x)|\sum_\alpha\frac{\|P^{(\alpha,0)}(\mathrm{D})w\|}{\alpha!R^{|\alpha|}}\tag{4.4.43}$$

式中，$\|\cdot\|$ 是 L^2 范数。由于 $g\in C_0^\infty(\Omega)$，$P(\mathrm{D})w=g$，因此，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在足够大的 R，使得

$$\left(\int_0^b\int_{|x|>R}|P(\mathrm{D})w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}<\frac{\varepsilon}{4} \tag{4.4.44}$$

并且使得

$$\max_{\alpha}\max_{x}|\mathrm{D}_x^\alpha\psi(x)|\sum_{\alpha\neq 0}\frac{\|P^{(\alpha,0)}(\mathrm{D})w\|}{\alpha!R^{|\alpha|}}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.45}$$

从式(4.4.44)和式(4.4.45)可知，式(4.4.43)左边在 R 足够大时小于任意给定的 ε。另一方面，由于当 $|x|<R$ 时，$\psi(x/R)=1$，因此在 R 足够大时，式(4.4.43)左边小于任意给定的 ε，即 $\|P(\mathrm{D})(\varphi_R-w)\|<\varepsilon$。所以 $\lim\limits_{R\to\infty}P(\mathrm{D})(\varphi_R)=P(\mathrm{D})w=g$。对任意 $R>0$ 和满足式(4.4.39)的函数 u，有

$$\langle u,P(\mathrm{D})\varphi_R\rangle=0,\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

对此式两边取极限可得 $\langle u,\varphi\rangle=0$，因此存在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的收敛子列 $\{u_j\}$，它的极限是函数 u。而从上式可以看出，$\|u_j\|=0$，因此 $\|u\|=0$。证毕。

定理 4.4.22 若 Cauchy 问题(4.4.40)中的 $P(\mathrm{D})$ 是双曲型算子，则它的每一个弱解都是一个强解。

证 设 v 为 Cauchy 问题(4.4.40)的一个弱解。而由定理 4.4.21 知，该问题还存在一个强解 u，而且强解也是一个弱解。又由引理 6 知，问题(4.4.40)的弱解惟一，因此 $u=v$。证毕。

关于非齐次初值条件的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}P(\mathrm{D})u=f(x,t), & x\in\mathbf{R}^n,0<t<b\\ \mathrm{D}_t^k u(x,0)=g_k(x), & x\in\mathbf{R}^n,0\leqslant k\leqslant m\end{cases} \tag{4.4.46}$$

的强解，可以参照该问题的弱解的讨论得到如下定理。

定理 4.4.23 对双曲型算子 $P(\mathrm{D})$ 和任意 $f,g_1,g_2,\cdots,g_m\in\mathscr{S}$，Cauchy 问题(4.4.46)存在强解 $u\in\mathscr{S}$。

4.5 线性算子半群理论及其应用

本节介绍 Banach 空间上的连续线性算子半群理论的基本概念，以及以线性发展方程和非线性参数控制系统的状态方程为例，介绍 C_0 半群在偏微分方程理论中的应用。

4.5.1 C_0 半群理论

首先给出 C_0 半群的定义。

定义 4.5.1 记 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 上映射到自身的一族有界线性算子为 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$，如果它满足

(1) $T(0)=I$，为恒等映射；

(2) $T(s)T(t)=T(t+s)$，$\forall\ s,t\geqslant 0$；

(3) $\forall\, x\in\mathscr{B}$，映射 $t\to T(t)x$ 在为连续映射；

则称 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 为一个 C_0 半群或强连续性算子半群。

考虑下列线性常微分方程的解：

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=Au+f\\ u(0)=u_0\end{cases}\tag{4.5.1}$$

式中，A 和 u_0 是常数。由常微分方程理论知，如果 $f(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，则式(4.5.1)的常微分方程的解为

$$u(t)=e^{At}u_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau\tag{4.5.2}$$

该公式中的 e^{At} 作为映 $[0,+\infty)$ 上的连续函数空间到自身的 C_0 半群。因此，式(4.5.1)的常微分方程的解是式(4.5.1)中的初值条件 u_0 和函数 $f(t)$ 的映像之和。

那么，对一般的 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 上的线性算子 A 产生的算子方程

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=Au(t)+f(t)\\ u(0)=u_0\in D\end{cases}\tag{1}$$

其解能否用一个 C_0 半群 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 像式(4.5.2)那样表示出来呢？下面来回答这个问题。

定义 4.5.2 设 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 为 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 上的一个 C_0 半群，如果存在 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的一个子集合 D 以及 D 上的线性算子 A，使得 $\forall x\in D, Ax=\lim\limits_{t\to 0^+}t^{-1}(T(t)-I)x$，则称算子 A 为 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 的**无穷小生成元**，简称**生成元**。$D=\{x\in\mathscr{B}\mid \lim\limits_{t\to 0^+}t^{-1}(T(t)-I)x\}$ 称为 A 的**定义域**。

引理 1 设 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 为 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 上的一个 C_0 半群，则存在常数 $M>0$ 使得 $\forall t>0$

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}\tag{4.5.3}$$

式中，$\omega=\ln M$。

证 按照定义 4.5.1，$\forall \boldsymbol{x}\in\mathscr{B}$，$\{\|T(t)\boldsymbol{x}\|, 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 为有界集。因此，由共鸣定理可以导出：存在 $M=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|T(t)\|<\infty$。为证明 $\forall t>0$，$\|T(t)\|$ 有界性，记 $t=[t]+\{t\}$，其中 $[t]$ 为 t 的整数部分，$\{t\}=t-[t]\in[0,1)$ 为 t 的小数部分。由 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 的性质知

$$\|T(t)\|=\|T(\{t\})[T(1)]^{[t]}\|\leqslant\|T(\{t\})\|\cdot\|T(1)\|^{[t]}\leqslant Me^{\omega t}$$

其中，$\omega=\ln M$。

由引理 1 可以证明如下定理。

定理 4.5.1 若 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是 Banach 空间 $\mathscr{B}$ 的 C_0 半群，则其无穷小生成元 A 是Banach 空间 $\mathscr{B}$ 上的线性稠定闭算子，且对 $x\in D$ 有

$$\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax\tag{4.5.4}$$

其中，$d(T(t)x)/dt=\lim\limits_{h\to 0}h^{-1}(T(t+h)-T(t))x$。

证 由于 $T(t)$ 为线性映射，因此 A 显然是线性的。下面证明 A 是稠定的，即证明 $\forall x\in\mathscr{B}$ 存在 D 中的收敛子列以 x 为极限。为此，记 $x_h=h^{-1}\int_0^h T(t)xdt$，式中 $\int_0^h T(t)xdt$ 为 Bochner 积分。由 C_0 半群的定义知，$T(\tau)x_h=h^{-1}\int_0^h T(t+\tau)xdt$，因此，将 $T(\tau)x_h$ 与 x_h 相减后除以 τ 得

$$\frac{1}{\tau}(T(\tau)x_h-x_h)=\frac{1}{h\tau}\int_0^h[T(t+\tau)-T(t)]xdt=$$

$$\frac{1}{h\tau}\int_{\tau}^{\tau+h}T(t)x\mathrm{d}t-\frac{1}{h\tau}\int_{0}^{h}T(t)x\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{h\tau}\int_{h}^{\tau+h}T(t)x\mathrm{d}t-\frac{1}{h\tau}\int_{0}^{\tau}T(t)x\mathrm{d}t$$

当 $\tau\to0^+$ 时，有

$$\frac{1}{h\tau}\int_{h}^{\tau+h}T(t)x\mathrm{d}t-\frac{1}{h\tau}\int_{0}^{\tau}T(t)x\mathrm{d}t\to\frac{1}{h}[T(h)x-x]$$

按照定义 4.5.2，上式说明 $x_h\in D$。而当 $h\to0^+$ 时，$x_h\to T(0)x=x$，故 D 在 $\mathscr{B}$ 中稠密。

接下来证明式(4.5.4)成立。设 $x\in D$，因此在 $s\to0^+$ 时有 $s^{-1}[T(s)T(t)x-T(t)x]=s^{-1}T(t)[T(s)x-x]\to T(t)Ax$，即 $T(t)x\in D$，且 $\lim\limits_{h\to0^+}h^{-1}[T(t+h)x-T(t)x]=T(t)Ax=AT(t)x$。此式说明(4.5.4)对右导数成立。

为了完成式(4.5.4)的证明，还需要证明左导数，即 $\lim\limits_{h\to0^-}h^{-1}[T(t+h)x-T(t)x]=T(t)Ax=AT(t)x$ 成立。注意到 $\forall\varepsilon>0$ 有

$$\varepsilon^{-1}[T(t)x-T(t-\varepsilon)x]-T(t)Ax=T(t-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\{[T(\varepsilon)x-x]-Ax+Ax-T(\varepsilon)Ax\}$$

利用范数的三角不等式可得到

$$\|\varepsilon^{-1}[T(t)x-T(t-\varepsilon)x]-T(t)Ax\|\leqslant\|T(t-\varepsilon)\|(\|\varepsilon^{-1}[T(\varepsilon)x-x]-Ax\|+\|Ax-T(\varepsilon)Ax\|)$$

又由引理 1 可以导出 $\forall\varepsilon,0\leqslant\varepsilon\leqslant1$，$\|T(t-\varepsilon)\|$ 为有界函数。因此，当 $\varepsilon\to0$ 时上式右端收敛到 0，故 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon^{-1}[T(t)x-T(t-\varepsilon)x]=T(t)Ax$。因此得到式(4.5.4)。

最后证明 A 是闭算子。若 $x_n\in D$，且 $x_n\to x$，$y_n=Ax_n\to y$，则

$$\lim_{t\to0^+}t^{-1}[T(t)x-x]=\lim_{t\to0^-}\lim_{n\to\infty}t^{-1}[T(t)x_n-x_n]=$$
$$\lim_{t\to0^+}\lim_{n\to\infty}t^{-1}\int_0^tT(\tau)Ax_n\mathrm{d}\tau=$$
$$\lim_{t\to0^+}t^{-1}\int_0^tT(\tau)y\mathrm{d}\tau=y$$

因而 $x\in D$ 且 $Ax=y$。这说明 A 为闭算子。证毕。

以下讨论 Hille-Yosida 定理。首先证明下面引理。

引理 2 设 A 是 C_0 半群 $\{T(t)\mid t\geqslant0\}$ 的生成元，则对 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，有预解式

$$R_\lambda(A)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)\mathrm{d}t\tag{4.5.5}$$

其中，ω 由引理 1 确定。

证 该引理等价于在 $\mathscr{B}$ 上

$$I=(\lambda I-A)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)\mathrm{d}t\tag{4.5.6}$$

以及在 D 上

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)\mathrm{d}t(\lambda I-A)=I\tag{4.5.7}$$

由于 $\forall x\in\mathscr{B}$，当 $s\to0^+$ 时

$$s^{-1}(T(s)-I)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t=s^{-1}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}[T(t+s)-T(t)]x\mathrm{d}t=$$

$$\frac{e^{-\lambda s}-1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}\,t - \frac{e^{-\lambda s}}{s}\int_0^s e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t \to$$

$$\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t - x$$

即式(4.5.6)成立。而当 $x\in D$ 时，由式(4.5.4)有

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)Ax\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x\mathrm{d}t =$$

$$e^{-\lambda t}T(t)x\Big|_0^{+\infty} + \lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t =$$

$$-x+\lambda\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t$$

故式(4.5.7)成立。综上所述，引理证毕。

由引理 2 知，当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时，$(\lambda I-A)^{-1}$ 有界且为线性算子，并且从式(4.5.3)和式(4.5.5)可导出

$$\| R_\lambda(A)\| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}\lambda)t}Me^{\omega t}\mathrm{d}t = \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda-\omega}$$

更进一步，注意到对任意 $x\in\mathscr{B}$ 有

$$(\lambda I-A)^{-n}x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{n-1}(\lambda I-A)^{-1}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\mathrm{d}t$$

因此，由式(4.5.3)得

$$\|(\lambda I-A)^{-n}\| \leqslant \frac{M}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{(\omega-\mathrm{Re}\lambda)t}\mathrm{d}t = \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n} \tag{4.5.8}$$

定理 4.5.2 线性稠定闭算子 A 是某个 C_0 半群 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元，当且仅当存在常数 ω，使得 $(\omega,+\infty)\in\rho(A)$，且当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时，对任意整数 n，式(4.5.8)成立。其中 $\rho(A)$ 表示 A 的预解集。

证 必要条件可以直接由引理 2 和式(4.5.8)导出，现证明充分性。对 $\beta>\omega$，令 $A_\beta=\beta(\beta I-A)^{-1}A$，因此当 $x\in D$ 时，$A_\beta x-Ax=(\beta(\beta I-A)^{-1}-I)Ax$。但对任意 $y\in D$，当 $\beta\to+\infty$ 时，$\|\beta(\beta I-A)^{-1}y-Iy\| = \|(\beta I-A)^{-1}Ay\|\leqslant\beta^{-1}\|Ay\|\to 0$。又因 D 在 $\mathscr{B}$ 中稠定，且 $\|\beta(\beta I-A)^{-1}-I\|\leqslant 2$。故当 $\beta\to\infty$ 时，$\|\beta(\beta I-A)^{-1}-I\|\to 0$，即 $\forall x\in D$，有

$$\lim_{\beta\to 0} A_\beta x = Ax \tag{4.5.9}$$

显然，由于 $\|A_\beta\|\leqslant 2\beta$，对固定的 $\beta>0$，A_β 为有界线性算子，于是可以定义 C_0 半群 $T_\beta(t)=e^{tA_\beta}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(A_\beta t)^n}{n!}$，由式(4.5.9)成立知

$$\|T_\beta(t)\| = \|e^{-\beta t}e^{\beta^2 t(\beta I-A)^{-1}}\| \leqslant e^{-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2 t)^n}{n!}\|\beta I-A\|^{-n}\leqslant$$

$$e^{-\beta t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta^2 t)^n}{n}\cdot\frac{M}{(\beta-\omega)^n}\leqslant M\exp\left\{\frac{\beta\omega t}{\beta-\omega}\right\} \tag{4.5.10}$$

故知对任意 $x\in D$，当 $t\in[0,\alpha]$ 时，$T_\beta(t)$ 一致有界，且 $\forall\alpha,\beta>0$ 存在常数 $M_1>0$ 使得

$$\|T_\beta(t)x-T_\alpha(t)x\| = \left\|\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(e^{sA_\beta}e^{(t-s)A_\alpha}x)\mathrm{d}s\right\|\leqslant$$

$$\int_0^t\|e^{sA_\beta}(A_\beta-A_\alpha)e^{(t-s)A_\alpha}x\|\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^s \| e^{sA_\beta} \| \cdot \| e^{(t-s)A_\alpha} \| \cdot \| (-A_\alpha)x \| \mathrm{d}s \leqslant$$
$$M_1 \| (A_\beta - A_\alpha)x \|$$

而 $A_\beta x$ 强收敛到 A（由式(4.5.10)给出），因此 $T_\beta(t)$ 在 $t\in[0,\alpha]$ 上一致强收敛（α 为任意正整数），并记其极限为 $T(t)$。

现在证明 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是 C_0 半群。事实上，$T(t)$ 是线性算子。又由于 $T_\beta(t)$ 为 C_0 半群中的元，因此 $T(0)=\lim\limits_{\beta\to 0} T_\beta(0)=I$。又由于在 t 的任何有穷区间上，$T_\beta(t)$ 一致强收敛于 $T(t)x$，而且 $\forall t_0\geqslant 0$ 有

$$\| T(t)x - T(t_0)x \| \leqslant \| T(t)x - T_\beta(t)x \| + \| T_\beta(t) - T_\beta(t_0)x \| + \| (T_\beta(t_0) - T(t_0))x \|$$

由 T_β 的收敛性知，$\forall \varepsilon>0$，可以取得 β，使 $\| T(t)x-T_\beta(t)x \| <\frac{\varepsilon}{3}$，$\| T_\beta(t_0)-T(t_0)x \| <\frac{\varepsilon}{3}$，而 $T_\beta(t)$ 为强连续算子，对固定的 β，可以取得 $|t-t_0|<\varepsilon$，使得 $\| T_\beta(t)x-T_\beta(t_0)x \| <\frac{1}{3}\varepsilon$。综上可知 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是强连续的。

最后证明 A 是 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 的生成元。设 $\widetilde{A}$ 是 $\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 的生成元，由于对任意 $x\in\mathscr{B}$ 有 $s^{-1}(T_\beta(s)-I)x = s^{-1}\int_0^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_\beta(t)A_\beta x\,\mathrm{d}t$，由以上证明，在 $t\in[0,s]$ 上，$T_\beta(t)A_\beta x$ 一致强收敛到 $T(t)Ax$，因此当 $\beta\to\infty$ 时，有 $s^{-1}(T(s)x-x) = s^{-1}\int_0^s T(t)Ax\,\mathrm{d}t$。再让 $s\to 0^+$ 可得上式的极限为 Ax，这表明当 $x\in D$ 时，即有 $x\in D(\widetilde{A}) = \{\widetilde{A}$ 的定义域$\}$，且 $\widetilde{A}x = Ax$，故对任何 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$，$(\lambda I-\widetilde{A})D(\widetilde{A}) = (\lambda I - A)D = \mathscr{B}$，从而 $D(\tilde{\lambda}) = (\lambda I-\widetilde{A})^{-1}\mathscr{B}\subset D$，推出 $D(\widetilde{A}) = D$。证毕。

定理 4.5.2 实际上给出了算子方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \in D\end{cases} \tag{4.5.11}$$

的解。

定理 4.5.3 设 A 为满足定理 4.5.1 中的所有条件的线性闭算子，$\{T(t)\mid t\geqslant 0\}$ 是以 A 为生成元的 C_0 半群，D 为 A 的定义域，若 $f\in([0,\infty),\mathscr{D})$，$u_0\in D$，则问题(4.5.6)在 $C([0,\infty),D)\cap C^1([0,\infty),\mathscr{B})$ 中存在惟一解

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{4.5.12}$$

证 首先证明惟一性。设 $u(t)$ 是方程(4.5.11)的任意解，则由式(4.5.1)知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T(t-s)u(s)) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s) = T(t-s)f(s)$$

上式两端关于 s 在 $[0,t]$ 上进行积分，得 $u(t)-T(t)u_0 = \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$，即式(4.5.11)的解都具有(4.5.12)的形式，故 $u(t)$ 存在必惟一。

为了证明 $u(t)$ 的存在性，记 $v(t)=T(t)u_0$，因此 $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=Av$，$v(0)=u_0$，现在令 $w(t) =$

$\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s, t \geqslant 0$，则 $w(t) \in C^1([0,\infty),\mathscr{B})$，且 $Aw(t) = \lim\limits_{s\to 0^+} s^{-1}\{w(t+s) - w(t) - \int_0^{t+s} T(t+s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\} = \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} - f(t)$，即 $w(t)\in D$。由于式(4.5.11)是线性的，其解可写成 $v+w$ 的形式，即式(4.5.12)的解形式。证毕。

4.5.2 在发展方程的初始问题中的应用

下面介绍半群理论在研究描述物理现象随时间演变的规律的发展方程方面的应用。主要介绍二阶抛物型方程和二阶双曲型方程。

1. 二阶抛物型方程

设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，具有光滑边界，L 为式(4.4.1)定义的严格椭圆型偏微分算子，显然 $\dfrac{\partial}{\partial t}+L$ 为抛物型算子。以下讨论其初始问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x)\end{cases} \tag{4.5.13}$$

定理 4.5.4 设 $f\in C^1([0,\infty),L^2(\Omega))$，$u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，则存在惟一

$$u \in C^1([0,\infty),H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$$

满足方程(4.5.13)。

证 为了使用定理 4.5.3 的结果，只要证明 L 是某个 C_0 半群的生成元。事实上，把 L 看成 $L^2(\bar{\Omega})$ 上的线性闭算子，其定义域为 $H^2(\Omega)\cap H_0{}^1(\Omega)$。由 L 的性质知，存在 $\alpha_0>0,\beta_0>0$，使得 $\forall u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，有

$$\mathrm{Re}(-Lu,u) \geqslant \alpha_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \beta_0\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{4.5.14}$$

其中，$(\cdot,\cdot)$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的内积。从式(4.5.14)知，当 $\beta>\beta_0$ 时，$\mathrm{Re}((\beta I-L)u,u)\geqslant \alpha_0\|u\|_{H^1(\Omega)}^2$。从而对 $\beta>\beta'>\beta_0$，$\|(\beta I-L)u\|_{L^2(\Omega)}^2\geqslant(\beta-\beta')^2\|u\|_{L^2}^2+2(\beta-\beta')\mathrm{Re}((\beta' I-L)u,u)+\|(\beta' I-L)u\|_{L^2}^2\geqslant(\beta-\beta')^2\|u\|_{L^2}^2$，即 $\beta I-L$ 可逆且 β 属 L 的预解集，且 $\|(\beta I-L)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\beta-\beta'}$，故对任意正整数 k 有

$$\|(\beta I-L)^{-k}\| \leqslant \frac{1}{(\beta-\beta')^k}$$

因此由定理 4.5.2 可导出：存在 C_0 半群 $\{T(t)\,|\,t\geqslant 0\}$，它以 L 为生成元。使用定理 4.5.3 即知，存在惟一的 $u\in C^1([0,\infty),H^2(\Omega))\cap H_0^1(\Omega)$，它是问题(4.5.13)的解。证毕。

2. 二阶双曲型方程

利用定理 4.5.3 还可证明以下二阶双曲型方程的混合问题的解的存在和惟一性。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t} = Lu + f(x,t) \\ u\,|_{t=0} = u_0(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x)\end{cases} \tag{4.5.15}$$

对问题(4.5.15)，可以证明如下定理。

定理 4.5.5 若 $f\in C^1([0,\infty),L^2(\Omega))$，$u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$u_1\in H_0^1(\Omega)$，则存在惟一

的 $u\in C([0,\infty),H^2(\Omega))\cap C^1([0,\infty),H_0^1(\Omega))\cap C^2([0,\infty),L^2(\Omega))$满足问题(4.5.15)。

证　为了方便，记

$$v=\frac{\partial u}{\partial t},\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\boldsymbol{U}_0=\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix},\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&I\\L&0\end{pmatrix}$$

因此，问题(4.5.15)可写成向量形式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{AU}+\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x})\end{cases}\tag{4.5.16}$$

取 $\mathscr{B}=H_0^1(\Omega)\times L^2(\mathbf{R}^n)$，$D=[H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)]\times H_0^1(\Omega)$。先证明存在 β_0 使得 $\beta>\beta_0$ 时，$\beta\in\rho(A)$，即方程组

$$\begin{cases}\beta u=v+f_1, & \forall f_1\in H_0^1(\Omega)\\ \beta v=Lu+f_2, & \forall f_2\in L^2(\Omega)\end{cases}$$

有解。由此可知 u 满足 $\beta^2u=Lu+f_2+\beta f_1\in L^2(\Omega)$。由定理 4.5.3 的证明过程知，存在 β_0 使得 $\beta>\beta_0$ 时，$\beta^2u=Lu+f_2+\beta f_1$ 有解 $u\in W^{2,2}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。进而 $v=\beta u-f_1\in H_0^1(\Omega)$。

接下来证明，对 $\beta>\beta_0$ 有

$$\|(\beta I-A)^{-k}\|\leqslant(\beta-\beta_0)^{-k},k=1,2,\cdots\tag{4.5.17}$$

记 Hilbert 空间 $\mathscr{B}$ 的内积为 $(u,v)_{\mathscr{B}}=(Lu,v)+\beta_0(u,v)$，并取 β_0 满足以上要求而且使得 $(v,v)_{\mathscr{B}}\geqslant(v,v)$(由式(4.5.14)知，这样的 β_0 是可以取到的)。对这样选取的常数 β_0，有

$$\|(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}\|_{\mathscr{B}}^2=\|(\beta_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}\|_{\mathscr{B}}^2+(\beta-\beta_0)^2\|\boldsymbol{U}\|_{\mathscr{B}}^2+2(\beta-\beta_0)\mathrm{Re}((\beta_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathscr{B}}\tag{4.5.18}$$

上式的最后一项有如下估计：注意到

$$((\beta_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathscr{B}}=(\beta_0u+v,u)_{H^1(\Omega)}+(\beta_0v-\boldsymbol{L}u,v)=$$
$$\beta_0(Lu,u)+\beta_0^2(u,u)+\beta_0(v,u)+\beta_0(v,v)$$

故由 Schwartz 不等式和$(Lu,u)+\beta_0(u,u)\geqslant(u,u)$，知

$$\mathrm{Re}((\beta_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})_{\mathscr{B}}\geqslant\beta_0(\|u\|_{L^2}^2-\|v\|_{L^2}\|u\|_{L^2}+\|v\|_{L^2}^2)$$

代入式(4.5.18)就可导出 $\|(\beta_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{U}\|_{\mathscr{B}}^2\geqslant(\beta-\beta_0)^2\|\boldsymbol{U}\|_{\mathscr{B}}^2$。因此 $\|(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant(\beta-\beta_0)^{-1}$，从此式容易证明式(4.5.17)。

综上可知，存在 C_0 半群$\{T(t)\,|\,t\geqslant0\}$以 A 为生成元，再利用定理 4.5.3 即可证明结论。证毕。

算子半群理论及其应用的内容十分丰富，以上只是简单地介绍了 C_0 半群理论及其在偏微分方程中的应用，而且主要介绍了算子半群理论在讨论线性偏微分方程问题尤其是发展方程问题方面的应用。实际上，算子半群理论不但可以应用于线性偏微分方程问题，也可以用于讨论非线性偏微分方程问题，对这方面内容感兴趣的读者可参阅参考文献[4]。下面具体地介绍一个应用算子半群方法所解决的实际问题。

例　描述核反应堆的温度控制的控制问题可以表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}+T_1(t,x), & 0\leqslant x\leqslant1\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=T_3(t)u_1(t), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1}=T_2(t),u\,|_{t=0}=u_2(x)\end{cases}\tag{4.5.19}$$

式中，$u(t,x)$为核反应堆的温度分布，T_1 和 T_2 是冷却设备输入的冷却剂的温度，而 T_3 是由冷却剂的流动速度所决定的热转换系数。这是一个双线性分布参数系统，T_3 在这里作为控制参数。以下假设 $T_1, T_2, T_3, u_2(x), u_1(t) \in L^2(0,1)$，并且两阶导数连续。通过变换 $w=u-(1-x)T_3(t)u_1(t)-xT_2(t)$，可以将问题(4.5.19)化为齐次方程问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial w^2}{\partial x^2} - (1-x)\left[T_3(t)u_1(t)\right]' - x\,T_2'(t) + T_1(t,x) \\ \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0, \quad w\,|_{t=0} = u_2(x) - (1-x)T_3(0)u_1(0) - xT_2(0) \end{cases}$$

定义算子 A 使得 $Aw = a\dfrac{\partial w^2}{\partial x^2}$，并且映 $D(A) = \left\{ w \in L^2(0,1) : \left.\dfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0,1} = 0 \right\}$ 到 $L^2(0,1)$，令 $f(t,x) = T_1(t,x) - (1-x)\left[T_3(t)u_1(t)\right]' - xT'_2(t)$ 和 $u_0(x) = u_2(x) - (1-x)T_3(0)u_1(0) - xT_2(0)$，显然 $A, f(t,x), u_0(x)$ 满足定理 4.5.4 的条件，因此双线性分布参数系统(4.5.19)存在惟一解。

4.6 非线性偏微分方程的一些典型解法

工程和科学研究领域遇到的大多数偏微分方程实际上是非线性偏微分方程，线性偏微分方程只是对它的一种近似。本节介绍求解非线性偏微分方程问题，特别是孤立波解(孤立子)的几种常用方法：Bäcklund 变换，Hirota 双线性直接法，Lax 对和反散射方法。

4.6.1 KdV 方程与孤立子

对孤立子的研究开始于 1834 年 8 月。当时 Russell 正在观察爱丁堡狭窄的 Glasgow 运河上被两匹马拉着快速前进的船，它发现船忽然停下来后，被船所带动的水并没有停下来，它们聚集在船头周围激烈扰动，然后突然以较大的速度朝前运动，形成轮廓分明的巨大孤立波峰，并且在河道中一直保持着起初的形状行进。之后，包括 Russell 在内的多位科学家做了大量的实验研究，终于由丹麦数学家 Korteweg 和 deVries 在 1894 年总结出描述具有孤立波现象的一个浅水波方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right), \qquad \sigma = \frac{1}{3}h^3 - \frac{Th}{\rho g} \tag{4.6.1}$$

式中，η 是表面相对于平衡位置的位移，α 是与流体的运动是否均匀有关的待定常数，g 是重力加速度，T 是表面张力，ρ 是密度。

这个方程就是 KdV 方程的原型。对方程(4.6.1)作变量替换

$$t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}t, \qquad x = -\sigma^{-1/2}\xi, \qquad u = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha$$

则方程(4.6.1)可以化为 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.6.2}$$

后来，这样的方程在描述其他领域的物理现象时也曾经得到过。比如，在对无碰撞的磁流波、分层内波、离子声波、等离子物理、晶格动力学等的研究中也发现了 KdV 方程。

下面求解 KdV 方程的行波解。令 $u(x,t)=\psi(x-at)=\psi(\xi)$ (a 为待定常数)，则方程(4.6.2)可以化为

$$\psi''' - 6\psi\psi' - a\psi' = 0 \tag{4.6.3}$$

然后在上式两边作关于 ξ 的积分后得

$$\psi'' - 3\psi^2 - a\psi = c_1 \tag{4.6.4}$$

式中，c_1 为积分常数。式(4.6.4)两边分别乘以 ψ' 后再关于 ξ 求积分得

$$-\frac{a}{2}\psi^2 - \psi^3 + \frac{1}{2}\psi'^2 - c_1\psi = c_2 \tag{4.6.5}$$

式中，c_2 为积分常数。按照物理意义，一般要求 $\psi, \psi', \psi'' \to 0 (\xi \to \infty)$，因此 $c_1 = c_2 = 0$。从式(4.6.5)可以推出 $-\frac{a}{2}\psi^2 - \psi^3 + \frac{1}{2}\psi'^2 = 0$，即 $\psi^2(a+2\psi) = \psi'^2$。这说明 $\psi(\xi)$ 有极值 $\psi(\xi) = -a/2$，而且由于在对应的极值点有 $\psi'' = a\psi + 3\psi^2 = \frac{1}{4}a^2 > 0$，所以 $\psi(\xi) = -a/2$ 还是 $\psi(\xi)$ 的极小值，故 $a + 2\psi \geqslant 0$。因此，由式(4.6.5)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = \psi\sqrt{a+2\psi} \tag{4.6.6}$$

求解上述方程可以得到如下的**孤立波解**(或称为**孤立子**)

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{a}\,(x - at + c)\right]$$

这里 c 是常数，波速 a 和振幅 $\frac{a}{2}$ 成比例。

从孤立波解 $u(x,t)$ 的表达式可以看出，KdV 方程具有多个孤立波解，每一个孤立波解只有一个波峰。而且，Zabusky 和 Kruskal 通过数值实验发现两个孤立波的相互作用类似于粒子的弹性碰撞。

4.6.2 Bäcklund 变换

人们后来发现有很多方程具有孤立波解，并发展出了很多行之有效的方法，Bäcklund 变换法就是其中的一种。Bäcklund 变换是 Bäcklund 在 1875 年研究负常曲率曲面时引进的，他发现 sine-Gordon 方程

$$u_{\xi\eta} = \sin u \tag{4.6.7}$$

的任何两个解 u_1 和 u_0 之间存在关系

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(u_1 - u_0) = 2\lambda\sin\left(\frac{u_1+u_0}{2}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}(u_1 + u_0) = \frac{2}{\lambda}\sin\left(\frac{u_1-u_0}{2}\right) \tag{4.6.8}$$

式中，λ 是任意常数。该式就是所谓的 Bäcklund 变换。

利用式(4.6.8)的 Bäcklund 变换，只要已知 sine-Gordon 方程的一个解，通过求解方程组(4.6.8)就可得到其另一个解。例如，当取 $u_0 = 0$，式(4.6.8)化为

$$\frac{\partial u_1}{\partial\xi} = 2\lambda\sin\left(\frac{u_1}{2}\right), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial\eta} = \frac{2}{\lambda}\sin\left(\frac{u_1}{2}\right) \tag{4.6.9}$$

因此，可以直接得到 sine-Gordon 方程的一个孤立波解

$$u_1 = 4\arctan\left[\exp\left(\lambda\xi + \frac{1}{\lambda}\eta + c\right)\right] \tag{4.6.10}$$

式中，c 为积分常数。

实际上，利用 Bäcklund 变换不但能够得到 sine-Gordon 方程的解，而且 Bianchi 还发现，

经过两次 Bäcklund 变换后得到的解之间存在函数关系(称为**非线性叠加原理**):令 u_1 和 u_2 分别为 sine-Gordon 方程的已知解 u_0 经过参数 λ_1 和 λ_2 变换后的解,u_{12} 是 u_1 经过参数 λ_2 变换后的解,u_{21} 是 u_2 经过参数 λ_1 变换后的解,则当取适当的参数时,可以使 $u_{12}=u_{21}$(称为可换性原理),而由式(4.6.8)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial \xi}(u_{12}-u_1)=2\lambda_2\sin\left(\dfrac{u_{12}+u_1}{2}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}(u_{12}+u_1)=\dfrac{2}{\lambda_2}\sin\left(\dfrac{u_{12}-u_1}{2}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \xi}(u_{21}-u_2)=2\lambda_1\sin\left(\dfrac{u_{21}+u_2}{2}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \eta}(u_{21}+u_2)=\dfrac{2}{\lambda_1}\sin\left(\dfrac{u_{21}-u_2}{2}\right)\end{cases} \tag{4.6.11}$$

因此,从上面式子中消去带导数部分得到(略去细节)

$$\tan\left(\frac{u_{12}-u_0}{4}\right)=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right)$$

这样就得到了从已知解求 sine-Gordon 方程的其他解的显式表示

$$u_{12}=4\arctan\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\tan\left(\frac{u_1-u_2}{4}\right)\right]+u_0 \tag{4.6.12}$$

由此可以直接求得 sine-Gordon 方程的多个孤立波解。例如,当取 $u_0=0$,由式(4.6.10)可以得到 sine-Gordon 方程的两个孤立波解

$$u_1=4\arctan\left[\exp\left(\lambda_1\xi+\frac{1}{\lambda_1}\eta\right)\right],\qquad u_2=4\arctan\left[\exp\left(\lambda_2\xi+\frac{1}{\lambda_2}\eta\right)\right] \tag{4.6.13}$$

将式(4.6.13)代入式(4.6.12)得到 sine-Gordon 方程的另一个孤立波解

$$u_{12}=4\arctan\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2\sinh\left(\dfrac{v_1-v_2}{2}\right)}{\lambda_1-\lambda_2\cosh\left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)}\right],\qquad \lambda_1\neq\lambda_2 \tag{4.6.14}$$

式中,$v_1=\lambda_1\xi+\dfrac{1}{\lambda_1}\eta$,$v_2=\lambda_2\xi+\dfrac{1}{\lambda_2}\eta$。

上述内容是关于 sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换、可换性原理和非线性叠加原理。Wahlquist 和 Estabrook 在 1973 年发现 KdV 方程也具有 Bäcklund 变换、可换性原理和非线性叠加原理。事实上,可以通过函数变换 $w=\int_{-\infty}^{x}u(\xi)\mathrm{d}\xi$ 将式(4.6.2)的 KdV 方程化成以下方程

$$w_t-3w_x^2+w_{xxx}=0 \tag{4.6.15}$$

而该方程的任意两个解 w_1,w_2 满足

$$\begin{cases}w_{1x}=\lambda-w_{0x}-\dfrac{1}{2}(w_0-w_1)^2\\ w_{1t}=-w_{0t}+(w_0-w_1)(w_{0xx}-w_{1xx})-2(w_{0x}^2+w_{0x}w_{1x}+w_{1x}^2)\end{cases} \tag{4.6.16}$$

若记(4.6.16)中解 w_0 经过参数 λ_1 和 λ_2 变换后的解为 w_1 和 w_2,它们再经过参数 λ_2 和 λ_1 变换后的解分别为 w_{12} 和 w_{21},则当取适当的 λ_1 和 λ_2 参数时,可以使 $w_{12}=w_{21}$(即可换性原理),并且有非线性叠加原理

$$w_{12} = w_0 + 2\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{w_1 - w_2} \tag{4.6.17}$$

因而从 $u=0$ 即 $w=0$ 出发，可以通过式(4.6.16)和(4.6.17)得到 KdV 的孤立波解

$$u_1(x,t) = \lambda_1\ \mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}(x - 2\lambda_1 t)\right], \qquad u_2(x,t) = -\lambda_2\ \mathrm{csch}^2\left[\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}(x - 2\lambda_2 t)\right]$$

这里 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$。而通过式(4.6.17)可以得到

$$u_{12} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_1 \mathrm{sech}^2 v_1 - \lambda_2 \mathrm{csch}^2 w_2)}{\sqrt{\lambda_1}\tanh v_1 - \sqrt{\lambda_2}\tanh v_2} \tag{4.6.18}$$

式中，$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}(x - 2\lambda_1 t)$，$v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\ (x - 2\lambda_2\ t)$。

一般来说，对于偏微分方程

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{4.6.19}$$

的解 u，如果方程组

$$\begin{cases} P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \cdots, v, v_t, v_x, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}, \cdots) = 0 \\ Q(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}, \cdots, v, v_t, v_x, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}, \cdots) = 0 \end{cases} \tag{4.6.20}$$

关于 v 完全可积并且 v 满足一个偏微分方程

$$G(v, v_t, v_x, v_{tt}, v_{tx}, v_{xx}, \cdots) = 0 \tag{4.6.21}$$

则式(4.6.20)定义了方程(4.6.19)到方程(4.6.21)的 Bäcklund 变换。特别地，当方程(4.6.19)和方程(4.6.21)相同时，相应的 Bäcklund 变换称为自 Bäcklund 变换，有时也简称为 Bäcklund 变换。式(4.6.8)和式(4.6.16)都是自 Bäcklund 变换。可以证明，变换

$$v_x = -\frac{1}{2a}uv, \qquad v_t = \frac{1}{4a}u^2 v - \frac{1}{2}vu_x$$

是 Burgers 方程 $u_t + uu_x - au_{xx}$ 到热传导方程 $v_t = av_{xx}$ 的 Bäcklund 变换。

4.6.3 Hirota 双线性直接法

Hirota 给出了一种寻求 KdV 方程(4.6.2)的显式解的方法。他通过变换 $u(x,t) = 2(\ln v)_{xx}$ 将 KdV 方程(4.6.2)化成

$$v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} - \frac{\partial v \partial v}{\partial t \partial x} + v\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - 4\frac{\partial v \partial^3 v}{\partial x \partial x^3} + 3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 = 0 \tag{4.6.22}$$

然后利用算子 D_x^n 和 D_t^m 将式(4.6.22)化成方程

$$(\mathrm{D}_x^4 + \mathrm{D}_x \mathrm{D}_t)(v \cdot v) = 0 \tag{4.6.23}$$

式中的算子 D_x 和 D_t 称为 Hirota 双线性算子，其定义为

$$\mathrm{D}_x^n \mathrm{D}_t^m(\phi \cdot \psi) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'}\right)^m \phi(x,t)\psi(x',t')\ |_{x'=x, t'=t}$$

在方程(4.6.23)中，令解 v 有如下形式

$$v^{(N)} = 1 + \sum_{m=1}^{N} \epsilon^m \tilde{v}^{(m)}$$

其中，ϵ 为一变量。将其代入(4.6.23)后 ϵ 的系数分别为

$$\begin{cases}\varepsilon:\dfrac{\partial^4\tilde{v}^{(1)}}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2\tilde{v}^{(1)}}{\partial x\partial t}=0\\ \varepsilon^2:\dfrac{\partial^4\tilde{v}^{(2)}}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2\tilde{v}^{(2)}}{\partial x\partial t}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{D}_x^4+\mathrm{D}_x\mathrm{D}_t)(\tilde{v}^{(1)}\cdot\tilde{v}^{(1)})\\ \varepsilon^3:\dfrac{\partial^4\tilde{v}^{(3)}}{\partial x^4}+\dfrac{\partial^2\tilde{v}^{(3)}}{\partial x\partial t}=-(\mathrm{D}_x^4+\mathrm{D}_x\mathrm{D}_t)(\tilde{v}^{(1)}\cdot\tilde{v}^{(2)})\\ \vdots\end{cases}\tag{4.6.24}$$

容易看出式(4.6.24)中的第一个等式有如下形式的解

$$\tilde{v}^{(1)}(x,t)=\exp\theta_1(x,t)\tag{4.6.25}$$

其中，$\theta_1(x,t)=k_1x-k_1^3t+\sigma_1$，而 k_1,σ_1 为常数。对其他任意常数 k_2,σ_2，令 $\theta_2(x,t)=k_2x-k_2^3t+\sigma_2$，则 $\tilde{v}^{(1)}(x,t)=\exp\theta_1+\exp\theta_2$ 也满足式(4.6.24)中的第一个等式。将其代入式(4.6.24)中的第二个等式可以求得

$$\tilde{v}^{(2)}(x,t)=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2\exp(\theta_1+\theta_2)$$

另外，注意到式(4.6.24)中的第三个及其以后各等式显然具有零解，即对于 $n\geqslant3$，可以取 $\tilde{v}^{(n)}(x,t)=0$。因此当取 $\varepsilon=1$ 时有

$$v^{(2)}=1+\sum_{m=1}^{2}\varepsilon^m\tilde{v}^{(m)}=1+\exp\theta_1+\exp\theta_2+A_{12}\exp(\theta_1+\theta_2)$$

其中，$A_{12}=\left(\dfrac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2$。该式表示了 KdV 方程的两孤立子的解。将以上过程继续进行下去，可以求得 KdV 方程(4.6.2)的更多孤立子的解。

从以上的示例中可以看出，Hirota 双线性直接法的特点是将非线性方程的求解转换为对线性方程来求解。但是将一个非线性方程化成双线性形式没有特别简单的方法，需要针对具体方程具体处理。如果只是为了求多孤立波解，那么可以先假设方程是双线性的，即 v 有诸如 $v=1+\sum_{m=1}^{N}\tilde{v}^{(m)}$ 的形式，然后代入方程来确定 $\tilde{v}^{(m)}$ 的具体形式。更具体的说，先求和到 1，再令 $\tilde{v}^{(1)}=\exp(kx-\omega t)$ 并求出 k 和 ω 的色散关系。需要注意的是，N 孤立波解中的任一孤立波都满足这一色散关系。

Hirota 双线性直接法也不仅仅对 KdV 方程有效，下面利用 Hirota 双线性形式导出 Cole-Hopf变换，将 Burgers 方程变换成线性的热传导方程。对于 Burgers 方程

$$u_t+2uu_x-u_{xx}=0\tag{4.6.26}$$

在其中令 $u=\dfrac{g}{v}$ 有

$$v(\mathrm{D}_t-\mathrm{D}_x^2)(g\cdot v)=-2\mathrm{D}_x(g\cdot v)-\mathrm{D}_x^2(v\cdot v)\tag{4.6.27}$$

假设等式两边都等于 0，则有

$$(\mathrm{D}_t-\mathrm{D}_x^2)(g\cdot v)=0,\qquad \mathrm{D}_x^2(v\cdot v)=-2\mathrm{D}_x(g\cdot v)\tag{4.6.28}$$

可以看出 $g=-v_x$ 是式(4.6.28)的解。将其代入方程(4.6.26)可得

$$(\mathrm{D}_t-\mathrm{D}_x^2)(v_x\cdot v)=2\mathrm{D}_x((v_t-v_{xx})\cdot v)$$

从上式可以看出，如果 v 是热传导方程 $v_t-v_{xx}=\lambda v$ 的解且 $g=-v_x$，则式(4.6.28)成立，因此 $u=-\dfrac{v_x}{v}$ 使得 Burgers 方程成立。

4.6.4 Lax 对和反散射方法

以下将以 KdV 方程作为例子，介绍求解非线性偏微分方程较普遍适用的反散射方法。这种方法是 1967 年，Gardner，Greene，Kruskal 和 Miura 在研究 KdV 方程(4.6.2)时引进的，他们发现初值问题和一维线性 Schrödinger 问题有密切联系。对于非线性发展方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(u(x,t)) \tag{4.6.29}$$

若存在与方程(4.6.29)的解 $u(x,t)$ 有关的自共轭线性算子 L 和一般线性算子 M，使得特征值问题(称为正散射问题)

$$L\psi(x,t) = \lambda\,\psi(x,t) \tag{4.6.30}$$

的解满足 $\psi_t = M\psi$，并且方程(4.6.29)与

$$L_t \equiv [M,L] = ML - LM \tag{4.6.31}$$

等价(其中 $[M,L]$ 称为**交换子**；算子 L 和 M 称为 **Lax 对**)，则可以按照以下步骤求解方程(4.6.29)：

1) 求正散射问题的特征值特征向量(称为散射数据)；

2) 在 $|x|\to+\infty$ 的渐进状态下确定散射数据随时间 t 的演化规律；

3) 根据所确定的散射数据随时间的演化规律，求解反散射问题，从而获得方程(4.6.29)的解 $u(x,t)$。

上述方法就是求解非线性方程的反散射方法。现以 KdV 方程为例具体说明该方法。

对 KdV 方程，可以取 $L=-\partial^2+u, M=-4\partial^3+6u\partial+3u_x$。显然 $[L,M]\equiv LM-ML=-6uu_x-u_{xxx}, L_t=u_t$，因此，KdV 方程(4.6.2)等价于 $L_t=[L,M]$，KdV 方程可以由反散射方法求解。

$$\begin{cases} -\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \\ \psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi \end{cases} \tag{4.6.32}$$

就是 KdV 方程的 Lax 对。

为了求解 KdV 方程(4.6.2)，按照上述步骤先求解 KdV 方程(4.6.2)的谱问题

$$\psi_{xx} - (u-\lambda)\psi = 0 \tag{4.6.33}$$

按照第 4.6.3 节的原理，在 $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \infty$ 的假设下，特征问题(4.6.33)有解，并且特征问题(4.6.33)的谱有离散和连续值两种。以下分别针对这两种情况进行讨论。

(1) 离散谱的情形：$\lambda=\lambda_n=-k_n^2$

令对应于离散谱 k_n 的特征函数的渐进状态为

$$\psi_n(x,k_n) \sim c_n(t)\exp(-k_n x),\ x\to+\infty$$
$$\psi_n(x,k_n) \sim \bar{c}_n(t)\exp(k_n x),\ x\to-\infty$$

其中函数满足归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x)\mathrm{d}x = 1$，$c_n(t)$ 称为归一化系数。分别关于 x 和 t 对方程(4.6.33)求微分得到

$$\psi_{xxx} - u_x\psi + (\lambda-u)\psi_x = 0$$
$$\psi_{xxt} + (\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda-u)\psi_t = 0$$

定义函数 $R(x,t)=\psi_t+u_x\psi-2(u+2\lambda)\psi_x$ 和 $W(R,\psi)=R\psi_x-R_x\psi$，则利用式(4.6.33)可得

$$\frac{\partial}{\partial x}W(R,\psi)=\psi_{xx}(\psi_t-2u\psi_x-4\lambda\psi_x)-\psi(u_{xxx}\psi-4u_x\psi_{xx})-$$
$$\psi(u\psi_t-\lambda\psi_t-\lambda_t\psi+u_t\psi)+\psi(2u+4\lambda)(u_x\psi-\lambda\psi_x+u\psi_x)=$$
$$\psi^2(\lambda_t-u_t+6uu_x-u_{xxx})=\lambda_t\psi^2 \tag{4.6.34}$$

将式中的 ψ 替换为 ψ_n 以及 λ 替换为 λ_n，并关于 x 积分得到

$$[\psi_{nx}R_n-\psi_nR_{nx}]_{-\infty}^{\infty}=-\frac{k_n^2}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x \tag{4.6.35}$$

而在渐进状态 $|x|\to\infty$ 下，$\psi_n,R_n\to 0$，因此 k_n 为与时间 t 无关的常数，每一个离散谱 k_n^2 都由初始条件决定。

另外，通过将(4.6.35)关于 x 积分，可以得到：当 $|x|\to\infty$ 时，$W(R_n,\psi_n)=\psi_{nx}R_n-\psi_nR_{nx}$ 为与 x 无关的函数。再一次注意到 $\psi_n\to 0,R_n\to 0(|x|\to\infty)$ 可知

$$W(R_n,\psi_n)=\psi_{nx}R_n-\psi_nR_{nx}=0,\quad |x|\to\infty \tag{4.6.36}$$

上式两边关于 x 积分可得

$$R_n=d_n(t)\psi_n$$

式中，$d_n(t)$ 为与 n,t 有关的积分常数。对该式两边同乘以 ψ_n^2，并且考虑到方程(4.6.33)得

$$d_n\psi_n^2=\psi_n(\psi_{nt}+u_x\psi_n-2u\psi_{nx}+4k_n^2\psi_{nx})=$$
$$\frac{1}{2}(\psi_n^2)_t+(u\psi_n^2-2\psi_{nx}^2+4k_n^2\psi_n)_x$$

上式关于 x 积分得到

$$\frac{\mathrm{d}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x\right)}{\mathrm{d}t}=2d_n\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x$$

注意到 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\mathrm{d}x=1$，因此，可以得到对每一个 n 和所有的 t：$d_n=0$。所以

$$R_n=\psi_{nt}+u_x\psi_n-2(u-2k_n^2)\psi_{nx}=0 \tag{4.6.37}$$

而当 $x\to+\infty$ 时，有 $\psi_n(x,t)\sim c_n\exp(-k_nx)$，$u\to 0$。因此，可以从式(4.6.37)导出 $\frac{\mathrm{d}c_n(t)}{\mathrm{d}t}=4k_n^3c_n$，亦即 $c_n(t)=c_n(0)\exp(4k_n^3t)$，其中 $c_n(0)$ 是 $t=0$ 时的归一化常数。

(2) 连续谱的情形：$\lambda=k^2,k\in R$

令对应的特征函数为

$$\psi(x,k)\sim\exp(-\mathrm{i}kx)+b(k)\exp(\mathrm{i}kx),\qquad x\to+\infty \tag{4.6.38}$$
$$\psi(x,k)\sim a(k)\exp(-\mathrm{i}kx),\qquad x\to-\infty \tag{4.6.39}$$

其中，$a(k)$ 称为传播系数，$b(k)$ 称为反射系数。特征函数满足守恒律，即 $|a(k)|^2+|b(k)|^2=1$。像第(1)种情况那样，定义 $R(x,t;\lambda)=\psi_t+u_x\psi-2(u+2\lambda)\psi_x$ 和 $W(R,\lambda)$，然后得到在渐近状态下 $\psi_xR-\psi R_x$ 为关于 t,λ 的函数。又由于在渐进状态下 $u\to 0$，因此由(4.6.39)和 $R(x,t)$ 的定义可得到

$$R(x,t;k)\sim\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}4\mathrm{i}k^3\,a\right)\exp(-\mathrm{i}kx),\qquad(x\to-\infty) \tag{4.6.40}$$

利用式(4.6.38)和式(4.6.40)可以 $\psi_xR-\psi R_x\to 0$，即在渐近状态下 $\psi_xR-\psi R_x=0$。通过在该式两边关于 x 积分，知存在积分常数 $d(t;k)$ 使得

$$R=d(t;k)\psi \tag{4.6.41}$$

因此，当 $x\to-\infty$ 时

$$\frac{da}{dt}+4ik^3a=d(t;k)a \tag{4.6.42}$$

另一方面，按照 $R(x,t)$ 的定义，$x\to-\infty$ 时，$R(x,t;k)\sim\frac{db}{dt}\exp(ikx)+4ik^3(\exp(-ikx)-b\exp(ikx))$，因此，(4.6.41)等价于

$$\frac{db}{dt}\exp(ikx)+4ik^3(\exp(-ikx)-b\exp(ikx))=d(t;k)(\exp(-ikx)+b\exp(ikx)) \tag{4.6.43}$$

注意到 $\exp(ikx)$ 和 $\exp(-ikx)$ 线性无关，由式(4.6.43)得 $\frac{db}{dt}-4ik^3b=d(t;k)b$，$d(t;k)=4ik^3$。从而 $\forall t\geqslant0$，$b(k;t)=b(k;0)\exp(8ik^3t)$，并且式(4.6.42)成为 $\frac{da}{dt}=0$，即 $a(k;t)=a(k;0)$。

综上所述，KdV 方程(4.6.2)的散射数据为：$k_n=$ 常数，$c_n(t)=c_n(0)\exp(4k_n^3t)$，$b(k;t)=b(k;0)\exp(8ik_3t)$，$a(k;t)=a(k;0)$。

最后定义函数

$$F(\xi)=\sum_{n=1}^{N}c_n^2\exp(-k_n\xi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k)\exp(ik\xi)dk$$

式中，N 为离散谱的个数。由此函数构造反散射问题

$$K(x,z;t)+F(x+z;t)+\int_x^{\infty}K(x,y;t)F(y+z;t)dy=0$$

并求得 $K(x,z,t)$，KdV 方程(4.6.2)的解就是 $u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x;t)$。

根据这一方法，给定 $u(x,0)=f(x)$，求解相应的正散射问题和反散射问题就可以得到非线性方程的解，从而把一个非线性方程的求解问题分解为求解一个二阶常微分方程和一个线性积分方程的问题。

这种方法也可以求解其他非线性方程，如非线性 Schrödinger 方程等。

习　题

1. 证明：δ 函数不是局部可积函数。
2. 设 $f_j(x)=\left(1+\frac{x}{j}\right)^j(j=1,2,\cdots)$，求证：$f_j(x)\to e^x$ 在 $\mathscr{D}'(R^1)$ 中成立。
3. 计算 $D^m|x|$，其中 $x\in R^1$。
4. 证明：在 $\mathscr{S}'$ 中方程 $\Delta f=f$ 无非零解。
5. 若 $f(x)\in L^1(R^n)$，证明：$f(x)$ 按 $\mathscr{S}'$ 中定义的广义函数的傅里叶变换与普通的 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 中的傅里叶变换相同。
6. 证明：在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中，范数 $\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant k}|D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}$ 与 $\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|^p$ 等价。
7. 若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的区域，则函数 $h(x)=|x|^{-\alpha}\in W^k(\Omega)$，其中 $k+\alpha<n$。
8. 若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，若成立嵌入 $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$，其中 $1\leqslant p\leqslant+\infty$，则对

$1\leqslant q\leqslant p^*$，$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$为紧嵌入。

9. 若L是有界区域Ω中的椭圆算子，且$Lu=f$和$c<0$，则对$u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$，$\sup\limits_{\Omega}|u|\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}|u|+\sup\limits_{\Omega}|f/c|$。

10. 证明：若L是有界区域Ω之外的一致椭圆算子，且$Lu=0, b^i(x)=0, c(x)=0$，则当u在一条边上有界时，u在$|x|\to 0$下的极限存在。

11. 若在$\mathbf{R}^n$中$\Delta u=f, v(x)=|x|^{2-n}u(x/|x|^2)$，则$\Delta v(x)=|x|^{-2-n}f(x/|x|^2)$。

12. 若$A\in\mathscr{D}$，$u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，则$A\cdot u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，并且有常数$C$(与$A$有关)，使得$\|A\cdot u\|_{W^{m,p}}\leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}$。

13. 若$m\geqslant l$，求证：$W^{m,p}(\Omega)\to W^{l,p}(\Omega)$。

14. 设有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$的边界$\partial\Omega\in C^\infty$，$f\in H^m(\Omega)$，证明：$-\Delta u=f$，$u\in H_0^1(\Omega)$的解$u\in H^{m+2}(\Omega)$。

15. 证明：若X是实数域上的有界连续函数所构成的Banach空间，则对$f\in X$，$(T(t)f)(s)=f(t+s)$定义了满足$\|T(t)\|\leqslant 1(t\geqslant 0)$的$C_0$半群$T(t)$。

16. 证明：

$$\partial^\alpha(u*\psi)=u*\partial^\alpha\psi,\qquad \partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g=f*\partial^\alpha g$$

式中$u,f\in D'$，$g\in E'$，$\psi\in C_0^\infty$。

17. 证明单位分解定理4.2.5。

18. 对于式(4.4.1)所定义的算子L，若其中的系数$c(x)\leqslant 0$，则对应的Dirichlet问题(4.4.2)满足$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$的解存在则惟一。而且这样的解关于初始条件$\varphi(x)$是稳定的。

参考文献

[1] Jose B N. An Introduction to the Theory of Distributions. New York: Marcel Dekker Inc, 1973

[2] Adams R A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975

[3] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 1983

[4] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1983

[5] Schechter M. Modern Methods in Partial Differential Equations. New York: Mcraw-Hill, 1977

[6] 齐民友. 线性偏微分算子引论(上册). 北京:科学出版社, 1992

[7] Hörmander L. 线性偏微分算子. 陈庆益译. 北京:科学出版社, 1980

[8] Folland G B. 偏微分方程. 程少兰, 吴方同译. 武汉:武汉大学出版社, 1989

[9] 陈亚浙, 吴兰成. 二解椭圆型方程与椭圆方程组. 北京:科学出版社, 1991

[10] 陈恕行, 洪家兴. 偏微分方程近代方法. 上海:复旦大学出版社, 1988

[11] 姜礼尚, 陈亚浙. 数学物理方程讲义. 第二版. 北京:高等教育出版社, 1996

[12] 齐民友, 徐超江, 王维克. 现代偏微分方程引论. 武汉:武汉大学出版社, 2000

[13] Dodd R K, Eilbeck J C, Gibbon J D, Morris H C. Soliton and Nonlinear Waves. New York: Academic Press, 1982

[14] 谷超豪. 孤立子理论应用. 杭州:浙江科学出版社, 1990.

[15] 赵怡. 非线性分布参数控制系统理论. 广州:广东科技出版社, 1990

第五章　小波分析及其应用

小波分析是近20年来发展的新学科。它在无条件基和算子有界性等方面的研究发挥了重要的作用。同时，它被工程界称为"数学显微镜"，这是因为在许多场合，小波基以其独有的时频局部化性能代替了 Fourier 分析中传统的正交基。小波分析不仅在数学上发展了调和分析的理论和方法，而且在物理学、信息处理和振动工程中得到了广泛的应用。

概括地说，小波分析是一种变换工具，它将函数(信号、图像和算子等)分解成具有不同频率的分量，然后对不同的分量使用不同的分辨率来研究。对高频分量，采用高分辨率；对低频分量，采用低分辨率。这一特点被誉为"变焦距性质"。此外，快速小波算法是金字塔算法的改进。迄今为止，小波分析已经在信号处理(特别是信号的奇异点位置、奇异性检测和数据压缩)、图像处理(边缘析取和恢复)、数值分析、计算机视觉和分形等领域取得了令人鼓舞的成就。

本章的主要内容有：信号处理的时频局部化问题、框架理论、小波变换、小波包算法、局部正(余)弦基。最后，简单介绍小波分析在信号处理和数值分析中的应用。

5.1　从频率分析到尺度分析

自1807年以来，Fourier 变换在函数空间刻画、微分方程求解、数值计算和信号分析与处理等方面一直是主要的工具之一。然而我们至今还未找到一本合适的"字典"使得函数 f 的性质能由 $\hat{f}$ 准确地"翻译"出来。一个严重的缺陷是 $\hat{f}$ 只反映 f 在整个 $\mathbf{R}$ 上的频率，这是由于"基"函数 $\{e^{it\omega}\}_{\omega\in\mathbf{R}}$ 在时间上没有局部性：$|e^{it\omega}|=1, \forall t\in\mathbf{R}$。而人们往往关心的是在某时刻附近，信号 f 所含频率的多少。本节介绍两种时频局部化格式。

5.1.1　时频局部化问题

在 Hilbert 空间中选定一组标准正交基 $\{e_n\}$，内积 $\langle x,x_n\rangle$ 反映了 x 含第 n 个分量的大小。任何一个元素 x 可展成 $\{e_n\}$ 的线性组合 $x=\sum\limits_n c_n e_n, c_n=\langle x,x_n\rangle$。类似地，一个函数的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{\mathbf{R}} f(t)e^{-it\omega}dt$$

反映 f 所含频率 ω 的分量的大小。Fourier 变换的反演公式(或称重构公式)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}d\omega$$

将函数 f 展成了关于函数系 $\{e^{it\omega}\}_{\omega\in\mathbf{R}}$ 的线性组合，系数为 $\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)$。所不同的只是，求和变成了积分。

前面已经指出，我们需要寻找在时间和频率上都具有局部性的"基"函数。它们是由下面

定义的窗口函数生成。

定义 5.1.1 若函数 g 满足$\int_{\mathbf{R}} t^2 |g(t)|^2 dt < \infty$ 和$\int_{\mathbf{R}} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega < \infty$，则称 g 为**窗口函数**，称(t_0, ω_0)为**窗口中心**，其中

$$t_0 = \frac{1}{\|g\|_2^2}\int_{\mathbf{R}} t |g(t)|^2 dt, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\|\hat{g}\|_2^2}\int_{\mathbf{R}} \omega |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \tag{5.1.1}$$

而分别称 $\Delta g = \frac{1}{\|g\|_2}\left(\int_{\mathbf{R}} (t-t_0)^2 |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ 和 $\Delta\hat{g} = \frac{1}{\|\hat{g}\|_2}\left(\int_{\mathbf{R}} (\omega-\omega_0)^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ 为 g 的**时宽**和**频宽**。

倘若把时间、频率作为横坐标和纵坐标，就得到一个二维欧氏空间，通常称之为**相空间**。一个窗口函数对应相空间中的一个矩形，称它为对应于 g 的 **Heisenberg 矩形**。其中心为(t_0, ω_0)，长和高分别为 $2\Delta_g$ 和 $2\Delta_{\hat{g}}$（图 5.1）。从统计的角度来看，信号 g 的能量主要集中在区间$[t_0-\Delta_g, t_0+\Delta_g]$，其频谱的能量主要集中在区间$[\omega_0-\Delta_{\hat{g}}, \omega_0+\Delta_{\hat{g}}]$。因此矩形的形状和大小反映了信号 g 在时间和频率上的局部化性能的优劣。

给定窗口函数 g，对任何 $f\in L_2(\mathbf{R})$，一方面，内积 $\langle f,g\rangle \approx \int_{|t-t_0|\leqslant\Delta_g} f(t)\overline{g(t)}dt$ 主要依赖于 f 在时间$|t-t_0|\leqslant\Delta_g$ 的值；另一方面，由 Plancherel 定理$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f},\hat{g}\rangle$，其值 $\langle f,g\rangle \approx \frac{1}{2\pi}\int_{|\omega-\omega_0|\leqslant\Delta_{\hat{g}}} \hat{f}(w)\overline{\hat{g}(w)}dw$ 主要依赖于 $\hat{f}$ 在频率带$|\omega-\omega_0|\leqslant\Delta_{\hat{g}}$ 的值。因此，模$|\langle f,g\rangle|$的大小在本质上反映了 f 在时间段$[t_0-\Delta_g, t_0+\Delta_g]$上含有频率 $\omega\in[\omega_0-\Delta_{\hat{g}}, \omega_0+\Delta_{\hat{g}}]$的多少。

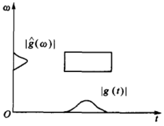


图 5.1 g 的 Heisenberg 矩形

为了弄清 f 在不同时间、不同频率上的分布，需要一个窗口函数族$\{g_\gamma\}_\gamma$，$\gamma\in\Gamma$，Γ 是某个固定的参数集合。这些 $g_\gamma(\gamma\in\Gamma)$对应的 Heisenberg 矩形全体，应该覆盖整个相空间。不同的函数族$\{g_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$对应的覆盖形式也不同。正是这种覆盖的不同，产生了时频局部化格式的不同。于是，γ 的函数 $F(\gamma)=\langle f,g_\gamma\rangle$，$\gamma\in\Gamma$，反映了在 f 在对应 $g_\gamma(\gamma\in\Gamma)$的 Heisenberg 矩形上的性态。在后面将介绍两类窗口函数族。

5.1.2 窗口 Fourier 变换

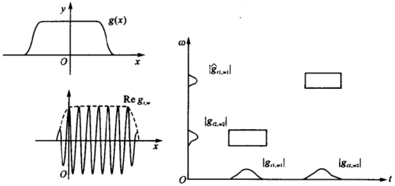
给定窗口函数 g，可以将 g 平移和调幅为 $g_{t,\omega}(u)=e^{iu\omega}g(u-t)$。作为窗口函数，$g_{t,\omega}$所对应相空间的矩形正是对应于 g 的矩形的(t,ω)-平移（图 5.2）。函数族$\{g_{t,\omega}\}_{t,\omega\in\mathbf{R}}$就是我们要找的一种“基”函数，通常也称为 Gabor 族。

定义 5.1.2 设 g 是窗口函数，称

$$T^{\text{win}}f(t,\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(u)\overline{g(u-t)}e^{-i\omega u}du \tag{5.1.2}$$

为 f 的**窗口 Fourier 变换**，只要右边的积分是收敛的。

显然，当 $f\in L_2(\mathbf{R})$时，根据 Schwartz 不等式，$|T^{\text{win}}f(t,\omega)| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$。因此，$T^{\text{win}}f(t,\omega)$不仅仅有意义，而且是 $\mathbf{R}^2$ 上的有界函数。



(a) Gabor原子(实部)　　(b) Gabor原子的Heisenberg矩形

图 5.2　Gabor 原子(实部)和 Gabor 原子的 Heisenberg 矩形

也可从另一角度来理解 $T^{\text{win}}f(t,\omega)$：它是 $f(u)\overline{g(u-t)}$(t 为参数)的 Fourier 变换。一般地选择窗口函数，使得它的能量集中在原点附近，而且在原点附近 $g\approx 1$。这样，$f(u)\overline{g(u-t)}$ 便是 f 在 $u=t$ 附近的局部化，$|T^{\text{win}}f(t,\omega)|^2$ 就是 f 在时间 t 附近的频谱能量分布，它克服了 Fourier 变换在时域上没有局部性的缺点(图 5.3)。

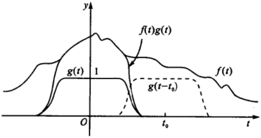


图 5.3　窗口 Fourier 变换

下表是一些常用的窗口函数的名字和它们在[−1/2,1/2]上的值。它们在[−1/2,1/2]外为零。

窗口名称	在[−1/2,1/2]上的值	窗口名称	在[−1/2,1/2]上的值
矩形窗	1	Hamming 窗	$0.54+0.46\cos 2\pi t$
Gauss 窗	e^{-18t^2}	Hanning 窗	$\cos^2 \pi t$

窗口 Fourier 变换有类似于 Fourier 变换的重构公式。

定理 5.1.1　设 g 是窗口函数，则 $\forall f\in L_2(\mathbf{R})$，在 $L_2(\mathbf{R})$ 意义下有

$$f(u)=\frac{1}{2\pi\|g\|_2^2}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}T^{\text{win}}f(t,\omega)g_{t,\omega}(u)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega \tag{5.1.3}$$

即

$$\lim_{A,A',B,B'\to\infty}\left\|f-\frac{1}{2\pi\|g\|_2^2}\int_{-A}^{A'}\int_{-B}^{B'}T^{\text{win}}f(t,\omega)g_{t,\omega}(\cdot)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega\right\|_2=0$$

我们给出一个启发式的“证明”。将下面每一个等式严格化，就是一个真正的证明。

式(5.1.3) 右边的二重积分 =

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}u' \int_{\mathbf{R}} f(u) g(u-t) \overline{g(u'-t)} \mathrm{d}t \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-u')\omega} \mathrm{d}\omega =$$

$$\int_{\mathbf{R}} f(u) 2\pi\delta(u-u') \| g \|_2^2 \mathrm{d}u' = 2\pi \| g \|_2^2 f(u)$$

公式(5.1.3)是函数 f 的一种分解,它将 f 分解为 $\{g_{t,\omega}\}$ 的线性组合。通常称 $\{g_{t,\omega}\}$ 为时间-频率原子或时频原子。窗口 Fourier 变换在历史上起过很重要的作用,现在仍在发挥着作用。然而下面两条定理表明了它的局限性。

首先,讨论窗口函数的时宽和频宽。由前所述,我们希望二者尽可能的小。不幸的是有下述 Heisenberg 测不准原理。

定理 5.1.2 对任何窗口函数 g,成立 $\Delta_g \Delta_{\hat{g}} \geqslant \frac{1}{2}$。等号成立当且仅当 g 有如下形式:$g(u) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha u} g_a(u-b)$,其中 $c \neq 0$,α 为常数,$g_a(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4a}}$。

其次,考虑离散化问题。给定窗口函数 g 和正数 a,b,定义

$$g_{m,n}(u) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mau} g(u-n\mathrm{b}), \qquad m,n \in \mathbf{Z} \tag{5.1.4}$$

将 Tf 离散化的一个途径是选择 g,使函数系(5.1.4)成为 $L_2(\mathbf{R})$的一组标准正交基。这样的话,就有

$$f(u) = \sum_{m,n} T^{\mathrm{win}} f(nb, ma) g_{m,n}(u)$$

这就是式(5.1.3)的离散化。但是下面的结论说明这种 g 是不存在的。

定理 5.1.3 对任何窗口函数 g,函数系(5.1.4)不可能是 $L_2(\mathbf{R})$的标准正交基。

5.1.3 连续小波变换

对于窗口函数 g 产生的时频原子 $g_{t,\omega}$,其时宽和频宽是不变的(即与 t,ω 无关)。然而实际上要求在高频处的时宽小,低频处的时宽大。这正是小波变换的优点。

若实值函数 $\psi \in L_1 \cap L_2(\mathbf{R})$满足 $c_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} \mathrm{d}\omega < \infty$,则称为基本小波。例如,$\psi(u) = (1-u^2)\mathrm{e}^{-u^2/2}$,它是 Gauss 函数的二阶导数,其形状如同墨西哥帽子。

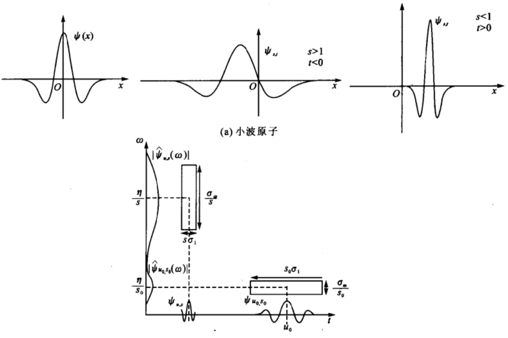
给定基本小波 ψ,定义时间-尺度原子为

$$\psi_{s,t}(u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right), \quad s > 0, t \in \mathbf{R} \tag{5.1.5}$$

先讨论时间-尺度原子 $\psi_{s,t}$在相空间中对应矩形的形状。不难验证 $\Delta_{\psi_{s,t}} = s\Delta_\psi$,$\Delta_{\hat{\psi}_{s,t}} = s\Delta_{\hat{\psi}}$。而 $\psi_{s,t}$的时频中心为$(t+st_0, \omega_0/s)$,其中(t_0, ω_0)为 $\psi_{s,t}$的时频中心。为方便起见,设 $\omega_0 \neq 0$。$\forall s>0$,其对应的原子 $\psi_{s,t}$的频谱集中在 ω_0/s 附近。因此 $s \to 0$ 时,$\psi_{s,t}$是高频原子,此时的时宽 $\Delta_{\psi_{s,t}} \to 0$。反过来,低频原子(对应 $s \to \infty$)的时宽 $\Delta_{\psi_{s,t}} \to \infty$。这就是所谓的"变焦性"。它与窗口 Fourier 变换的原子$\{g_{t,\omega}\}$的时宽、频宽不变性形成鲜明对比(图 5.4)。

在实际应用中,处理信号的高频分量时(此时信号变化剧烈),应该在时间(或位置)上准确;而处理信号低频分量时(此时信号变化缓慢),不必要求在时间(或位置)上很准确。下述变换是符合上述要求的。

定义 5.1.3 设 ψ 是基本小波,$f \in L_2(\mathbf{R})$,定义其连续小波变换如下



(a) 小波原子

(b) 小波原子的Heisenberg矩形

图 5.4　小波原子和小波原子的 Heisenberg 矩形

$$Wf(s,t)=\langle f,\psi_{s,t}\rangle$$

通常称 $\psi_{s,t}$ 中的参数 s 为尺度。譬如说，若想像 $\psi_{1,t}$ 是以分钟为单位的原子，则 $\psi_{1/60,t}$ 是以秒为单位的原子，而 $\psi_{60,t}$ 便是以小时为单位的原子。

连续小波变换有如下重构公式。

定理 5.1.4　设 ψ 是实值基本小波，那么对任何 $f\in L_2(\mathbf{R})$，在 $L_2(\mathbf{R})$ 意义下有

$$f(u)=\frac{2}{c_\psi}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\int_{\mathbf{R}}Wf(s,t)\psi_{s,t}(u)\mathrm{d}t \tag{5.1.6}$$

上面的定义和定理可以推广到复值情形。若复值函数 $\psi\in L_1(\mathbf{R})\cap L_2(\mathbf{R})$ 满足

$$c_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty \tag{5.1.7}$$

则称 ψ 是基本小波。同样地，定义小波变换 $Wf(s,t)=\langle f,\psi_{s,t}\rangle$，则重构公式为

$$f(u)=\frac{1}{c_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\int_{\mathbf{R}}Wf(s,t)\psi_{s,t}(u)\mathrm{d}t \tag{5.1.8}$$

这个等式在 1964 年由数学家 Calderón 首先建立，称为 **Calderón 恒等式**。1984 年由 Grossmann 和 Morlet 重新发现了它，并赋予新的解释。

$L_2(\mathbf{R})$ 中解析信号的全体 $H^2(\mathbf{R}):=\{f\in L_2(\mathbf{R})\mid\hat{f}(\omega)=0,\ \forall\,\omega<0\}$，它们在信号分析中有着重要地位。当然，$\forall\,f\in H^2(\mathbf{R})$，公式(5.1.8)成立。除此之外，若选择基本小波 $\psi\in H^2(\mathbf{R})$，我们还有

$$f(u)=\frac{1}{c_\psi}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\int_{\mathbf{R}}Wf(s,t)\psi_{s,t}(u)\mathrm{d}t,\ \forall\,f\in H^2(\mathbf{R})$$

最后我们举出参考文献[1]中的一个例子：

$$f(t)=\sin(2\pi\nu_1 t)+\sin(2\pi\nu_2)+\gamma(\delta(t-t_1)+\delta(t-t_2))$$

其中，ν_1,ν_2,t_1 和 t_2 是一些适当的数。参考文献[1]指出，若用窗口 Fourier 变换，要么分不清频率 $2\pi\nu_1$ 和 $2\pi\nu_2$，要么分不清位置 t_1 和 t_2。而用小波变换则能较好地同时分辨出频率和位置。

5.1.4 奇异信号在小波变换下的特征

定义 5.1.4 设 n 为非负整数，$n\leqslant\alpha<n+1$。

(1) 称函数 $f(x)$ 在 x_0 具有 **Lip 指数 α**（记为 $f\in \mathrm{Lip}_{x_0}\alpha$），若有 n 次多项式 $p_n(x)$ 以及常数 $A>0$ 使得

$$|f(x_0+h)-p_n(h)|\leqslant A|h|^\alpha,\quad \forall h \tag{5.1.9}$$

(2) 称 f 在区间 (a,b) 为**一致 Lipα** 的，若有常数 A，使得对任何 $x_0\in(a,b)$，存在 n 次多项式 $p_n(x)$，使得不等式(5.1.9)对一切 $x_0+h\in(a,b)$ 成立。

对于函数 f，如何确定其 Lip 指数 α，无论从理论上还是实际应用上看，都是非常重要的。一个经典的工具就是 Fourier 变换。若 $\int_{\mathbf{R}}|\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|)^\alpha \mathrm{d}\omega<\infty$，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致 Lipα。这说明 $|\hat{f}(\omega)|$ 的大小可以确定 f 在 $\mathbf{R}$ 上整体 Lip 指数。然而 Fourier 变换模的大小不能确定 f 在给定点 x_0 的 Lip 指数。下面的定理表明小波变换模的大小可以确定 x_0 的 Lip 指数。为此，我们称函数有 $n+1$ 阶消失矩，若 $x^k\psi(x)\in L_1(\mathbf{R})$ 且

$$\int_{\mathbf{R}}x^k\psi(x)\mathrm{d}x=0,\quad k\leqslant n \tag{5.1.10}$$

定理 5.1.5 设基本小波 ψ 具有紧支集，有 $n+1$ 阶消失矩，$\alpha\in[n,n+1]$。那么以下结论成立。

(1) 若 f 在 x_0 具有 Lip 指数 α，则有 $A>0$ 使得对 x_0 的某邻域中的点 x 和一切 $s>0$ 有

$$|Wf(s,x)|\leqslant A\sqrt{s}(s^\alpha+|x-x_0|^\alpha)$$

(2) 若 $n<\alpha$，且如下条件成立，则 f 在 x_0 具有 Lip 指数 α：存在 $\varepsilon>1/2$ 以及 $A>0$，使得对 x_0 的某邻域中的点 x 和一切 $s>0$ 有

$$|Wf(s,x)|\leqslant As^\varepsilon,\ |Wf(s,x)|\leqslant A\sqrt{s}\left(s^\alpha+\frac{|x-x_0|^\alpha}{|\ln|x-x_0||}\right)$$

5.2 框　架

前一节介绍了窗口 Fourier 变换和连续小波变换。在实际运用中，往往需要把它们离散化，成为函数序列。通常还要求序列具有所谓"完备性"和"稳定性"。这样的序列就是框架。与基不同的是，框架可能是线性相关的。然而在应用中，这种相关性对减少信号的噪声是有益的。本节简单介绍框架的基本概念，给出窗口 Fourier 框架和小波框架的存在条件。

5.2.1 框架及其对偶

定义 5.2.1 一个 Hilbert 空间 H 中的序列 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 称为 H 中的框架，若存在常数 $A>0$

和 $B>0$

$$A\|f\| \leqslant \sum_{n\in\Gamma} |\langle f,\phi_n\rangle|^2 \leqslant B\|f\|, \quad \forall f\in H \tag{5.2.1}$$

使得上述不等式中最优的常数 A 和 B 分别称为框架的**下界**和**上界**。若 $A=B$，则称 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 为**紧框架**。

记 U_T 为 $f\in L_2(\mathbf{R})$ 且满足 $\operatorname{supp}\hat{f}\subseteq[-\pi/T,\pi/T]$ 的全体 f。若 $f\in U_T$，则 f 可由规则抽样 $\{f(nT)\}$ 来重构如下

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(nT)h_T(t-nT), h_T(t)=\frac{T\sin(\pi t/T)}{\pi t} \tag{5.2.2}$$

该抽样定理由 Whittaker 于 1935 年证明，而 Shannon 在 1949 年重新发现了它。框架理论来源于如何利用带有限信号的不规则抽样 $(f(t_n))_n$ 来重构 f（参阅参考文献[4]）。我们将在例 5.3.2 中看到，带有限信号是小波空间的特例。关于一般小波空间中不规则抽样的研究可参阅参考文献[5]等。

假定 ϕ_n 都规范化，即 $\|\phi\|=1,\forall n\in\Gamma$，那么 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 是标准正交基当且仅当 $A=B=1$（见参考文献[2]第三章）。若 $A>1$，则框架是冗余的，其下界 A 表示冗余度。

上述定义中的 Γ 可以是有限集，也可以是无限集。显然 H 中标准正交基是紧框架，而且此时 $A=B=1$。下例说明框架可能是线性相关的。

例 5.2.1　令 $H=\mathbf{R}^2,\phi_1=(1,0)^T,\phi_2=(-\sqrt{3}/2,-1/2)^T,\phi_3=(\sqrt{3}/2-1/2)^T$。则对任何 $f\in\mathbf{R}^2$，有 $\sum_{n=1}^{3}|\langle f,\phi_n\rangle|^2=\frac{3}{2}\|f\|^2$。常数 3/2 表示了该框架的冗余度。

为了从系数序列 $(\langle f,\phi_n\rangle)_n$ 重构 f，需用到其对偶框架。先定义 $H\to l_2(\Gamma)$ 的线性算子 U：

$$Uf=(\langle f,\phi_n\rangle)_{n\in\Gamma}$$

称 U 为框架算子。由式(5.2.1)中的第二个不等式知，U 是 H 的有界线性算子，其范数 $\|U\|\leqslant\sqrt{B}$。

下述定理从理论上保证了重构的可能性。

定理 5.2.1　假设 $\{\phi_n\}$ 是一个框架，其上下界分别为 B 和 A，那么 $\tilde{\phi}_n=(U*U)^{-1}\phi_n\in H$，且

$$\frac{1}{B}\|f\| \leqslant \sum_{n\in\Gamma}|\langle f,\tilde{\phi}_n\rangle|^2 \leqslant \frac{1}{A}\|f\|, \qquad \forall f\in H \tag{5.2.3}$$

和

$$f=\sum_{n\in\Gamma}\langle f,\phi_n\rangle\tilde{\phi}_n=\sum_{n\in\Gamma}\langle f,\tilde{\phi}_n\rangle\phi_n$$

特别地，若 $\{\phi_n\}$ 是一个紧框架，其界为 A，则 $\tilde{\phi}_n=\phi_n/A$。因此，上面的展开式成为

$$f=\frac{1}{A}\sum_{n\in\Gamma}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n \tag{5.2.4}$$

由不等式(5.2.3)知，$\{\tilde{\phi}_n\}_{n\in\Gamma}$ 是 H 中的框架，称之为 $\{\phi_n\}_{n\in\Gamma}$ 的对偶框架。现在，关于 $\{\tilde{\phi}_n\}_{n\in\Gamma}$ 的计算已经有了不少的方法。

在实际中，可以利用框架的冗余度减少噪声的干扰。由于噪声的干扰，实际上被分析的系数为 $Uf+W$，而不是 Uf。如何减弱噪声 W 的影响呢？记 $l_2(\Gamma)\to\operatorname{Im}U$ 的投影算子为 P，则 $P(Uf+W)=Uf+PW$（图 5.5）。我们希望，通过投影算子 P 的作用，使 W 变成 PW，相应的方差也变小。

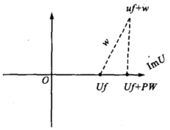


图 5.5 框架的冗余性减噪示意图

定理 5.2.2 假设$\{\phi_n\}$是一个框架，其上下界分别为 B 和 A。设$\|\phi_n\|=1, n\in\Gamma$。若 W 是均值为零的白噪声，其方差 $E(|W(n)|^2)=\sigma^2$，则 $E(|PW(n)|^2)\leqslant\sigma^2/A$。若$\{\phi_n\}$是紧框架，则等式成立。

证 因为 W 是白噪声，$E(W(p)\overline{W(l)})=\delta_{p,l}$。于是 $E(|PW(n)|^2)=E\left(\left(\sum_{p\in\Gamma}W(p)\langle\tilde{\phi}_p,\phi_n\rangle\right)\overline{\left(\sum_{l\in\Gamma}W(l)\langle\tilde{\phi}_l,\phi_n\rangle\right)}\right)=\sigma^2\sum_{l\in\Gamma}|\langle\tilde{\phi}_l,\phi_n\rangle|^2\leqslant\sigma^2/A$。若框架是紧的，该不等式变成等式。证毕。

由此可见，增加框架的冗余度，可减弱噪声，这种方法用于高精度的模拟-数字转换器。在硬件实现方面，增加取样密度(即加大 A)要比提高量化精度容易。

5.2.2 窗口 Fourier 框架

通过抽样，可将窗口 Fourier 变换 $T^{\text{win}}f(t,\omega)$离散为数列$(T^{\text{win}}f(m\omega_0, nt_0))_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$，其中 ω_0, t_0 是常数。记 $g_{m,n}(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\omega u}g(u-nt_0), (m,n)\in\mathbf{Z}^2$。因此，能否用$(T^{\text{win}}f(m\omega_0, nt_0))_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$给出 f 的稳定的表示，就要看$\{g_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$是否成为框架。

运用 Plancherel 公式，不难验证

$$\sum_{m,n}|\langle f,g_{m,n}\rangle|^2=\frac{2\pi}{\omega_0}\int_{\mathbf{R}}|f(u)|^2\sum_{n}|g(u-nt_0)|^2\mathrm{d}u \qquad (5.2.5)$$

利用这个等式，Daubechies 证明了下面必要条件(定理 5.2.3)。

定理 5.2.3(必要条件) 若$\|g\|_2=1$，$\{g_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$是一个框架，则 $2\pi/(u_0\omega_0)\geqslant 1$，而且框架的界满足 $A\leqslant 2\pi/(u_0\omega_0)\leqslant B$。

Daubechies 还给出了$\{g_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$成为框架的一个充分条件。这个条件是对 g 而言的。利用该条件，她还构造了很多例子。由于叙述复杂，在此不列出这个充分条件，只给出一个例子。令 $g(u)=\pi^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$，对于任何满足 $2\pi/(t_0\omega_0)>1$ 的 ω_0, t_0，$\{g_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$成为框架。下表给出了在 $\omega_0=t_0$ 的约束下，对应不同的值 $\omega_0 t_0$，相应框架的上下界的估计。

$\omega_0 t_0$	A	B	A/B
$\pi/2$	3.9	4.1	1.05
$3\pi/4$	2.5	2.8	1.1
π	1.6	2.4	1.5
$4\pi/3$	0.58	2.1	3.6
1.9π	0.09	2.0	22

有意思的是，对于窗口 Fourier 框架，我们可以找到它的一个对偶框架，也是窗口 Fourier 框架。事实上，只要记$\tilde{g}=(U*U)^{-1}g$，则由$\tilde{g}$生成的函数列$\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt_0u}\tilde{g}(u-n\omega_0)\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}}$就是窗口 Fourier 框架。它是原来框架的一个对偶框架。

5.2.3　小波框架

与窗口 Fourier 变换的离散化格式不一样，连续小波变换的离散化格式并非都是等距的。具体方法是，先离散尺度 $s=s_0^{-m}$，$m\in\mathbf{Z}$，其中 $s_0>1$ 为选定的常数；再对每个 m，将 t 离散为 $ns_0^{-m}u_0$，因此，$Wf(s_0^{-m},ns_0^{-m})=\langle f,\psi_{m,n}\rangle$，其中

$$\psi_{m,n}(u)=\sqrt{s_0^m}\psi(s_0^m u-nu_0),\quad m,n\in\mathbf{Z}\tag{5.2.6}$$

我们称形如(5.2.6)的框架为小波框架。

类似于式(5.2.5)我们有

$$\sum_{m,n}|\langle f,\psi_{m,n}\rangle|^2=\frac{2\pi}{t_0}\sum_{m,n}\int_{\mathbf{R}}\hat{f}(\omega)\overline{\hat{f}(\omega+2\pi ns_0^{-m}t_0^{-1})}\,\overline{\hat{\psi}(s_0^m\omega)}\hat{\psi}(s_0^m\omega+2\pi nt_0^{-1})\mathrm{d}\omega\tag{5.2.7}$$

定理 5.2.4(必要条件)　若 $\|\psi\|_2=1$ 且 $\{\psi_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ 是 $L_2(\mathbf{R})$ 的框架，则 ψ 是基本小波(即满足式(5.1.7))且框架 $\{\psi_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}}$ 的界 A 和 B 满足 $A\leqslant\dfrac{c_\psi}{u_0\log_2 s_0}\leqslant B$。

用式(5.2.7)也可以导出一个使 ψ 生成小波框架的充分条件。下面的函数满足该条件

$$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-\frac{1}{4}}(t^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

值得注意的是，对有些小波框架不一定存在对偶的小波框架。这与窗口 Fourier 框架的情形不一样。

5.3　正交小波

若函数系(5.2.6)构成一个紧框架，则由式(5.2.4)显示，式(5.2.6)有点像 $L_2(\mathbf{R})$ 的一组“正交基”，f 在这组“正交基”下的系数就是 $\langle f,\psi_{m,n}\rangle$。然而，框架是可以线性相关的。在理论和实际中，一个重要的问题是，能否找到函数 ψ，使得函数系(5.2.6)真正成为 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基。这样的函数 ψ 称为**正交小波**，由它生成的上述形式的标准正交基称为**正交小波基**。一旦有了基底，很多问题可以转化为线性代数问题。

历史上第一个正交小波就是 Haar 函数(见例 5.3.4)(1909)。20 世纪 80 年代初出现了几个零星例子。1986 年秋，Meyer 和 Mallat 发现了构造正交小波的一个一般方法，即“多尺度分析”，也叫“多分辨率逼近”。利用这个工具，Daubechies 构造出了有紧支集且光滑的正交小波。

本节介绍多尺度分析、正交小波的构造和快速小波算法，并将小波级数与 Fourier 级数进行比较。

5.3.1　多尺度分析

多尺度分析的思想是用一列简单的函数 f_j 来逼近一个一般函数 f。f_j 的简单性表现在它由网格 $\Gamma=2^{-j}\mathbf{Z}$ 上某种取样而得。这些 f_j 的规律还表现在其频率宽度为 $c2^j$。

定义 5.3.1　$L_2(\mathbf{R})$ 的一个多尺度分析(或称多分辨分析)是满足下述条件的闭子空间序列 $V_j\subseteq L_2(\mathbf{R})$，$j\in\mathbf{Z}$。

(1) $V_j\subseteq V_{j+1}$，$\forall j\in\mathbf{Z}$；

(2) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L_2(\mathbf{R})$；

(3) $f\in V_j$ 当且仅当 $f(2x)\in V_{j+1}$；

(4) 在 V_0 中存在函数 ϕ(称为尺度函数)使得 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的标准正交基。

注 由条件(4)知，空间 V_0 是整平移不变的，即对任何 $f\in V_0$，有 $f(x-k)\in V_0$，$\forall k\in\mathbf{Z}$。因此，由条件(3)知，V_j 是 $2^{-j}\mathbf{Z}$ 平移不变的，而且 $\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基。

对 $f\in L_2(\mathbf{R})$，记 P_jf 为 f 在 V_j 中的正交投影(P_jf 就是定义 5.3.1 前的 f_j)，那么

$$P_jf=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f,\phi_{j,k}\rangle\phi_{j,k}\tag{5.3.1}$$

它由序列 $(\langle f,\phi_{j,k}\rangle)_{k\in\mathbf{Z}}$ 惟一确定。这是函数 $\int_{\mathbf{R}}f(x)2^{j/2}\overline{\phi(2^jx-t)}\mathrm{d}x$ 在 Γ_j 上的取样。条件 $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}V_j}=L_2(\mathbf{R})$ 等价于 $\lim_{j\to\infty}\|f-P_jf\|_2=0$，$\forall f\in L_2(\mathbf{R})$。

由条件(1)知，$\phi\in V_1$。于是 $\phi=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle\phi,\phi_{1k}\rangle\phi_{1k}$，$h_k=\sqrt{2}\langle\phi,\phi_{1k}\rangle$，$k\in\mathbf{Z}$，可得下述细分方程

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\phi(2x-k)\tag{5.3.2}$$

称一个函数为可细分的，若它满足方程(5.3.2)。令 $m_0(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{-ik\omega}$，那么方程(5.3.2)可由频率域上的方程来描述

$$\hat{\phi}(\omega)=m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right),\ \omega\in\mathbf{R}\tag{5.3.3}$$

例 5.3.1(Haar 多尺度分析) 最简单的多尺度分析是阶梯函数生成。定义 $V_0=\{f\in L_2(\mathbf{R})\mid f$ 在 $[k,k+1)$ 为常数$\}$。然后定义 $V_j=\{f(2^jx)\mid f\in V_0\}$。那么，$\{V_j\}$ 构成一个多尺度分析。

证 由 V_j 的构造知，$V_j=\{f\in L_2(\mathbf{R})\mid f$ 在 $[2^{-j}k,2^{-j}(k+1))$ 为常数$\}$。于是，V_j 是闭子空间，且定义 5.3.1 中的(1)和(3)成立。取 ϕ 为区间 $[0,1)$ 的特特函数，即 $\phi(x)=1$，$\forall x\in[0,1)$；$\phi(x)=0$，$\forall x\notin[0,1)$。它满足条件(4)。这个函数满足最简单的细分方程 $\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-1)$。

假设 $g\in\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j$，往证 $g=0$。因为 $g\in V_0$，$g(x)=c_0$，$\forall x\in[0,1]$，其中 c_0 为常数。对任何 $j\geqslant0$，$g\in V_{-j}$，于是 g 在区间上 $[0,2^j]$ 为常数。当然这个常数就应该是 c_0。根据不等式 $2^{j/2}|c_0|\leqslant\|g\|_2$ 并令 $j\to\infty$ 知 $c_0=0$。这说明，$g(x)=0$，$\forall x\in[0,1]$。同理可得，对任何 $k\geqslant0$，$g(x)=0$，$\forall x\in[k,k+1]$。因此，$g=0$。即 $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}V_j=\{0\}$。

给定自然数 M，假设 f 是支集包含在 $[-M,M]$ 的连续函数。那么当 $h\to0$ 时，f 的连续模 $\omega(f,h):=\max_{|x-t|\leqslant h}|f(x)-f(t)|\to0$。另一方面，$\forall k$，当 $x\in[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]$ 时，$\left|f(x)-2^j\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\omega(f,2^{-j})$。因此，当 $j\to\infty$ 时 $\|f-P_jf\|_2^2\leqslant\int_{-M}^{M}\omega(f,2^{-j})^2\mathrm{d}x=2M\omega(f,2^{-j})^2\to0$(图 5.6)。

对一般的函数 $f\in L_2(\mathbf{R})$，应用标准的逼近方法，以及上面关于紧支集连续函数的结果，可证 $\lim_{j\to\infty}\|f-P_jf\|_2=0$。这说明定义 5.3.1 中条件(2)的第二条成立。因此，$\{V_j\}$ 构成一个多尺度分析。证毕。

为了介绍反映频率特征的多尺度分析，需要一个关于判断 $\phi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，构成标准正交系的准则。为此，先定义方括号积 $[\hat{f},\hat{f}](\omega)$ 为

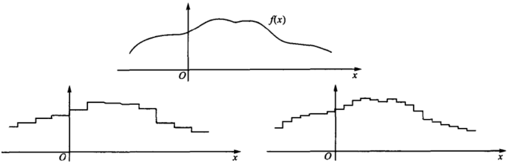


图 5.6　函数在 Haar 多尺度分析子空间中的投影

$$[\hat{f},\hat{f}](\omega):=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{f}(\omega+2k\pi)|^2 \tag{5.3.4}$$

$\forall f\in L_2(\mathbf{R})$，$\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{f}(\omega+2k\pi)|^2\mathrm{d}\omega=\int_{\mathbf{R}}|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega<\infty$，故上面的级数几乎处处收敛。因此，$[\hat{f},\hat{f}](\omega)$ 是几乎处处有意义的。它以 2π 为周期，且在$[0,2\pi]$可积。

命题 5.3.1　$\forall\phi\in L_2(\mathbf{R})$，$\phi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，构成标准正交系的充要条件是

$$[\hat{\phi},\hat{\phi}](\omega)=1 \tag{5.3.5}$$

几乎处处成立

证　由 Plancherel 定理得 $\langle\phi,\phi(\cdot-k)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\hat{\phi}(\omega)\overline{\hat{\phi}(\omega)\mathrm{e}^{-ik\omega}}\mathrm{d}\omega$。于是，

$$\langle\phi,\phi(\cdot-k)\rangle=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi}|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2\mathrm{e}^{ik\omega}\mathrm{d}\omega=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)|^2\mathrm{e}^{ik\omega}\mathrm{d}\omega \tag{5.3.6}$$

因此，$\langle\phi,\phi(\cdot-k)\rangle=\delta_{0,k}$的充要条件是式(5.3.5)成立。证毕。

倘若$[\hat{\phi},\hat{\phi}]$连续，式(5.3.5)变为

$$[\hat{\phi},\hat{\phi}](\omega)=1,\quad\forall\omega\in\mathbf{R} \tag{5.3.7}$$

例 5.3.2(Shannon 多尺度分析)　若某个函数的 Fourier 变换具有紧支集，则称该函数为带有限的。在用带有限信号来近似任何信号时，该例是有用的。定义 $V_0=\{f\in L_2(\mathbf{R})\mid \operatorname{supp}\hat{f}\subseteq[-\pi,\pi]\}$ 以及 $V_j=\{f(2^jx)\mid f\in V_0\}$。那么，$\{V_j\}$构成一个多尺度分析。

证　易知 V_j 是闭子空间。我们指出，对 $f\in L_2(\mathbf{R})$，f 在 V_j 的最佳逼近 P_jf 满足

$$\widehat{P_jf}=\begin{cases}\hat{f}, & |\omega|\leqslant 2^j\pi\\ 0, & |\omega|>2^j\pi\end{cases}$$

它就是 f 的低频分量(图 5.7)。

定义 5.3.1 中条件(1)和(3)成立。我们将条件(2)中第一条的验证留给读者。其第二条的验证是显然的：当 $j\to\infty$时，$\|f-P_jf\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}-\widehat{P_jf}\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_{|\omega|\geqslant 2^j}|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\to 0$。

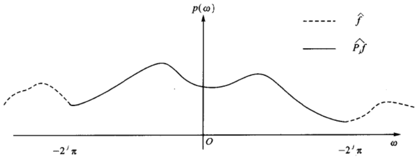


图 5.7　函数在 Shannon 多尺度分析子空间中投影的 Fourier 变换

为证(4)，取 $\phi(x)=\sin \pi x/(\pi x)$。其 Fourier 变换 $\hat{\phi}$ 为

$$\hat{\phi}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant \pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由 Wittaker-Shannon 抽样定理(5.2.2)，$\forall f\in V_0$，$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}f(k)\phi(x-k)$。因此，$\phi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，张成 V_0。再由命题 5.3.1 知，它还是 V_0 的标准正交基。证毕。

为求出 ϕ 满足的细分方程(5.3.2)中的系数，我们定义 2π 周期函数 m_0，它在一个周期的定义如下

$$m_0(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant \pi/2\\ 0, & \pi/2<|\omega|\leqslant \pi\end{cases}$$

容易验证，ϕ 满足 $\hat{\phi}(\omega)=m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$，即式(5.3.3)成立。因此，式(5.3.2)中的系数 h_k 由 $m_0(\omega)=\frac{1}{2}\sum_k h_k e^{-ik\omega}$ 确定。

Haar 多尺度分析在时间域上具有最好的局部性，Shannon 多尺度分析的频率局部性质好。但是，二者分别在频率和时间方面的局部性很差，因此，在实际中都不适用。然而，它们分别从不同的侧面反映了多尺度分析的本质所在。读者只要掌握了它们，理解一般理论就会很容易。实际上，适用的多尺度分析，只是它们二者在时域和频域的“折中”。比如，在例 5.3.2 中 ϕ 在时域上局部性质较差。究其原因，是由于虽然 $\hat{\phi}$ 有紧支集，却不是连续的。下面的例子就是为了克服这一点的。

例 5.3.3(Meyer 多尺度分析)　设 $\theta(\omega)$ 是紧支集的偶函数且无穷次可微，而且满足

$$\theta(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant 2\pi/3\\ 0, & |\omega|>4\pi/3\end{cases}$$

以及 $\theta^2(-\omega)+\theta^2(2\pi-\omega)=1,\omega\in[0,2\pi)$(图 5.8)。定义 ϕ 为 θ 的逆 Fourier 变换，$\phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\theta(\omega)e^{i\omega x}d\omega$。对每个 j，记 V_j 为 $\phi_{j,k}(x)=\sqrt{2^j}\phi(2^jx-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，生成的闭子空间。那么 $\{V_j\}_j$ 是一个多尺度分析。

证　为验证条件 $V_j\subseteq V_{j+1}$，先说明 ϕ 满足某个细分方程。记 $l(\omega)$ 为 $\theta|_{[-2\pi,2\pi]}$ 的 4π 周期延拓，以及 $m_0(\omega)=l(2\omega)$，则 $m_0(\omega)$ 是 2π 周期的无穷次可微函数。我们可以证明式(5.3.3)成立(详细过程从略)。于是，$\phi\in V_1$。由于 V_1 是整平移不变的，$\phi(x-k)\in V_1$，$k\in\mathbf{Z}$。因此，$V_0\subseteq$

V_1。通过尺度伸缩可证 $V_j \subseteq V_{j+1}$，$\forall j \in \mathbf{Z}$。

我们将条件(2)的验证留给读者（或参见参考文献[6]的第二章）。由 V_j 的构造，条件(3)是显然的。剩下条件(4)。对 $\forall \omega \in \mathbf{R}$，在数列 $\{\omega + 2k\pi\}_k$ 中只有两项 $\omega + 2k_0\pi$，$\omega + 2(k_0+1)\pi$ 落在区间 $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ 上。记 $\omega_0 = -(\omega + 2k_0\pi)$，则 $\omega_0 \in [0, 2\pi)$。因此 $[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = |\theta(-\omega_0)|^2 + |\theta(-\omega_0 + 2\pi)|^2 = 1$。应用命题 5.3.1 知，$\phi(x-k)$，$k \in \mathbf{Z}$，是 V_0 的标准正交基，条件(4)满足。证毕。

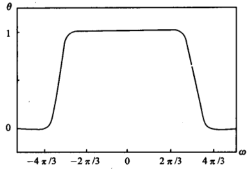


图 5.8　函数 θ 的图形

例 5.3.3 的方法具有一般性，即挑选函数 ϕ，验证 ϕ 满足某个细分方程且 $\phi(x-k)$，$k \in \mathbf{Z}$，构成一组标准正交基。定义 V_j 为下述函数的全体：$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \phi_{j,k}(x)$，其中 $\sum_k |c_k|^2 < \infty$。那么，定义 5.3.1 的条件(1)，(3)和(4)都满足。只要 ϕ 满足很弱的条件，比如说 $\hat{\phi}$ 在原点连续且 $\hat{\phi}(0) \neq 0$，条件(2)亦成立（详细推导见参考文献[6]第二章）。由此得知 $\{V_j\}_j$ 是多尺度分析。我们称它是由 ϕ 生成的多尺度分析，ϕ 是它的尺度函数。

由此可见，重要的是构造可细分函数。而可细分函数的性质完全决定于数列 $(h_k)_k$，或等价地决定于 $m_0(\omega)$。首先要解决的问题是，如何挑选 $m_0(\omega)$。下面给出它需满足的一个条件。

引理 5.3.1　设 ϕ 是正交的尺度函数，则对应的 $m_0(\omega)$ 几乎处处满足

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{5.3.8}$$

而当 m_0 连续时，上式处处成立。进一步，当 $\hat{\phi}$ 在 $\omega = 0$ 连续时

$$m_0(0) = 1 \tag{5.3.9}$$

证　由命题 5.3.1 知，$[\hat{\phi}, \hat{\phi}](\omega) = 1$ 几乎处处成立。另一方面，根据式(5.3.3)有

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 = \\
&\sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \\
&\sum_{k \in \mathbf{Z}} \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi + \pi\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi + \pi\right) \right|^2 = \\
&\left| m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left| m_0\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 [\hat{\phi}, \hat{\phi}]\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

于是式(5.3.1)故几乎处处成立。而当 m_0 连续时，上式处处成立。

由于 ϕ 生成多尺度分析且 $\hat{\phi}$ 在 $\omega = 0$ 连续，则 $\hat{\phi}(0) \neq 0$。（见参考文献[6]中定理 2.2.1）。在式(5.3.3)中令 $\omega = 0$，得式(5.3.9)。证毕。

一般地，关于可细分函数的构造有两种方法。一种是研究定义在时域上的算子 $Qf(x) = \sum_k h_k f(2x - k)$。若其迭代序列 $\{Q^n f\}$ 在 $L_2(\mathbf{R})$ 收敛，则其极限 $\phi \in L_2(\mathbf{R})$ 就是可细分的，这也

是从数值上计算 ϕ 的重要方法(见参考文献[8,9]等)。

另一种是从频率域构造可细分函数 ϕ。步骤如下:选择 2π 周期函数 $m_0(\omega)$,满足式(5.3.8)和式(5.3.9)。假设无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega)$ 在实轴 $\mathbf{R}$ 上收敛。这一点是很容易满足的,比如要求 $m_0(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处可导就可实现。通过 Fourier 变换定义 ϕ,即令

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbf{R} \tag{5.3.11}$$

可以验证,$\|\hat{\phi}\|_2 \leqslant 1$,于是 $\phi \in L_2(\mathbf{R})$。显然,ϕ 是可细分的,因为它满足

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(2^{-1}\omega)\prod_{k=2}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega) = m_0(2^{-1}\omega)\hat{\phi}(2^{-1}\omega)$$

即式(5.3.3)成立。

当然,可细分函数不一定能成为尺度函数。比如 $\phi(x)=\chi_{[0,3]}(x)$ 满足 $\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-3)$,但 $\phi(x-k), k\in\mathbf{Z}$,不是正交系。已有不少文献给出判别 $\phi(x-k), k\in\mathbf{Z}$,是否为标准正交系的准则。其中有 Cohen 条件和 Lawton 条件等(见参考文献[6]中的 2.4.2 和 3.1)。而我们需要的是下述不同形式的准则。

引理 5.3.2 设三角多项式 $m_0(\omega)$ 满足条件式(5.3.8)和式(5.3.9),而且可以分解为

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N Q(\omega)$$

其中,Q 是满足 $\max\limits_{\omega}|Q(\omega)|<2^{N-1/2}$ 的三角多项式,那么 $\phi(x-k), k\in\mathbf{Z}$,是标准正交系。

若 $\phi(x-k), k\in\mathbf{Z}$,是标准正交系,则 ϕ 生成一个多尺度分析。由此可见,不论时域方法还是频域方法,函数 m_0 的选择是决定性的。ϕ 能否生成多尺度分析及(若能的话)多尺度分析的性质都完全依赖于 $m_0(\omega)$。

Daubechies 发现了一串三角多项式 $m_{0,N}, N=1,2,\cdots$,按上述步骤,每个 $m_{0,N}$ 都生成一个尺度分析。下面稍微详细地介绍她的结果(见参考文献[1])。

假定 $m_{0,N}$ 具有形式 $m_{0,N}(\omega)=\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right)^N Q_N(\omega)$,这里 $Q_N(\omega)$ 是待定的实系数三角多项式。首先,求解关于 $|Q_N(\omega)|^2$ 的方程

$$|Q_N(\omega)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\binom{n}{N+n-1}\sin^{2n}\frac{\omega}{2} \tag{5.3.12}$$

Daubechies 将其转化为代数方程,并求出解 $|Q_N(\omega)|^2$ 的具体形式。然后利用 Riesz 引理求 $Q_N(\omega)$。实际上,Riesz 引理还给出了 $Q_N(\omega)$ 的构造方法,其证明既简单又漂亮(见参考文献[6]第 112 页)。

引理 5.3.3(Riesz 引理) 设 $M(\omega)=\sum_{n=0}^{N}a_n\cos n\omega$ 是非负的,而且 a_n 均是实数,那么存在 N 阶三角多项式 $m(\omega)=\sum_{n=0}^{N}b_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}$($b_n$ 均是实数)满足 $|m(\omega)|^2=M(\omega)$。

按照 Riesz 引理选定 $Q_N(\omega)$,那么 $m_{0,N}$ 满足条件式(5.3.3)和式(5.3.9),而且容易从式(5.3.12)验证

$$\max_{\omega}|Q_N(\omega)| < 2^{N-1/2} \tag{5.3.13}$$

利用引理 5.3.2 和式(5.3.13)知，对上述 $m_{0,N}$，由式(5.3.11)定义的 ϕ_N 生成一个多尺度分析。根据整函数与 Fourier 变换的关系可以证明 supp $\phi_N \subseteq [0,2N-1]$。

关于系数 $h_k = h_{k,N}$，$N \leqslant 10$ 的值在参考文献[1]中已经列出。

5.3.2 正交小波的构造

一旦有了多尺度分析，如何构造出正交小波呢？首先来解决 V_1 的子空间 V_0 在 V_1 的正交补的正交基构造问题。一般地，定义 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 的正交补，即 V_{j+1} 为 V_j 与 W_j 的直交和。

引理 5.3.4 设 ϕ 是某个多尺度分析的尺度函数，它满足方程(5.3.2)。定义 V_1 中的函数为

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k g_k \phi(2x-k), \qquad g_k = \overline{h_{1-k}} \tag{5.3.14}$$

那么 $\psi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，是 W_0 的标准正交基。

证 令 $m_1(\omega) = 1/2\sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$，那么

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{5.3.15}$$

而且

$$m_1(\omega) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\,\overline{m_0(\omega+\pi)} \tag{5.3.16}$$

根据条件式(5.3.8)可知矩阵

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega+\pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega+\pi) \end{pmatrix} \tag{5.3.17}$$

几乎处处是酉阵(若 m_0 连续，则处处为酉阵)。利用这个性质以及式(5.3.5)可以证明本引理的结论如下。

首先证明 $\psi\in W_0$，也就是 $\psi\perp V_0$。为此，只须证明 $\langle\psi,\phi(\cdot-k)\rangle=0$，$k\in\mathbf{Z}$。利用 Plancherel 公式，完全类似于式(5.3.6)可以得到 $\langle\psi,\phi(\cdot-k)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\psi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\phi}(\omega+2k\pi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\mathrm{d}\omega$。

另一方面，由于 $[\hat{\phi},\hat{\phi}]=1$，完全类似于式(5.3.10)可以得到 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\psi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\phi}(\omega+2k\pi)} = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{m_1\left(\frac{\omega}{2}\right)} + m_0\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\overline{m_1\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}$。因为，式(5.3.17)几乎处处是酉阵，上式右边几乎处处为零。因此 $\langle\psi,\phi(\cdot-k)\rangle=0$，$k\in\mathbf{Z}$。故 ψ 与 V_0 的正交性，即 $\psi\in W_0$，得证。由 W_0 的结构知，$\psi(x-k)\in W_0$。记 W 为 $\psi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，生成的闭子空间。再一次利用式(5.3.10)的方法，$[\hat{\psi},\hat{\psi}](\omega)=1$(几乎处处)。这说明，$\psi(x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，是 W 标准正交基。

再证 $W=W_0$。假设 $f\in V_1$。那么 f 为 $\phi(2x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，的线性组合。从而有 2π 周期函数 $m(\omega)$ 使得 $\hat{f}(\omega)=m(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$。需要证明，若 $f\perp V_0$，$f\perp W$，则 $f=0$。事实上，由 $f\perp V_0$ 知 $[\hat{f},\hat{\phi}]=0$。分别将式(5.3.3)和 $\hat{f}(\omega)=m(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$ 代入上式，得到

$$m(\omega)\,\overline{m_0(\omega)} + m(\omega+\pi)\,\overline{m_0(\omega+\pi)} = 0$$

同理

$$m(\omega)\,\overline{m_1(\omega)} + m(\omega+\pi)\,\overline{m_1(\omega+\pi)} = 0$$

由二阶矩阵(5.3.17)的性质知，$m(\omega)=0$(几乎处处)，故 $f=0$。引理证毕。

这个引理在很大程度上反映了小波分解的思想，即把一个 $2^{-j}\mathbf{Z}$ 平移不变子空间分解二个 $2^{-j+1}\mathbf{Z}$ 平移不变子空间的直交和(引理中为 $j=1$ 的特殊情形，一般情形完全类似)。由于 $\phi(x-k),k\in\mathbf{Z}$，是 V_0 的标准正交基，$\psi(x-k),k\in\mathbf{Z}$，是 W_0 的标准正交基，从而它们的并集 $\phi(x-k),\psi(x-k),k\in\mathbf{Z}$，是 $V_1=W_0+V_0$ 标准正交基。

通过尺度伸缩，可以同引理 5.3.4 完全一样证明 $2^{j/2}\psi(2^jx-k),k\in\mathbf{Z}$，是 W_j 的标准正交基。由此我们得到下述分解定理。

定理 5.3.1　设 ϕ 是多尺度分析的尺度函数，它满足式(5.3.2)，ψ 由式(5.3.14)定义，那么

$$\psi_{j,k}(x):=2^{j/2}\psi(2^jx-k),\quad j,k\in\mathbf{Z}\tag{5.3.18}$$

是 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基。

证　首先说明函数系(5.3.18)的正交性。由于在同一尺度下(即 j 不变)，定理前面的说明告诉了，当 $k\neq k'$ 时，$\psi_{j,k}$ 和 $\psi_{j,k'}$ 之间的正交性。下面只须说明不同尺度下函数系(5.3.18)的正交性。假设 $j>j'$，注意到 $\psi_{j,k}\perp V_j$，$\psi_{j',k'}\in V_{j'+1}$，而 $V_{j'+1}\subseteq V_j$，从而 $\psi_{j,k}$ 与 $\psi_{j',k'}$ 正交。

再证函数系(5.3.18)的完备性。为此，先指出一个有用的事实：任何 $f\in L_2(\mathbf{R})$，若记 P_jf 和 Q_jf 分别为 f 在 V_j 和 W_j 的正交投影，那么 $P_{j+1}f=P_jf+Q_jf$。重复这个等式，$\forall j'\leqslant j$，得

$$P_{j+1}=Q_jf+Q_{j-1}f+\cdots+Q_{j'}f+P_{j'}f\tag{5.3.19}$$

根据定义 5.3.1 中的条件(2)可以得到 $\lim\limits_{j\to\infty}p_{j+1}f=f$，$\lim\limits_{j'\to-\infty}P_{j'}f=0$。故对任何 $f\in L_2(\mathbf{R})$ 可分解为正交和 $f=\sum\limits_{j\in\mathbf{Z}}Q_jf$。

利用上面等式立刻得到：若 f 与函数系(5.3.18)中所有函数正交(即 $Q_jf=0,\forall j\in\mathbf{Z}$)，则有 $f=0$。定理证毕。

下面利用上述构造小波的一般方法来具体实施于例 5.3.1～例 5.3.3。

例 5.3.4(Haar 小波)　由式(5.3.14)知，小波 ψ 由 $\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1)$ 定义。不难验证

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1/2)\\ -1, & x\in[1/2,1)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

ψ 是 Haar 小波。Haar 在 1909 年利用它来逼近 $L_2(\mathbf{R})$ 函数，甚至可以一致逼近连续函数。

例 5.3.5(Shannon 小波)　由式(5.3.16)知，m_1 满足

$$m_1(\omega)=\begin{cases}0, & |\omega|\leqslant\pi/2\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, & \pi/2<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

因此，小波函数 ψ 满足

$$\hat{\psi}(\omega)=m_1(\omega/2)\hat{\psi}(\omega/2)=\begin{cases}0, & |\omega|\leqslant\pi/2\\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}, & \pi/2<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

故 $\psi(x)=\dfrac{\sin\pi(x-1/2)-\sin 2\pi(x-1/2)}{\pi(x-1/2)}$。$\psi$ 被称为 Shannon 小波。

Haar 小波与 Shannon 小波在以下意义下占据了两个极端位置。Shannon 小波在频率域是完全局部化的，但在空间(时间)变量上局部化很坏；相反地，Haar 小波在空间(时间)变量上

是完全局部化，然而对频率局部化很差。

例 5.3.6(Meyer 小波)　此时 $\hat{\phi}\geqslant 0$，而且

$$\hat{\psi}(\omega)=\sqrt{\hat{\phi}^2(\omega/2)-\hat{\phi}^2(\omega)}\,e^{-i\omega/2}=\theta_1(\omega)e^{-i\omega/2}$$

函数 θ_1 具有以下性质：supp $\theta_1=[-8\pi/3,-2\pi/3]\cup[2\pi/3,8\pi/3]$，$\theta_1$ 为偶函数，无穷次可微。因此 $e^{i\omega/2}\hat{\psi}(\omega)$ 是实值偶函数，其 Fourier 逆变换 $\psi(x+1/2)$ 是 Schwartz 函数类中的元素且为偶函数，从而函数 $\psi_{j,k}$ 本质上支于区间 $I=[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]$。

再看 $\hat{\psi}_{j,k}$ 的频率局部化情况，由于 $\hat{\psi}_{j,k}(\omega)=2^{-j/2}e^{i2^{-j}k\omega}\hat{\psi}(2^{-j}\omega)$，故 $\hat{\psi}_{j,k}(\omega)$ 支于 $2^j2\pi/3\leqslant|\omega|\leqslant 2^j8\pi/3$。它是两个八度长的频率段，其平均频率为 $c2^j$，$c>0$ 为常数。该例中的 ψ 通常被称为 Meyer 小波，由于它不是紧支集的（虽然是速降的），故在细分方程(5.3.2)中，有无穷多个 $h_k\neq 0$，在应用上受到限制。然而该例在小波分析的发展史上有着重要的地位，而且在描述函数空间、分布函数时，不失为一个有效工具(图 5.9)。

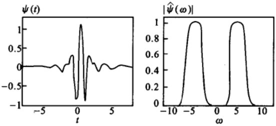


图 5.9　Meyer 小波及其 Fourier 变换

目前在工程界用得最多的是 Daubechies 小波。前面已介绍过其尺度函数 ϕ_N 的构造方法，并知道其支于区间$[0,2N-1]$。其对应的小波 ψ_N 也是具有紧支集的函数(图 5.10)。那么其频率的局部化如何呢？先定义一个指标。对一个函数 f

$$\alpha_f=\sup\left\{\alpha\left|\int_{\mathbf{R}}|\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|)^{\alpha}d\omega<\infty\right.\right\}$$

α_f 越大，则 f 的频率局部化越好。

定理 5.3.2　存在常数 $\lambda\approx 0.275$，当 N 充分大时，有 $\lambda N\leqslant\alpha_{\phi_N},\alpha_{\psi_N}$。

该定理证明参见参考文献[6]。它告诉我们 ψ_N 的光滑度，同时也是 ψ_N 的频率局部化程度。

关于尺度函数和小波函数的光滑性研究，除了频率方法，还有更精致的联合谱半径方法。参考文献[10]首次将联合谱半径方法引进到小波分析领域。至今，联合谱半径的概念和方法已得到充分的发展(见参考文献[11,12])，它们不仅在尺度函数和小波函数的光滑性研究中发挥了关键的作用，而且为构造尺度函数和小波函数提供了非常有效的工具(除了刚才提到的外，还可参见参考文献[2])。

下面考查紧支集正交小波的振动性。对于 Haar 小波，它恰有一次振动(即 ψ 有一次变号)。一般函数的振动性用所谓的消失矩阶数来描述(消失矩的定义见式(5.1.10))。Haar 小波的消失矩也是一阶的。对于 Daubechies 小波 ψ_N，由于 $m_{1,N}(\omega)=-e^{-i\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}$，以及 $m_{0,N}^{(k)}(\pi)=0,0\leqslant k\leqslant N$，因此 $m_{0,N}^{(k)}(0)=0,0\leqslant k\leqslant N$。从而 $\hat{\psi}_N^{(k)}(0)=0,0\leqslant k\leqslant N$。用 Fourier 变

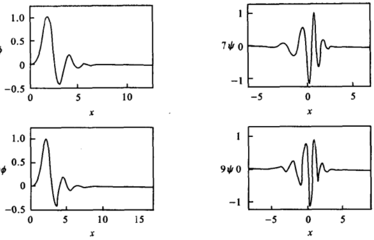


图 5.10 Daubechies 尺度函数和小波

换与导数的关系推出 ψ_N 有 $N+1$ 阶消失矩。

由于 ψ_N 支集为$[-(N-1),N]$，可以证明 ψ_N 至少有 N 次变号。下面用反证法。假设 ψ_N 至多只有 $N-1$ 次变号，则有次数不超过 $N-1$ 的代数多项式 $p(x)$ 使得 $p(x)\psi_N(x)$ 非负，当然也不恒为零，故 $\int_{\mathbf{R}} p(x)\psi_N(x)\mathrm{d}x > 0$。另一方面，$p(x)$ 是 $1,x,\cdots,x^{N-1}$ 的线性组合，由式(5.1.10)得$\int_{\mathbf{R}} p(x)\psi_N(x)\mathrm{d}x = 0$。这与上面的结果矛盾。

对于非紧支集的 Meyer 小波 ψ，也有 $\hat{\psi}_N^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,2,\cdots$。于是$\int_{\mathbf{R}} x^k\psi(x)\mathrm{d}x = 0$，$k = 0,1,2,\cdots$ 积分的存在性由 ψ 为 Schwartz 函数来保证。虽然 Shannon 小波也满足 $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,2,\cdots$，但是 ψ 却不是可积函数。

例 5.3.7 选定 Meyer 小波，计算函数 $f(x)=|x|^{-\alpha}(0<\alpha<1)$ 的小波系数。(参考文献[7]的第一卷，107～108)。

记 $d_k^j=\langle f,\psi_{j,k}\rangle$。通过积分变换，$d_k^j=2^{j\alpha}2^{-j/2}\omega_\alpha(k)$，其中序列 $\omega_\alpha(k)$ 在无穷远处是速降的，即任给 N，当 $|k|\to\infty$ 时，$\omega_\alpha(k)=O(|k|^{-N})$。因此 f 的小波级数为 $|x|^{-\alpha} = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\omega_\alpha(k)2^{j\alpha}\psi(2^jx-k) = \sum_{-\infty}^{\infty}2^{j\alpha}\psi_\alpha(2^jx)$。对所有 $T>0$，上述级数在 $L_1[-T,T]$ 中收敛。

f 的奇点为 $x=0$。对任何 $\varepsilon>0$，若区间$[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]$与$[-\varepsilon,\varepsilon]$不相交(即 $2^{-j}k>\varepsilon$ 或 $2^{-j}(k+1)<-\varepsilon$)，那么对任何 $N\geqslant 1$ 有 $d_k^j=2^{j\alpha}2^{-j/2}O(|k|^{-N})=O(2^{-jN'}), j\to\infty$。此处极限过程为区间$[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]$的长度$\to 0$，即 $j\to\infty$，从而也有$|k|\to\infty$。由上面的估计，当区间$[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]$离奇点足够远，小波系数就足够小。

相反地，类似于 $|x|^{-\alpha}$ 的周期函数 $|\sin x|^{-\alpha}$ 的 Fourier 系数 $c_k=\langle|\sin x|^{-\alpha},\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\rangle=\gamma(\alpha)|k|^{-1+\alpha}+O(|k|^{-3+\alpha})$说明在 $x=0$ 处的奇异性影响所有 c_k 模的大小。

因此，用小波级数进行分析可以使奇性局部化，这只要注意小波系数在什么地方异常地大即可；而 Fourier 级数则完全没有这种能力。关于小波级数与 Fourier 级数的进一步比较，可参阅参考文献[7]的第一卷，3.11 和参考文献[17]的第九章)。

5.3.3　快速小波算法

设 ϕ 为多尺度分析的尺度函数，它满足细分方程。ψ 是式(5.3.14)定义的正交小波。那么对任何 $f\in L_2(\mathbf{R})$，有两种小波分解式

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\phi_{J,k}\rangle\phi_{J,k}+\sum_{j=J}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{5.3.20}$$

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{5.3.21}$$

其中，J 为任何整数。在处理非 $L_2(\mathbf{R})$空间问题时，式(5.3.20)显得比式(5.3.21)更为合适。比如，若 f 是积分为 1 的函数，则式(5.3.21)的右边不能按 $L_1(\mathbf{R})$范数收敛。不然的话，在式(5.3.21)右边逐项积分会得到 $1=0$ 的矛盾结果，而用分解式(5.3.20)就可以避免这个困难。

在式(5.3.20)右边，第一个级数是 f 的一个近似，是 f 的模糊不清的像。为了得到精确的 f，需要补全它的细节。第一级细节由长度为 2^{-J} 的$\langle f,\psi_{J,k}\rangle$给出，第二级细节由长度为 2^{-J-1}的$\langle f,\psi_{J+1,k}\rangle$给出……。式(5.3.20)是分析学家多年来梦想得到的，它是一个具有所有尺度的局部 Fourier 分析。

在很多空间中，式(5.3.20)中的第一个级数(回忆一下，它就是 $P_J f$)是收敛到 f 的。因此在实际中，可选取充分大的 J，使 $f\approx P_J f$。把 $P_J f$ 当成 f，对 $P_J f$ 作小波分解，直至尺度为 2^{-j_0}：

$$P_J f=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\phi_{j_0,k}\rangle\phi_{j_0,k}+\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k} \tag{5.3.22}$$

通过尺度变换，可以认为上式中 $j_0=0$。

我们现在的任务是：已知$\langle f,\phi_{J,k}\rangle$，$k\in\mathbf{Z}$，如何计算出式(5.3.22)中的所有系数。Mallat 给出了快速算法，它不需要按定义求积分，而是用所谓的子带编码算法。为方便起见，令 $c_k^j=\langle f,\phi_{j,k}\rangle$，$d_k^j=\langle f,\psi_{j,k}\rangle$，$k\in\mathbf{Z}$。记 $c^j=(c_k^j)_k$，$d^j=(d_k^j)_k$。

根据细分方程(5.3.2)和(5.3.14)分别得

$$\phi_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_{n-2k}\phi_{j+1,n} \tag{5.3.23}$$

$$\psi_{j,k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g_{n-2k}\phi_{j+1,n} \tag{5.3.24}$$

其中，$g_n=(-1)^n\overline{h_{1-n}}$。于是有分解算法

$$c_k^j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n\overline{h_{n-2k}}c_n^{j+1},\quad d_k^j=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n\overline{g_{n-2k}}c_n^{j+1} \tag{5.3.25}$$

反过来，若已知式(5.3.22)右边的系数 $d^{J-1},\cdots,d^0$ 和 c^0，如何重构 c^J 呢(见图 5.11)？

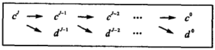


图 5.11

由于 $P_1 f = P_0 f + Q_0 f$，两边与 $\phi_{1,k}$ 作内积得 $c_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n (c_n^0\langle\phi_{0,n},\phi_{1,k}\rangle + d_n^0\langle\psi_{0,n},\phi_{1,k}\rangle)$。

在式(5.3.23)和式(5.3.24)中令 $j=0$，并将所得的关系式代入上式，得重构公式 $c_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n (h_{k-2n}c_n^0 + g_{k-2n}d_n^0)$。一般地有

$$c_k^{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n (h_{k-2n}c_n^j + g_{k-2n}d_n^j) \tag{5.3.26}$$

依次对 $j=0,1,\cdots,J-1$ 使用上面方法，最后得到 c^J。

上述分解与重构即为著名的 Mallat 算法。

在前面的分解和重构中，我们是对函数而言的。下面说明一下对序列而言，分解和重建仍然成立，这只需注意到

$$\sum_k h_k \bar{h}_{k+2m} = \delta_{0,m}, \quad \sum_k g_k \bar{g}_{k+2m} = \delta_{0,m}, \quad \forall m \in \mathbf{Z} \tag{5.3.27}$$

对于离散信号 c^{j+1}（它不必等于$(\langle f,\phi_{j+1,k}\rangle)$），利用式(5.3.25)求出 c^j 和 d^j。利用式(5.3.27)，通过简单计算就可以知道，重构公式(5.3.26)仍然成立。

对于序列$(h_k)_k$ 和$(g_k)_k$，分别定义 $l_2(\mathbf{Z})$ 到 $l_2(\mathbf{Z})$ 的算子：$\forall a=(a_k)_k \in l_2$，$(Ha)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n h_{k-n}a_k$，$(Ga)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n g_{k-n}a_k$。它们都是离散型的卷积算子，也是工程上常说的滤波。H 和 G 的共轭算子分别为 $(H^* a)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \overline{h_{n-k}}a_k$，$(G^* a)_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \overline{g_{n-k}}a_k$。

我们用 $\boxed{2\downarrow}$ 表示下采样算子：$(a_k)_k \to (a_{2k})_k$，即保留偶数下标的子序列。用 $\boxed{2\uparrow}$ 表示上采样算子，即把$(\cdots,a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\cdots)$映到$(\cdots,a_{-2},0,a_{-1},0,a_0,0,a_1,0,a_2,\cdots)$便得到图5.12所示的分解重构图。

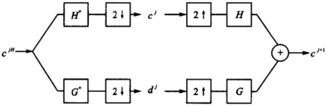


图 5.12 Mallat 算法分解重构图

为了考查 Mallat 算法的运算量，假定序列$(h_k)_k$ 只有 M 项不为零，而且假设输入信号 c^J 是以 2^J 为周期的（在实际应用中也往往如此）。容易验证 $c_k^j = c_{k+2^j}^j$，$d_k^j = d_{k+2^j}^j$，$j \leqslant J-1$，即 c^j，d^j 都以 2^j 为周期。因此对 c^j 和 d^j 而言，只须计算 2^j 个值就足够了。由于(h_n)和(g_n)都只有 M 项不为零，故每个 c_k^j（或 d_k^j）计算，至多需 M 次乘法，$M-1$ 次加法。而分解过程中需计算的 c_k^j, d_k^j 的个数为 $2(2^{J-1}+2^{J-2}+\cdots+1) < 2^{J+1}$。因此分解过程所需的运算量为：乘法 $2MN$ 次，加法 $2(M-1)N$ 次，其中 $N=2^J$ 为输入信号 c^J 的长度。

分解后需存储（传输）的系数为 $d^{J-1},\cdots,d^1,d^0$ 和 c^0，其个数为 $2^{J-1}+2^{J-2}+\cdots+1+1=2^J$。它与 c^J 的长度一样。

在利用小波系数 $d^{J-1},\cdots,d^1,d^0$ 和 c^0 重建 c^J 的过程中，需要计算的系数个数为 $2^{J+1}-2$。计算全部系数需要的乘法次数和加法次数分别与分解时的乘法和加法次数相当。

由此可见 Mallat 算法的运算量为 $O(N)$。从阶上来看，优于快速 Fourier 变换的运算量 $O(N\log_2 N)$。

在上述 Mallat 算法中，似乎 (h_n) 和 (g_n) 的地位是一样的。下面谈谈二者的区别。由式(5.3.9)知，$\sum\limits_n h_n=2$。而由式(5.3.8)和式(5.3.9)知，$m_0(\pi)=0$。再根据式(5.3.16)得到 $m_1(0)=0$，从而 $\sum\limits_n g_n=0$。因此 $(h_n)_n$ 和 $(g_n)_n$ 分别为低通滤波器和带通滤波器。这样，c^j 是 c^{j+1} 的模糊化(光滑化)或近似，d^j 代表 c^{j+1} 与 c^j 之间的差别，通常称为细节信号。举一个例子说明上述想法。

例 5.3.8 选定 Haar 小波。只有 $h_0=h_1=1$，其他 $h_n=0$。c^3 是以 8 为周期的信号，它在一个周期的值为(0,1,2,2,3,3,3,2)。由式(5.3.25)求出 $c^j,d^j,j=2,1,0$。下面列出它们在各自一个周期上的值。

$$c^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,4,6,5)\qquad d^2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$$

$$c^1=\frac{1}{2}(5,11),\qquad d^1=\frac{1}{2}(-3,1)$$

$$c^0=\frac{1}{\sqrt{2}}(8),\qquad d^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}(3)$$

若 c^3 是在单位时间上抽样，则 c^2 的每一项代表的是 c^3 在 2 个单位时间的模糊像。比如 c^2 中的第三项 $6/\sqrt{2}$ 是 c^3 中第五和第六个单位时间上的值 3 和 3 的模糊。类似地，c^1 中的每一项代表 c^3 在 $2^2=4$ 个单位时间上的模糊。由此也知道了 c^j 是原始信号 c^J 在不同尺度下的模糊(或称为近似)。

d^2 中的每一项代表了 c^3 在第 $2k+1$ 个单位时间与第 $2k+2$ 单位时间上二个值的差别，$k=0,1,2,3$。当这两个值相差不大时，对应的小波系数也就小。比如在 c^3 中第三项与第四项相等，它对应于 d^2 中第二项为零；c^3 中第五项和第六项相等，对应 d^2 中第三项为零。对 d^1 也可作上述解释，即它描述了 c^2 的值的变化。比如 c^2 中第一项与第二项相差较大，对应的小波系数为 $-3/2$，而 c^2 中第三项与第四项相差较小，对应的小波系数为 $1/2$。由于 c^2 是 c^3 在 2 个单位时间上的近似，我们也可以直接认为 d^1 表现了 c^3 每 2 个单位时间上的值的变化。由于 c^3 中第一个 2 个单位时间上的值(0,1)，与第二个 2 个单位时间上的值(2,2)相差较多，故对应的小波系数 $-3/2$ 较大(指绝对值)。同理，d^0 的值反映了 c^3 在第一个 4 个单位时间上的值(0,1,2,2)与第二个 4 个单位时间上的值(3,3,3,3,2)的差别。

现在来看一下离散信号的 Mallat 算法的能量守恒问题。此时，仅仅假定 $m_0(\omega)$ 满足式(5.3.8)和式(5.3.9)(即，并不假定 $m_0(\omega)$ 能生成一个多尺度函数来分析)。此时，式(5.3.17)是酉阵。引入记号

$$P_{00}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\nolimits_k h_{2k}\mathrm{e}^{-ik\omega},\qquad P_{01}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\nolimits_k h_{2k+1}\mathrm{e}^{-ik\omega}$$

$$P_{10}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\nolimits_k g_{2k}\mathrm{e}^{-ik\omega},\qquad P_{11}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\nolimits_k g_{2k+1}\mathrm{e}^{-ik\omega}$$

由于下述等式(参看参考文献[6]第 140 页)

$$\begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_0(\omega+\pi) \\ m_1(\omega) & m_1(\omega+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{00}(2\omega) & P_{01}(2\omega) \\ P_{10}(2\omega) & P_{11}(2\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{-i\omega}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

其中等式的左边和右边第二个矩阵是酉阵,因此,等式的右边第一个矩阵

$$P(\omega) := \begin{pmatrix} P_{00}(2\omega) & P_{01}(2\omega) \\ P_{10}(2\omega) & P_{11}(2\omega) \end{pmatrix}$$

亦是酉阵。记 $c^j(\omega) = \sum_k c_k^j e^{-ik\omega}$, $d^j(\omega) = \sum_k d_k^j e^{-ik\omega}$。众所周知,我们有

$$\sum_k |c_k^j|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |c^j(\omega)|^2 d\omega, \quad \sum_k |d_k^j|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |d^j(\omega)|^2 d\omega \tag{5.3.28}$$

再记 $c_0^{j+1}(\omega) = \sum_k c_{2k}^{j+1} e^{-ik\omega}$, $c_1^{j+1}(\omega) = \sum_k c_{2k+1}^{j+1} e^{-ik\omega}$,则小波分解算法可以用下面的等式描述

$$\begin{pmatrix} c^j(\omega) \\ d^j(\omega) \end{pmatrix} = P(\omega) \begin{pmatrix} c_0^{j+1}(\omega) \\ c_1^{j+1}(\omega) \end{pmatrix}$$

由于矩阵 $P(\omega)$ 的酉性,有 $|c^j(\omega)|^2 + |d^j(\omega)|^2 = |c_0^{j+1}(\omega)|^2 + |c_1^{j+1}(\omega)|^2$。对上述等式在 $[0,2\pi]$ 积分再除以 2π,得 $\sum_k (|c_k^j|^2 + |d_k^j|^2) = \sum_k (|c_{2k}^{j+1}|^2 + |c_{2k+1}^{j+1}|^2) = \sum_k |c_k^{j+1}|^2$。由它得出,$\forall j_0 < J$ 有能量守恒公式

$$\sum_k |c_k^J|^2 = \sum_k |c_k^{j_0}|^2 + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k |d_k^j|^2$$

上式在正交小波分解时可由式(5.3.22)立刻推出。但是我们现在仅仅在假定矩阵(5.3.17)为酉阵的条件下得到了该公式。

对于以 $N=2^J$ 为周期的信号,上式有它的类似结果:$\forall\, 0 \leqslant j_0 \leqslant J-1$,

$$\sum_{k=0}^{2^J-1} |c_k^J|^2 = \sum_{k=0}^{2_0^J-1} |c_k^0|^2 + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} |d_k^j|^2 \tag{5.3.29}$$

此时,c^J 等同于一个 $N=2^J$ 向量 $(c_0^J, c_1^J, \cdots, c_{N-1}^J)$。Mallat 算法可以看成是 N 维向量空间 $\mathbf{C}^N$ 上的线性变换,它把 c^J 映到 $(d^{J-1}, d^{J-2}, \cdots, d^{j_0}, c^{j_0})$。后者也等同于一个 N 维向量。式(5.3.29)告诉我们,Mallat 算法是 $\mathbf{C}^N$ 中的保范变换,即是酉变换。根据线性代数的知识,$(d^{J-1}, d^{J-2}, \cdots, d^{j_0}, c^{j_0})$ 是 c^J 在另一组标准正交基下的表示。这一组标准正交基就是所谓的离散小波基(在通常应用中并不需要写出基的具体分量)。以 Haar 滤波器 $h_0 = h_1 = 1$ 为例写出 $N=2^3$ 时的离散小波基为行向量的矩阵如下:

$$
W=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}
$$

若把多尺度分析中的 V_3 理解为目前的 2^3 维向量空间，那么矩阵 $\boldsymbol{W}$ 中第一行相当于 V_0 的基，第二行相当于 W_0 的基，第三、四行相当于 W_1 的基，第五至第八行相当于 W_2 的基。$\forall x\in\mathbf{R}^8$ 在 Haar 小波基下的系数向量 $(c_0^0,d_0^0,d_0^1,d_1^1,d_0^2,d_1^2,d_2^2,d_3^2)^{\mathrm{T}}$ 就是 Wx。

最后谈谈高维 Mallat 算法。它既可以用一维的张量积形式，也可以用一般的方法。我们以二维为例介绍前者，后者的介绍可参见参考文献[6]。

设二维信号 $c^J=(c^J_{n_1n_2})_{n_1n_2}$，分解公式为

$$
\begin{cases}
c^j_{k_1,k_2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n_1n_2}\bar{h}_{n_1-2k_1}\bar{h}_{n_2-2k_2}c^{j+1}_{n_1,n_2} \\
d^{1,j}_{k_1,k_2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n_1n_2}\bar{h}_{n_1-2k_1}\bar{g}_{n_2-2k_2}c^{j+1}_{n_1,n_2} \\
d^{2,j}_{k_1,k_2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n_1n_2}\bar{g}_{n_1-2k_1}\bar{h}_{n_2-2k_2}c^{j+1}_{n_1,n_2} \\
d^{3,j}_{k_1,k_2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n_1n_2}\bar{g}_{n_1-2k_1}\bar{g}_{n_2-2k_2}c^{j+1}_{n_1,n_2}
\end{cases}
\tag{5.3.30}
$$

c^j 是 c^{j+1} 的近似。$d^{1,j}$ 反映 c^{j+1} 沿水平方向的变化，$d^{1,j}$ 反映 c^{j+1} 沿垂直方向的变化，而 $d^{1,j}$ 则对应 c^{j+1} 沿对角线 $x=y$ 方向的变化。

二维小波变换的重构公式为

$$
\begin{aligned}
c^{j+1}_{k_1,k_2} = \frac{1}{2}\Big(&\sum_{n_1n_2}h_{k_1-2n_1}h_{k_2-2n_2}c^j_{n_1,n_2}+\sum_{n_1n_2}h_{k_1-2n_1}g_{k_2-2n_2}d^{1,j}_{n_1,n_2}+ \\
&\sum_{n_1n_2}g_{k_1-2n_1}h_{k_2-2n_2}d^{1,j}_{n_1,n_2}+\sum_{n_1n_2}g_{k_1-2n_1}g_{k_2-2n_2}d^{1,j}_{n_1,n_2}\Big)
\end{aligned}
\tag{5.3.31}
$$

与一维情形一样，分解和重建的运算量均为 $O(N)$，N 为输入数据的长度。

5.3.4 小波与函数空间

小波的一个有趣特点是，它不仅能成为 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基，而且还为许多其他空间提供

无条件基。

先回顾一下，Banach 空间 E 中的序列 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ 被称为是一组 Schauder 基，若对任何 $x\in E$ 存在惟一的数列 $(\mu_n)_n$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-\sum\limits_{n=1}^{N}\mu_n e_n\|_E=0$。此时 x 表示为下述级数的和

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n e_n \tag{5.3.32}$$

若对于自然数之间的任意置换 σ 都有 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{\sigma(n)}e_{\sigma(n)}$，则称级数(5.3.32)无条件收敛到 x。若对任一切 $x\in E$，式(5.3.32)无条件收敛到 x，则称 $e_1,e_2,e_3,\cdots$ 是 E 的一组无条件基。

要求一组 Schauder 基是一组无条件基的另一种说法是：能否找到一个准则，使得级数(5.3.32)的收敛性只与 μ_n 的模 $|\mu_n|$ 的大小有关。明确地说，一组 Schauder 基是无条件基的充要条件是下述二者之一成立：

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n e_n$ 收敛，则对任何数列 (β_n)，只要满足 $|\beta_n|\leqslant|\mu_n|$，$\forall n$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n$ 一定收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n e_n$ 收敛，则任取正负号，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm\mu_n e_n$ 收敛。

$\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L_2[0,1]$ 的标准正交基，当然也是无条件基。但是它不是任何 $L_p[0,1]$ $(1<p<\infty,p\neq 2)$ 的无条件基。例如下述两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/4}e^{2\pi inx},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/4}e^{i\sqrt{n}}e^{2\pi inx},$$

其系数的模是一样的，奇异点也都是 $x=0$。当 $x\to 0$ 时，第一个级数的性态形如 $|x|^{-3/4}$，而第二个级数当 $x\to 0^+$ 时形如 $\ln x$，当 $x\to 0^-$ 时形如 $|x|^{-2}$。故第一个级数属于 $L_{7/6}[0,1]$，第二个不属于 $L_{7/6}[0,1]$。

若采用 Haar 小波基，上述问题就不会发生。将 Haar 小波基限制在 $[0,1]$ 上，即考虑 $\psi_{j,k}$，$0\leqslant k<2^j$，$0\leqslant j$，再加上尺度函数 $\phi(x)=1$，$x\in[0,1]$。它们便是 $L_p[0,1]$，$1<p<\infty$，的无条件基($L_1[0,1]$，$L_\infty[0,1]$ 上没有无条件基)。而对于光滑函数空间，不连续的 Haar 函数系已经无能为力了。

正是在这一点上，光滑的小波显示出它的作用。由于小波的衰减、光滑与消失矩等良好性质，小波基构成熟知的函数空间的无条件基。我们只需根据系数的模 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 的大小来判断 f 的幅值、光滑性等性质。由于篇幅以及知识所限，我们只列出一些判据，其证明可参阅参考文献[6]的第五章。

(1) $L_p(\mathbf{R})(1<p<\infty)$ 空间

$$f\in L_p(\mathbf{R})\Leftrightarrow\Big(\sum_{jk}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\in L_p(\mathbf{R})\Leftrightarrow$$

$$\Big(\sum_{jk}|\langle f,\psi_{j,k}\rangle|^2 2^j\chi_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]}\Big)^{\frac{1}{2}}\in L_p(\mathbf{R})$$

其中，χ 为特征函数。

(2) Sobolev 空间

对任何实数 s，定义 Sobolev 空间为

$$W^s(\mathbf{R}) = \left\{ f \mid \int_{\mathbf{R}} (1+|\omega|^2)^s \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 \mathrm{d}\omega < \infty \right\}$$

假定小波 ψ 有 r 阶导数，$|s|\leqslant r$，那么

$$f \in W^s(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \Big(\sum_{j,k} \mid \langle f,\psi_{j,k}\rangle \mid^2 2^j (1+2^{2js}) \chi_{[2^{-j}k,2^{-j}(k+1)]} \Big)^{\frac{1}{2}} \in L_p(\mathbf{R})$$

(3) Hölder 空间

对 $s=n+\alpha$，n 为自然数，$0<\alpha<1$。定义 Hölder 空间为

$$C^s(\mathbf{R}) = \left\{ f \in L_\infty(\mathbf{R}) \cap C^n(\mathbf{R}) \mid \sup_{x,h} \frac{|f^{(n)}(x+h)-f^{(n)}(x)|^\alpha}{|h|^\alpha} < \infty \right\}$$

若小波 ψ 有 r 阶导数，$s<r$，那么

$$f \in C^\alpha(\mathbf{R}) \Leftrightarrow |\langle f,\phi(x-k)\rangle| \leqslant M,\ |\langle f,\psi_{j,k}\rangle| \leqslant M 2^{-j(s+1/2)},\ \forall k \in \mathbf{Z}, j \geqslant 0$$

其中，M 为常数。

对于 $p=1$，用所谓的 Hardy 空间 H_1 代替 $L_1(\mathbf{R})$，可以得到类似于 $L_p(\mathbf{R})$ 的刻画特征，而 $L_\infty(\mathbf{R})$ 的代替空间为有界平均振动空间(BMO 空间)。详细内容参阅参考文献[6]第五章。

同连续小波一样，正交小波也能提供检测奇异点和奇异点处的 Lip 指数。为简单起见，考查 $0<\alpha<1$ 的情况。假定 ψ 是紧支集，有一阶连续导数的正交小波。

定理 5.3.3　(1) 若 $f\in \mathrm{Lip}_{x_0}\,\alpha$(其定义见定义 5.1.4，则 $|\langle f,\psi_{j,k}\rangle| \leqslant c2^{-j(\alpha+1/2)}(1+|2^jx_0-k|^\alpha)$，$j,k\in\mathbf{Z}$。

(2) 反之，设上式成立，且 $f\in \mathrm{Lip}_{x_0}\,\varepsilon$，$0<\varepsilon<\alpha$，那么 $|f(x)-f(x_0)|\leqslant c|x-x_0|^\alpha(1+|\ln|x-x_0||)$。

5.3.5　向量小波基

对于紧支集的 Daubechies 正交小波 ψ，除了 Haar 小波以外都不具有对称性。也就是说不存在实数 λ 和 μ，使 $\psi(x+\lambda)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu x}\overline{\psi(x-\lambda)}$，$x\in\mathbf{R}$。

对任何紧支集正交尺度函数 ϕ，除了 $\phi(x)=\chi_{[0,1]}(x)$ 以外都没有对称性，而对称性在应用中是一个较为重要的性质。为了克服这个困难，有两个改进方法。一个方法是用多个小波函数代替一个小波，就是向量小波；另一个方法是用整数 $m>2$ 代替式(5.3.2)中伸缩因子 2，本小节介绍前者。若不要求 ϕ(或 ψ)的正交性，见 5.4 节。

先扩充多尺度分析的概念。我们称 $L_2(\mathbf{R})$ 中闭子空间序列 $\{V_j\}_j$ 为多尺度分析，若它满足定义(5.3.1)的条件(1)，(2)，(3)和下面的条件。

(4′)存在 r 个函数 $\phi^{(1)},\cdots,\phi^{(r)}$ 使得 $\{\phi^{(j)}(x-k)\mid 1\leqslant j\leqslant r, k\in\mathbf{Z}\}$ 成为 V_0 的标准正交基。

今后称 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi^{(1)},\cdots,\phi^{(r)})^{\mathrm{T}}$ 为向量尺度函数。类似于式(5.3.2)，存在 r 阶矩阵序列，仍记为 $\{\boldsymbol{h}_k\}$，使

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \boldsymbol{h}_k \boldsymbol{\Phi}(2x-k) \tag{5.3.33}$$

再记 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补。那么在 W_0 中存在 r 个函数 $\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(r)}$ 使得 $\{\psi^{(j)}(x-k)\mid 1\leqslant j\leqslant r, k\in\mathbf{Z}\}$ 成为 W_0 的标准正交基。令 $\boldsymbol{\Psi}=(\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(r)})^{\mathrm{T}}$(称它为向量小波)，则有 r 阶矩阵序列 $\boldsymbol{g}_k$，使

$$\boldsymbol{\Psi}(x) = \sum_{k} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{\Phi}(2x-k) \tag{5.3.34}$$

完全类似地定义 r 阶矩阵 $\boldsymbol{m}_0(\omega)=\sum_k \boldsymbol{h}_k e^{-ik\omega}$，$\boldsymbol{m}_1(\omega)=\sum_k \boldsymbol{g}_k e^{-ik\omega}$。与前面证明(5.3.17)为酉阵一样，可证明 $2r$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_0(\omega) & \boldsymbol{m}_0(\omega+\pi) \\ \boldsymbol{m}_1(\omega) & \boldsymbol{m}_1(\omega+\pi) \end{pmatrix} \tag{5.3.35}$$

必为酉阵。反过来，若(5.3.35)是酉阵，那么由(5.3.34)定义的 $\boldsymbol{\Psi}$ 必是正交向量小波，其证明同 $r=1$ 时(即引理 5.3.4)完全类似。

下面介绍一个例子，它是利用分形插值而被发现的。在这个例子中取

$$\boldsymbol{m}_0(\omega)=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6+6e^{-i\omega} & 8\sqrt{2} \\ \dfrac{-1+9e^{-i\omega}+9e^{-2i\omega}-e^{-3i\omega}}{\sqrt{2}} & -3+10e^{-i\omega}-3e^{-2i\omega} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{m}_1(\omega)=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} \dfrac{-1+9e^{-i\omega}+9e^{-2i\omega}-e^{-3i\omega}}{\sqrt{2}} & -3+10e^{-i\omega}-3e^{-2i\omega} \\ -1+9e^{-i\omega}+9e^{-2i\omega}-e^{-3i\omega} & \sqrt{2}(-3-3e^{-2i\omega}) \end{pmatrix}$$

记 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}=(\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 Fourier 变换。那么 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=\boldsymbol{m}_0(2^{-1}\omega)\hat{\boldsymbol{\Phi}}(2^{-1}\omega)$。因此，$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(0)=(\sqrt{2},1)^{\mathrm{T}}$ 且是 $\boldsymbol{m}_0(0)$ 的对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量。通过迭代可得

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{m}_0(2^{-1}\omega)\cdots\boldsymbol{m}_0(2^{-N}\omega)(\sqrt{2},1)^{\mathrm{T}}$$

由上式定义的 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个正交的向量函数(参见参考文献[13])。为了说明 $\boldsymbol{\Phi}$ 的性质，引入函数 $s(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x)+\phi_1(x-1))$。那么 $s(x)$，$\phi_2(x)$ 满足下面的细分方程

$$s(x)=\frac{1}{10}(6s(2x)+6s(2x-2)+8\phi_2(2x)+8\phi_2(2x-2)) \tag{5.3.36}$$

$$\phi_2(x)=\frac{1}{10}(-s(2x)+10s(2x-1)-s(2x-2)-3\phi_2(2x)+ \\ 10\phi_2(2x-1)-3\phi_2(2x-2)) \tag{5.3.37}$$

利用式(5.3.36)和式(5.3.37)可以得到 ϕ_1,ϕ_2 的下述重要性质。

(1) 对称性

以 $\tilde{s}(x)=s(2-x)$ 和 $\tilde{\phi}_2(x)=\phi_2(2-x)$ 分别代替 $s(x)$ 和 $\phi(x)$，式(5.3.36)和式(5.3.37)仍成立。由方程(5.3.36)和(5.3.37)解的惟一性，可知 $s(x)=\tilde{s}(x)=s(2-x)$ 和 $\phi_2(x)=\tilde{\phi}_2(x)=\phi_2(2-x)$。由 $s(x)$ 的定义，ϕ_1 关于 $x=1/2$ 是对称的。

(2) 短支集

由方程(5.3.36)和式(5.3.37)，用标准方法，可以证明，s 和 ϕ_2 支于[0,2]。因此有 $\mathrm{supp}\phi_1\subseteq[0,1]$，$\phi_1\subseteq[0,1]$。

(3) 二阶精度

函数 $\phi(x)=s(x)+\phi_2(x)$ 满足函数方程 $\phi(x)=\frac{1}{2}\phi(2x)+\phi(2x-1)+\frac{1}{2}\phi(2x-2)$，且 $s(1)+\phi_2(1)=1$。由于"帽函数"

$$\phi^*(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1] \\ x-1, & x\in[1,2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

是满足上述函数方程以及 $\phi(1)=1$ 的惟一解，故 $s(x)+\phi_2(x)=\phi^*(x)$。于是由 ϕ^* 的性质，不难验证 $\sum_k(s(x-k)+\phi_2(x-k))=\sum_k\phi^*(x-k)=1$ 和 $\sum_k k(s(x-k)+\phi_2(x-k))=\sum_k k\phi^*(x-k)=x$，因此 1 和 x 都可以用 $\{\phi_1(x-k),\phi_2(x-k)\}_{k\in Z}$ 的线性组合来表示，这说明 $\boldsymbol{\Phi}$ 有二阶逼近度。我们稍后解释逼近度的含义。

现在看看小波 ψ_1,ψ_2 的性质。注意到 $\boldsymbol{m}_0(\omega)$ 的第二行（它给出 ϕ_2）与 $\boldsymbol{m}_1(\omega)$ 的第一行（它给出 $\psi_1(x)$）的差别在于第二个元素中 $e^{-i\omega}$ 的系数分别为 1/2 和 $-1/2$，因此 $\psi_1(x)=\phi_2(x)-2\phi_2(2x-1)$。于是 $\mathrm{supp}\psi_1\subseteq[0,2)$。由 ϕ_2 的对称性，$\psi_1(x)$ 关于 $x=1$ 对称。而在表达式

$$\psi_2(x)=\frac{1}{10}(\phi_1(2x)-9\phi_1(2x-1)+9\phi_1(2x-2)-\phi_1(2x-3))+$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{10}(\phi_2(2x)-\phi_2(2x-2))$$

中，每一个方括号都是关于 $x=1$ 的反对称函数，因此 $\psi_2(x)$ 也是关于 $x=1$ 的反对称函数。

现在解释一下向量尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 逼近度的含义。对 $f\in W^s$，定义 $\|f\|_{W^s}=\left(\int_{\mathbf{R}}(1+\omega^2)^s\,|\,\hat{f}(\omega)\,|^2\mathrm{d}\omega\right)^{1/2}$。

记 P_jf 是 f 在 V 中的正交投影。称 $\boldsymbol{\Phi}$（严格说是 $\boldsymbol{\Phi}$ 分量的整平移）有 m 阶逼近度，若 $\forall f\in W^s$ 成立不等式 $\|f-P_jf\|_2\leqslant c2^{-jm}\|f\|_{W^s}$，$j\in\mathbf{Z}$。

由于在小波分析的应用中，第一步需要用 P_jf 代替 f，所以逼近度的大小直接影响近似的好坏。

而向量尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的逼近度大小，与它能生成的多项式的次数高低密切相关。设 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi_1,\cdots,\phi_r)^T$ 的分量 $\phi_1,\cdots,\phi_r$ 都是紧支集的函数，称 $\boldsymbol{\Phi}$（或 $\boldsymbol{\Phi}$）的整平移）生成多项式 x^n，若有序列 $b_j=(b_j(k))_k$，$1\leqslant j\leqslant r$，使得 $x^n=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\mathbf{Z}}b_j(k)\phi_j(x-k)$。

已经证明，$\boldsymbol{\Phi}$ 有 m 阶逼近度的一个充要条件为：$\boldsymbol{\Phi}$ 生成多项式 $1,x,\cdots,x^{m-1}$。这个条件在 $r=1$ 时显得更为简洁，即 ϕ 有 m 阶逼近度的充要条件是 $m_0^{(k)}(\pi)=0,0\leqslant k\leqslant m$。后一条件的验证极为方便。

5.4　双正交小波基

解决紧支集正交小波（除 Haar 小波外）缺乏对称性的办法，除了用正交向量小波外，还可以用双正交小波。有关正交小波的理论差不多都可以推广到双正交小波。从应用上来看，双正交小波并不比正交小波复杂，现在已有一系列的双正交小波构造办法。双正交小波也是从多尺度分析出发，先要将定义(5.3.1)中的条件(4)的正交基条件减弱为 Riesz 基条件。为此，先介绍 Riesz 基的定义。

设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 的一组基。若存在正数 c',c，使得 $\forall(b_n)_n\in l_2$，成立

$$c\left(\sum_n|b_n|^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum_n b_ne_n\right\|\leqslant c'\left(\sum_n|b_n|^2\right)^{1/2}$$

则称 $\{e_n\}$ 是 H 的 Riesz 基。

我们称闭子空间序列 $V_j\subseteq L_2(\mathbf{R})$，$j\in\mathbf{Z}$ 是一个多分辨分析（多尺度分析），若它满足定义

5.3.1 中的条件(1),(2),(3)和下述条件

(4″) 在 V_0 中存在 ϕ 使得 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 V_0 的 Riesz 基。

构造双正交小波的出发点是,假定有两个多尺度分析 $\{V_j\}_j$ 和 $\{\widetilde{V}_j\}_j$。$\phi,\tilde{\phi}$ 分别是其尺度函数。我们称 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 为**双正交尺度函数**,若 $\langle\phi,\tilde{\phi}(\cdot-k)\rangle=\delta_{0,k}$,$\forall k\in\mathbf{Z}$。由于 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 都有自己的细分方程,除了式(5.3.3)以外还有

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega)=\widetilde{m}_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right),\qquad \omega\in\mathbf{R}\tag{5.4.1}$$

由双正交性知,代替式(5.3.8)的是

$$m_0(\omega)\,\overline{\widetilde{m}_0(\omega)}+m_0(\omega+\pi)\,\overline{\widetilde{m}_0(\omega+\pi)}=1\tag{5.4.2}$$

令 $m_1(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{\widetilde{m}_0(\omega+\pi)}$,$\widetilde{m}_1(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\overline{m_0(\omega+\pi)}$。那么对 $\omega\in\mathbf{R}$,由式(5.4.2)以及 $m_1(\omega)$,$\widetilde{m}_1(\omega)$ 的定义可知

$$\begin{bmatrix}\overline{m_0(\omega)} & \overline{m_0(\omega+\pi)}\\ \overline{m_1(\omega)} & \overline{m_1(\omega+\pi)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{m}_0(\omega) & \widetilde{m}_0(\omega+\pi)\\ \widetilde{m}_1(\omega) & \widetilde{m}_1(\omega+\pi)\end{bmatrix}$$

是单位矩阵。

通过 Fourier 变换定义双正交小波函数

$$\hat{\psi}(\omega)=m_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2),\qquad \hat{\tilde{\psi}}(\omega)=\widetilde{m}_1(\omega/2)\hat{\tilde{\phi}}(\omega/2)$$

那么可以由 ϕ 和 $\tilde{\phi}$ 的双正交性推出 ψ 和 $\tilde{\psi}$ 的双正交性

$$\langle\psi,\tilde{\psi}(\cdot-k)\rangle=\delta_{0,k},\qquad \forall k\in\mathbf{Z}$$

小波与"对方的"尺度函数也有正交性

$$\langle\psi,\tilde{\phi}(\cdot-k)\rangle=\langle\tilde{\psi},\phi(\cdot-k)\rangle=\delta_{0,k},\qquad \forall k\in\mathbf{Z}$$

由此可证明引理 5.3.4 在双正交情形的类似结果,即 $V_1=V_0+W_0$,$W_0\perp\widetilde{V}_0$,而 $\{\psi(x-k)\}_k$ 是 W_0 的 Riesz 基,$\{\psi(x-k),\phi(x-k)\}_k$ 是 V_1 的 Riesz 基。因此,$\forall f\in V_1$ 有分解

$$f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k^0\phi(x-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_k^0\psi(x-k)$$

另一方面,由于 $\{\phi_{1,k}\}_k$ 是 V_1 的 Riesz 基,故有 $f=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k^1\phi_{1,k}$。

一般地,定义 $W_j=\{g(2^jx)\mid g\in W_0\}$。有分解式 $V_{j+1}=V_j+W_j$,$W_j\perp\widetilde{V}_j$。进而 $V_J=W_{J-1}+W_{J-2}+\cdots W_{j_0}+V_{j_0}$,$W_j\perp\widetilde{V}_{j_0}$,$\forall j_0\leqslant j$。

对 $f\in V_J$,有下面不同的表达式

$$f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k^J\phi_{J,k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k^{j_0}\phi_{j_0,k}+\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}d_k^j\psi_{j,k}\tag{5.4.3}$$

如何计算这些系数呢?这就要用到 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{\psi}$。先看第一个级数中 c_k^J 的表达式。将该级数与 $\tilde{\phi}_{J,k}$ 作内积,由 $\langle\phi_{J,k},\tilde{\phi}_{J,k'}\rangle=\delta_{k,k'}$,$k,k'\in\mathbf{Z}$,可知 $c_k^J=\langle f,\tilde{\phi}_{J,k}\rangle$,$k\in\mathbf{Z}$。

注意到 $\langle\phi_{j_0,k},\tilde{\psi}_{j,k}\rangle=\langle\psi_{j,k},\tilde{\phi}_{j_0,k'}\rangle=0$,$\forall k,k'\in\mathbf{Z}$。把式(5.4.3)中最右边分别与 $\tilde{\phi}_{j_0,k}$ 和 $\tilde{\psi}_{j,k}$ 作内积,得

$$c_k^{j_0}=\langle f,\tilde{\phi}_{j_0,k}\rangle,\qquad d_k^j=\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle,\qquad k\in\mathbf{Z}\tag{5.4.4}$$

这里,系数 $c_k^{j_0}$,d_k^j 表示为两个函数的内积。然而,与正交情形一样,在已知 c_k^J,$k\in\mathbf{Z}$ 的条件下,系数 $c_k^{j_0}$,d_k^j 的计算并不需要公式(5.4.4)。为说明这一点,记

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2}\sum_k h_k e^{-ik\omega}, \qquad \widetilde{m}_0(\omega) = \frac{1}{2}\sum_k \widetilde{h}_k e^{-ik\omega}$$

$$m_1(\omega) = \frac{1}{2}\sum_k g_k e^{-ik\omega}, \qquad \widetilde{m}_0(\omega) = \frac{1}{2}\sum_k \widetilde{g}_k e^{-ik\omega}$$

则类似于式(5.3.25)有分解公式

$$c_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \overline{\widetilde{h}_{n-2k}} c_n^{j+1}, \qquad d_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n \overline{\widetilde{g}_{n-2k}} c_n^{j+1}$$

重构公式则与式(5.3.25)一样

$$c_n^{j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_n (h_{k-2n}c_n^j + g_{k-2n}d_n^j)$$

由此可见，分解和重构是用两对滤波器进行的。值得指出的是，双正交小波变换的运算量与正交小波变换的运算量是同阶的，均与原始数据长度同阶。

关于紧支集双正交尺度、小波函数已有不少例子。从上面介绍可知，先可确定 m_0 和 $\widetilde{m}_0$。选定 $m_{0,N}(\omega)=\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^N$，Cohen 等给出了与之对应的一类 $\widetilde{m}_{0,N,\widetilde{N}}(\omega)$（参看参考文献[14]）。显然 ϕ_N（由 $m_{0,N}$ 确定）是对称，而由 $\widetilde{m}_{0,N,\widetilde{N}}(\omega)$ 确定的 $\widetilde{\phi}_{N,N'}$ 中（同一个 N 对应若干 $\widetilde{N}$）有不少也是对称的。由它们生成的双正交小波 ψ_N 和 $\widetilde{\psi}_{N,\widetilde{N}}$ 随之也是对称的（图 5.13）。

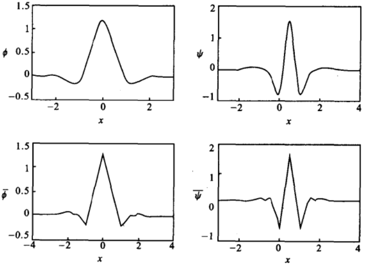


图 5.13 $N=\widetilde{N}=4$ 时的双正交小波

5.5 正交基库与最优算法

小波算法的特点是把一个离散信号 c^{j+1} 分解为模糊像 c^j 和细节 d^j，保留 d^j 不动而分解 c^j 为 c^{j-1} 和 d^{j-1}，然后又分解 c^{j-1}，等等。最后得到原始信号的(离散)小波系数。小波包的思想是把 d^j 与 c^j 同等对待，也要进行分解，这样就可以得到 c^j 在很多基下的表示。这些基构成一个正交基库。同样地，局部正余(弦)基也是一个正交基库。它们的相同之处在于，都有一种树

结构。从而,我们可以容易地挑选出关于信号的最优表示。这方面的开创者是 Coifman, Meyer 和 Wickerhausr。

本节[15]介绍小波包、局部正余(弦)基和最优基选择。作为例子,将介绍快速的近似主因子分析。

5.5.1 正交小波包

为了方便,我们对滤波器作一点修改。

定义 5.5.1 称实序列 $h=(h_k)_k$ 满足**一阶求和法则**,若它满足

(1) $\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = 1/\sqrt{2}$;

(2) $\sum_k h_{k+2n}h_k = \delta_{0,n}/2, n \in \mathbf{Z}$。

记满足一阶求和法则的序列全体为 S。给定 $h=(h_k)_k \in S$,定义序列 $g=(g_k)_k$,其中 $g_k = (-1)^k h_{1-k}$, $k \in \mathbf{Z}$。根据 g_k 的定义,g 也有类似于(2)的性质

$$\sum_k g_{k+2n}g_k = \sum_k (-1)^{k+2n}h_{1-k-2n}(-1)^k h_{1-k} = \delta_{0,n}/2, \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$$

因此,

$$\sum_k (h_{k+2n}h_k + g_{k+2n}g_k) = \delta_{0,n}, \qquad n \in \mathbf{Z} \tag{5.5.1}$$

下面是实空间 $l_2(\mathbf{Z})$ 到 $l_2(\mathbf{Z})$ 的两个算子,它们是小波分解算法中的 $\boxed{2\downarrow}$。对 $s=(s_k)_k \in l_2(\mathbf{Z})$ 有

$$(F_0 s)_i = \sum_k h_{k-2i}s_k, \qquad (F_1 s)_i = \sum_k g_{k-2i}s_k, \qquad i \in \mathbf{Z}$$

F_0, F_1 的共轭算子 F_0^*, F_1^* 就是小波重构算法中用到的 $\boxed{2\uparrow}$。由下式给出

$$(F_0^* x)_i = \sum_k h_{i-2k}x_k, \qquad (F_1^* x) = \sum_k g_{i-2k}x_k, \qquad i \in \mathbf{Z}$$

请读者注意,虽然表面上看,F_0 与 F_0^*,F_1 与 F_1^* 的区别仅仅在于求和中,交换了下标 i,k。然而,正是这种交换产生了它们之间本质的区别。

由等式(5.5.1)我们有

$$F_0^* F_0 s + F_1^* F_1 s = s, \qquad \forall s \in l_2(\mathbf{Z}) \tag{5.5.2}$$

另一方面,把算子 F_0, F_1 与实 Hilbert 空间 E 的一组标准正交基 $\{e_l\}_l$ 联系起来,定义两组向量

$$e_k^0 = \sum_l h_{l-2k}e_l, \qquad e_k^l = \sum_l g_{l-2k}e_l \qquad k \in \mathbf{Z}$$

定理 5.5.1 设 $\{e_l\}_l$ 是 E 的标准正交基,那么

(1) $\{e_k^0, e_k^1\}_k$ 是 E 的标准正交基;

(2) 记 $x \in E$ 在 $\{e_l\}_l$ 下的系数为序列 $s=(s_l)_l$,(即 $s_l = \langle x, e_l \rangle$),则 x 在 $\{e_k^0\}_k$ 和 $\{e_k^1\}_k$ 下的系数分别为 $F_0 s$ 和 $F_1 s$;

(3) 若 x 在 $\{e_k^0\}_k$ 和 $\{e_k^1\}_k$ 下的系数分别为 s^0 和 s^1,则 x 在 $\{e_l\}_l$ 下的系数为 $F_0^* s^0 + F_1^* s^1$。

证 (1) 由 $\{e_l\}_l$ 的标准正交性,$\forall k, k' \in \mathbf{Z}$

$$\langle e_k^0, e_{k'}^0 \rangle = \langle \sum_l h_{l-2k}e_l, \sum_l h_{l-2k'}e_l \rangle = \sum_l h_{l-2k}h_{l-2k'} = \delta_{k,k'}$$

类似地有$\langle e_k^0, e_{k'}^0\rangle=\delta_{k,k'}$。

再注意到 $\sum_k h_k g_{k+2n}=0, \forall n$，可以用上面同样的方法证明$\langle e_k^0, e_{k'}^1\rangle=0, \forall k,k'\in \mathbf{Z}$。

这说明$\{e_k^0, e_k^1\}_k$是E内的标准正交系。下面证$\{e_k^0, e_k^1\}_k$是完备的，为此只须每个e_n，$n\in\mathbf{Z}$，是它的线性组合，即

$$e_n=\sum_l \delta_{n,l}e_l=\sum_{l,k}(h_{l-2k}h_{n-2k}+g_{l-2k}g_{n-2k})e_l=$$
$$\sum_k h_{n-2k}e_k^0+\sum_k g_{n-2k}e_k^1$$

条件(1)得证。条件(2)的验证是直接的，这是因为$\forall k\in\mathbf{Z}$有

$$\langle x, e_k^0\rangle=\sum_l\langle x, h_{l-2k}e_l\rangle=\sum_l h_{l-2k}s_l=(F_0 s)_k$$

同样，$\langle x, e_k^1\rangle=(F_1 s)_k, k\in\mathbf{Z}$。

条件(3)由式(5.5.2)和条件(2)得到。证毕。

定理5.5.1被称为裂变算法(splitting algorithm)。结论(2)和(3)正是Mallat算法中的分解和重构公式。其结论(1)是引理5.3.4的一般化。例如在正交小波分解中，取定理5.5.1中的E为V_1，$e_l=\sqrt{2}\phi(2x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$，那么

$$e_k^0=\sum_l h_{l-2k}\phi_{1,l}=\phi(x-k),\qquad k\in\mathbf{Z}$$
$$e_k^1=\sum_l g_{l-2k}\phi_{1,l}=\psi(x-k),\qquad k\in\mathbf{Z}$$

若记$E=\mathrm{span}\{e_k^\varepsilon\mid k\in\mathbf{Z}\}$，$\varepsilon=0,1$。那么用定理5.5.1的裂变算法，说明$E=E_0+E_1$，$E_0\perp E_1$。将这种分解记为$E=E_0\oplus E_1$。再对$E_\varepsilon$，$\varepsilon=0,1$，实施裂变算法，得到$E_\varepsilon$的正交分解$E_\varepsilon=E_{\varepsilon_0}\oplus E_{\varepsilon_1}$，$\varepsilon=0,1$。因此对$E$，除了上述正交分解$E=E_0\oplus E_1$外，还有

$$E=E_{00}\oplus E_{01}+E_{10}\oplus E_{11}$$

如此下去，我们得到许多子空间$E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$，$\varepsilon_n=0,1$，$1\leqslant n\leqslant j$。对每个子空间，$\{e_k^{\varepsilon_j\varepsilon_{j-1}\cdots\varepsilon_1}\}_k$是$E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$的一组标准正交基，这里$\{e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}\}_k$通过下式归纳定义

$$e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}=\sum_l h_{l-2k}e_l^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}},\qquad \varepsilon_j=0$$
$$e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}=\sum_l g_{l-2k}e_l^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}},\qquad \varepsilon_j=1$$

关于E的分解可用图5.14表示。

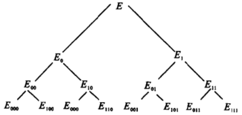


图5.14 小波包分解

这里，小波分解对应于正交分解$E=E_1\oplus E_{01}\oplus E_{001}\oplus E_{000}$。除此之外，还有很多方法将$E$正交分解。

如何选择若干个$E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$，使得它们正好是$E$的正交分解呢？为此，将每个子空间$E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$与一个二进制区间$I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}=[\varepsilon_1/2+\cdots+\varepsilon_j/2^j, \varepsilon_1/2+\cdots+\varepsilon_j/2^j+1/2^j)$对应起来。

定理5.5.2 $E=\oplus E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$的充要条件是，对应的二进制区间$\{I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}\}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$为$[0,1]$的一个划分(即所有区间之并为$[0,1]$，且两两不相交)。

该定理的证明就是多次应用定理 5.5.1，此处从略。

定理 5.5.2 所给出的正交基通常称为小波包基。关于 E 的各种分解有什么好处呢？下面用一个特例来说明这个问题。

例 5.5.1（Shannon 小波包分解） 假定 E 为 Shannon 多尺度分析中的 V_1，即 $E=\{f\mid \mathrm{supp}\hat{f}\subseteq[-2\pi,2\pi]\}$。那么，$e_k=\sqrt{2}\phi(2x-k)$，$k\in\mathbf{Z}$ 是 V_1 的一组标准正交基，其中，$\phi(x)=\sin\pi x/(\pi x)$。先令 2π 周期函数 $m_0(\omega)$ 为

$$m_0(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\pi/2\\ 0, & \pi/2<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

和 $m_1(\omega)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}m_0(\omega+\pi)$。再由下式定义 h_k,g_k

$$m_0(\omega)=\sqrt{2}\sum_k h_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},\qquad m_1(\omega)=\sqrt{2}\sum_k g_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$$

那么 $h=(h_k)_k\in S$，满足定义 5.5.1 的条件(1)和条件(2)。

由此知道 $\forall f\in V_1$，其正交分解 $f=f_0+f_1$ 具有下述性质（除个别区间端点外）

$$\mathrm{supp}\hat{f}_0\subseteq[-\pi,\pi]=-\pi I_0\cup\pi I_0$$

$$\mathrm{supp}\hat{f}_1\subseteq[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]=-\pi I_1\cup\pi I_1$$

此处，$\pm\pi I_\varepsilon=\{\pm\pi\omega\mid\omega\in I_\varepsilon\}$。

一般地，对应于$[0,1)$的一个二进制区间$\{I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}\}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{j-1}\varepsilon_j}$划分，相应的 $f\in E$ 的正交分解 $f=\sum f_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$，$f_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\in E_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$，都具有性质 $\mathrm{supp}\hat{f}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\subseteq-\pi I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\cup\pi I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$。

显然，对固定 $J>0$，所有等长的二进制区间 $I_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_j=0,1$，$1\leqslant j\leqslant J$，构成了$[0,1)$的一个划分。对应于$[0,1)$的这个特殊划分，$\forall f\in E$ 的分解

$$f=\sum_{1\leqslant j\leqslant J}\sum_{\varepsilon_j=0,1}f_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$$

相当于窗口 Fourier 变换。

由此可见，在该特例中，f 的分解完全按频率的高低进行。对于一般的 E,h,g，虽然分解并不严格按上面规律，但大体上是如此。

若已知 $x\in E$ 在$\{e_k\}_k$下的系数，如何求它在别的基下的系数呢？反过来，已知 x 在某组基下的系数，如何重建（即求 x 在$\{e_k\}_k$下的系数）呢？我们有下述小波包算法，它是小波算法的发展，其证明也只须多次应用定理 5.5.2 即可。

定理 5.5.3 设 $x\in E$ 在$\{e_k\}_k$下的系数为 s，那么$\langle x,e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\rangle=(F_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}s)_k$，$k\in\mathbf{Z}$，其中算子按递推方法 $F_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}=F_{\varepsilon_j}F_{\varepsilon_{j-1}\cdots\varepsilon_1}$ 定义。反之，若$\{e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\}_{k,\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$是 E 的标准正交基，且 x 在$\{e_k^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}\}_{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$下系数为序列 $s^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$。那么 x 在$\{e_k\}_k$下的系数为序列 $\sum_{(\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j)}F_{\varepsilon_1}^*\cdots F_{\varepsilon_j}^*s^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_j}$。

图 5.15 是分解三层的小波包系数计算图。

下面介绍几个不同的 Hilbert 空间的小波包的一般构造。

例 5.5.2 取 $E=L_2(\mathbf{R})$。设 V_j 是多尺度分析，ϕ 是正交尺度函数，ψ 是正交小波。分别记它们为 w_0 和 w_1。如下递推定义序列$\{w_n\}_{n\geqslant0}$

$$w_{2n}(x)=\sqrt{2}\sum_k h_k w_n(2x-k),\quad w_{2n+1}(x)=\sqrt{2}\sum_k g_k w_n(2x-k)$$

将 $2^{j/2}w_n(2^jx-k)$与“频率区间”$I(j,n):=[2^jn,2^j(n+1))$对应，那么对 $S\subseteq\mathbf{Z}\times N$，$2^{j/2}w_n(2^jx$

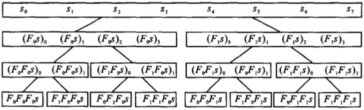


图 5.15　小波包系数计算图

$-k)$，$(j,n)\in S$，$k\in \mathbf{Z}$ 是 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基的充分条件是 $I(j,n)$，$(j,n)\in S$，是$[0,\infty)$的一个划分(见参考文献[6])。

有意思的是，当 ϕ 不是尺度函数(随之，ψ 不是小波)，我们可以构造小波框架包(参考文献[6]的 4.4 和参考文献[16])。

例 5.5.3　取 $E=l_2(\mathbf{Z})$，e_k 为经典标准正交基，即 e_k 的第 k 个坐标为 1，其他为 0。于是 $e_l^0=(h_{n-2l})_{n\in\mathbf{Z}}$，$e_l^1=(g_{n-2l})_{n\in\mathbf{Z}}$，$l\in\mathbf{Z}$。每个 e_l^0(或 e_l^1)都是某个 $e_{l_0}^0$(或 $e_{l_0}^1$)的 $2\mathbf{Z}$ 平移，则原始标准正交基 e_k 是某个 e_{k_0} 的整平移。

例 5.5.4　取 $E=\mathbf{R}^N$。可以认为 $\mathbf{R}^N$ 是所有以 N 为周期的无穷序列 $x=(x_k)_k$，内积定义 $\langle x,y\rangle=\sum_{k=0}^{N-1}x_ky_k$。取 $\{e_k\}_{k=0}^{N-1}$ 为 $\mathbf{R}^N$ 的经典标准正交基。为了应用一般理论，令 $e_{l+s}N=e_l$，$s\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant l\leqslant N-1$。当 N 为偶数时，可以得出类似于定理 5.5.1(1)的论断：$\{e_k^0,e_k^1\}_{k=0}^{N/2-1}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的标准正交基。这里 e_k^0,e_k^1 的定义同例 5.5.3(不难验证此时 $e_k^0=e_{k+sN/2}^0$，$e_k^1=e_{k+sN/2}^1$，$s\in\mathbf{Z}$)。

若 $N=2^J$，重复上述步骤可知$\{e_k^{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}\}$，$(\epsilon_j,\cdots,\epsilon_1)$，$0\leqslant k\leqslant 2^{J-j}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的一组标准正交基的充要条件为$\{I_{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}\}$是$[0,1)$个划分。

不难知道$\langle x,e_k^{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}\rangle=(F_{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}x)_k$，而且 $F_{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}x$ 是以 2^{J-j} 为周期的。

若 $N=2^J$，且分解 J 层，总共能得到多少组正交基呢？用 $A_m(m\leqslant J)$来表示分解 m 层，总共有多少正交基的组数呢？可以用归纳法给出 A_m 递推计算公式。由于 $\mathbf{R}^N=\mathbf{R}^{N/2}\times\mathbf{R}^{N/2}$，而对 $\mathbf{R}^N$ 分解 m 层，等价于对 $\mathbf{R}^{N/2}$ 分解 $m-1$ 层。在两个 $\mathbf{R}^{N/2}$ 中各取一组标准正交基便组成 $\mathbf{R}^N$ 的一组标准正交基，这样的选法总共有 $A_{m-1}\times A_{m-1}$ 种。再加上 $\mathbf{R}^N$ 的原始标准正交基，就有 $A_m=A_{m-1}^2+1$。因 $A_0=1$，可得不等式 $A_J>2^{2^J}=2^N$。也就是说，我们至少得到 2^N 组标准正交基。小波包算法给出了向量 x 在这些基下的系数。所有系数的个数为 JN 个。其运算量有多大呢？下面假定 $h=(h_k)_k$ 是有限长的。于是 $g=(g_k)_k$ 也是有限长的。因此在 $F_{\epsilon_{j-1}\cdots\epsilon_1}x$ 已知的条件下，每个系数$\langle x,e_k^{\epsilon_j\cdots\epsilon_1}\rangle=(F_{\epsilon_j}(F_{\epsilon_{j-1}\cdots\epsilon_1}x))_k$ 的计算所需运算次数为定数(该定数由 h 的长度确定)。由此得到所有系数的计算量为 $O(N\log_2 N)$。

总而言之，对于有限长的滤波器，仅仅作 $O(N\log_2 N)$次运算，就可以得到 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N$ 在不少于 2^N 组标准正交基下的系数。通常情况下，求 $\boldsymbol{x}$ 在一般的标准正交基下的系数需 $O(N^2)$次运算。相比之下，小波包算法是极为有效的。

5.5.2　局部正(余)弦基

局部正(余)弦基是用正(余)弦函数代替窗口 Fourier 变换中的指数函数，从而可以构造出时频局部化都很好的窗口函数，由它生成 $L_2(\mathbf{R})$的标准正交基。

先从区间 $I=[\alpha,\beta)$ 开始。众所周知，$L_2(I)$ 中存在正弦、余弦函数构成的标准正交基，它们有

$$\{s_k^I\}_{k\geqslant 0}=\left\{\sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}\chi_I(x)\sin\frac{(k+1/2)\pi}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right\}_{k\geqslant 0} \tag{5.5.3}$$

$$\{c_k^I\}_{k\geqslant 0}=\left\{\sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}\chi_I(x)\cos\frac{(k+1/2)\pi}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right\}_{k\geqslant 0} \tag{5.5.4}$$

等等。

选择 $\mathbf{R}$ 的一个划分 $R=\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}I_n, I_n=[\alpha_n,\beta_n)$。于是 $\{s_k^{I_n}\}_{k\geqslant 0,n\in\mathbf{Z}}$ 和 $\{c_k^{I_n}\}_{k\geqslant 0,n\in\mathbf{Z}}$ 都是 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基。遗憾的是，每个函数在 $\mathbf{R}$ 上都不连续。这是由于 $\chi_I(x)$ 并非连续的缘故。下面将着手改造 $\chi_I(x)$，得到 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，而保留 $\chi_I(x)$ 在时间上良好的局部化性质。下面介绍的钟函数就是满足这种要求的。

定义 5.5.2 设 $I=[\alpha,\beta)$，ε 和 ε' 是满足 $\alpha+\varepsilon<\beta-\varepsilon'$ 的正数。一个 $\mathbf{R}$ 上连续函数 $b(x)$（有时为明确起见记为 $b_I(x)$ 或 $b_{I,\varepsilon,\varepsilon'}(x)$）称为 I 上的**钟函数**，若它满足以下条件：

(1) $\operatorname{supp} b(x)\subseteq[\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon']$；

(2) $b(x)=1,\forall x\in[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon']$；

(3) $b^2(x)+b^2(2\alpha-x)+b^2(2\beta-x)=1,\forall x\in[\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon']$。

由条件(1)知，当 $x\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]$ 时，$b(2\beta-x)=0$。此时条件(2)变为

$$b^2(x)+b^2(2\alpha-x)=1,\qquad \forall x\in[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon] \tag{5.5.5}$$

同样

$$b^2(x)+b^2(2\beta-x)=1,\qquad \forall x\in[\beta-\varepsilon',\beta+\varepsilon'] \tag{5.5.6}$$

无穷次可微的钟函数可以按下面方法构造出来。设 $\tau(t)\subseteq[-\varepsilon,\varepsilon]$ 是支集且无穷次可微的非负偶函数，满足 $\int_{\mathbf{R}}\tau(t)\mathrm{d}t=\pi/2$。令 $\theta(x)=\int_{-\infty}^{x}\tau(t)\mathrm{d}t$，则 θ 也是非负的无穷次可微函数，而且满足 $\theta(x)+\theta(-x)=\pi/2,\forall x\in\mathbf{R}$ 以及 $\theta(x)=0,\forall x\leqslant-\varepsilon;\theta(x)=\pi/2,\forall x\geqslant\varepsilon$。

令 $S_\varepsilon(x)=\sin\theta(x), C_\varepsilon(x)=\cos\theta(x)$，则 $C_\varepsilon(x)=S_\varepsilon(-x)$。可以验证，$b(x)=S_\varepsilon(x-\alpha)C_\varepsilon(x-\beta)$ 是 $I=[\alpha,\beta)$ 上无穷次可微的钟函数。

用 I 上的钟函数 $b_I(x)$ 代替式(5.5.3)中的 $\chi_I(x)$，定义函数系

$$\{e_k^I\}_{k\geqslant 0}=\left\{\sqrt{\frac{2}{\beta-\alpha}}b_I(x)\sin\frac{(k+1/2)\pi}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right\}_{k\geqslant 0} \tag{5.5.7}$$

引理 5.5.1 函数系 $\{e_k^I\}_{k\geqslant 0}$ 是 $L_2(\mathbf{R})$ 中标准正交系。

证 不妨设 $I=[0,1]$。为简单起见，这里记 $f(x)=b^2(x)\sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)$。$\forall m,k\geqslant 0$，有

$$\langle e_m^I,e_k^I\rangle=2\int_{-\varepsilon}^{1+\varepsilon'}f(x)\mathrm{d}x=$$

$$2\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1-\varepsilon'}^{1+\varepsilon'}f(x)\mathrm{d}x\right)$$

因为 $\int_{-\varepsilon}^{0}b^2(x)\sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x=\int_0^{\varepsilon}b^2(-x)\sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x$ 以及式(5.5.5)，所以

$$\int_{1-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\varepsilon}\sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x$$

类似地有 $$\int_{1-\epsilon'}^{1+\epsilon'} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1-\epsilon'}^{1} \sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x$$

$\forall x \in [\epsilon, 1-\epsilon'], b(x)=1$，因此

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon'} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\epsilon}^{1-\epsilon'} \sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x$$

综合上述等式得

$$\langle e_m^I, e_k^I \rangle = 2\int_0^1 \sin((m+1/2)\pi x)\sin((k+1/2)\pi x)\mathrm{d}x = \delta_{m,k}$$

证毕。

记函数系$\{e_k^I\}_{k\geqslant 0}$所张成的闭子空间为V_I，对$f \in L_2(\mathbf{R})$，它在V_I上的正交投影为$P_I f = \sum_k \langle f, e_k^I \rangle e_k^I$。关于系数$\langle f, e_k^I \rangle$的计算有下述方法，它将$\langle f, e_k^I \rangle$的计算转化为另一个函数与三角函数$s_k^I$的内积。

引理 5.5.2　设$I=[\alpha,\beta)$。给定$f \in L_2(\mathbf{R})$，定义

$$S(x) = b(x)f(x) - b(2\alpha - x)f(2\alpha - x) + b(2\beta - x)f(2\beta - x)$$

那么 $$\langle f, e_k^I \rangle = \langle S, s_k^I \rangle = \langle b_I S, e_k^I \rangle,\ k \geqslant 0 \tag{5.5.8}$$

其中s_k^I由式(5.5.3)给出。

证　首先注意到$b_I(2\alpha - x)b_I(x) = b_I(2\beta - x)b_I(x) = 0$，$\forall x \in [\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon']$。因此，在此区间上，$f = b_I S = S$。另一方面，通过积分变量替换有

$$\int_{\alpha-\epsilon}^{\alpha} f e_k^I \mathrm{d}x = -\int_{\alpha}^{\alpha+\epsilon} f(2\alpha - x)b_I(2\alpha - x)s_k^I(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{\beta}^{\beta+\epsilon'} f e_k^I \mathrm{d}x = \int_{\beta-\epsilon'}^{\beta} f(2\beta - x)b_I(2\beta - x)s_k^I(x)\mathrm{d}x$$

因此，式(5.5.8)中的第一个等式成立。至于第二个等式的证明，从下述级数开始：在$L_2(I)$上成立$S(x) = \sum_k \langle S, s_k^I \rangle s_k^I$。而$S$与$s_k^I$都关于直线$x=\alpha$对称，且关于$x=\beta$反对称，故上述级数不仅在$I$上收敛，实际上在$L_2([\alpha-\epsilon, \beta+\epsilon'])$上收敛。两边乘以$b_I(x)$，得$b_I S = \sum_k \langle S, s_k^I \rangle s_k^I$。于是$\langle b_I S, e_k^I \rangle = \langle b_I S, s_k^I \rangle$。证毕。

从上面的引理知道，f在V_I中的投影与$b_I S$在V_I中的投影相等，而后者正是它本身。于是

$$P_I f(x) = b_I^2(x)f(x) - b_I(x)b_I(2\alpha - x)f(2\alpha - x) + b_I(x)b_I(2\beta - x)f(2\beta - x) \tag{5.5.9}$$

由此可知$\operatorname{supp} P_I f \subseteq [\alpha-\epsilon, \beta+\epsilon']$，且$x \in [\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon']$时，$P_I f(x) = f(x)$。

为了得到$L_2(\mathbf{R})$的标准正交基，任意选择序列$(\alpha_n)_n$和正数序列$(\epsilon_n)_n$满足$\alpha_n + \epsilon_n < \alpha_{n+1} - \epsilon_{n+1}$，$\mathbf{R} = \bigcup_n [\alpha_n, \alpha_{n+1})$。此外，还要求$I_n$上的钟函数$b_{I_n}$满足所谓的"相容性(见图5.16)条件"：$b_{I_n}(x+\alpha_{n+1}) = b_{I_{n+1}}(x - \alpha_{n+1})$，$|x| \leqslant \epsilon_{n+1}$。

定理 5.5.4　设α_n, ϵ_n如上给出，$b_{I_n}(x)$满足相容性条件，那么$e_k^{I_n}, k \geqslant 0, n \in \mathbf{Z}$是$L_2(\mathbf{R})$的标准正交基。

证　先证$e_k^{I_n}, k \geqslant 0, n \in \mathbf{Z}$是正交系。对于同一个$n$，$e_k^{I_n}, k \geqslant 0$的正交性已由引理5.5.1证明。由于$e_k^{I_n}$的支集为$[\alpha_n - \epsilon_{n+1}, \alpha_{n+1} + \epsilon_{n+1}]$，若$|n - n'| \geqslant 2$，则$e_k^{I_n}$和$e_m^{I_{n'}}$的支集不相交，从而

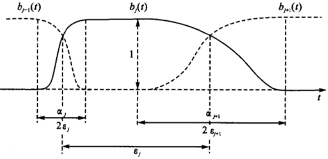


图 5.16　相容性

$\langle e_k^{I_n}, e_m^{I_{n'}} \rangle = 0$。

剩下还要验证$\langle e_k^{I_n}, e_m^{I_n+1} \rangle = 0, \forall m, k \geqslant 0$。而这个内积实际上只在$[\alpha_{n+1}-\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}+\varepsilon_{n+1}]$上积分。在$[\alpha_{n+1}-\varepsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}]$上作变量替换 $x=2\alpha_{n+1}-t$(此方法已多次用过),并利用相容性条件,可得$\int_{\alpha_{n+1}-\varepsilon_{n+1}}^{\alpha_{n+1}} = -\int_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_{n+1}+\varepsilon_{n+1}}$,从而$\int_{\alpha_{n+1}-\varepsilon_{n+1}}^{\alpha_{n+1}+\varepsilon_{n+1}} = 0$。正交性得证。

为证完备性,注意到对任何 n,函数 $b_{I_n \cup I_{n+1}}(x) := \sqrt{b_{I_n}^2(x) + b_{I_{n+1}}^2(x)}$ 是 $I_n \cup I_{n+1}$ 上的钟函数。由它按式(5.5.7)定义的 $e_k^{b_{I_n} \cap I_{n+1}}$ 是 $V_{I_n \cup I_{n+1}}$ 的标准正交基。根据式(5.5.9)可知 $P_{I_n \cup I_{n+1}} f = P_{I_n} + P_{I_{n+1}}$。由此可推出,$V_{I_n \cup I_{n+1}} = V_{I_n} \oplus V_{I_{n+1}}$。重复上述步骤知,$\sqrt{\left(\sum_{n=-N}^{N} b_{I_n}^2(x)\right)}$ 是 $\bigcup_{n=-N}^{N} I_n$ 上的钟函数。记由它产生的子空间为 $V_{\bigcup_{n=-N}^{N} I_n}$ 则 f 在 $V_{\bigcup_{n=-N}^{N} I_n}$ 的投影 $P_{\bigcup_{n=-N}^{N} I_n} f = \sum_{n=-N}^{N} P_{I_n} f$。它在区间$[\alpha_{-N}+\varepsilon_{-N}, \alpha_N+\varepsilon_N]$上等于 f。于是,当 $N \to \infty$ 时,$\| f - P_{\bigcup_{n=-N}^{N} I_n} f \|_2^2 = O\left(\int_{\mathbf{R} \setminus [\alpha_{-N}+\varepsilon_{-N}, \alpha_N+\varepsilon_N]} |f|^2 \mathrm{d}x\right) \to 0$。因此,$f = \sum_n P_{I_n} f$。证毕。

倘若在式(5.5.7)中以余弦函数代替正弦函数,我们有类似于引理 5.5.1,式(5.5.9)和定理 5.5.4 的结论。

例 5.5.5　选择对应于 $I=[0,1), \varepsilon=\varepsilon'=1/2$ 的钟函数 b_I,使得它满足 $b(x)=b(1-x)$, $x \in [-1/2, 1/2]$。显然 $b(x-n)$ 是$[n, n+1)$上的钟函数,而且作为钟函数序列,$b(x-n)$, $n \in \mathbf{Z}$满足相容性条件。那么,由上面的定理知,

$$\sqrt{2} b(x-n) \sin(k+1/2)\pi(x-n), n \in \mathbf{Z}, k \geqslant 0 \tag{5.5.10}$$

是 $L_2(\mathbf{R})$的一组标准正交基。此处,$b(x)$可以选为任意光滑的钟函数。定理 5.1.3 说明,当上面的正弦函数换成指数函数时,不可能有类似的结论成立。

在证明定理 5.5.4 的过程中,运用了一个技巧,那就是"合并"I_n 和 I_{n+1},使得两个子空间 V_{I_n} 和 $V_{I_{n+1}}$ 被它们的正交和 $V_{I_n} \oplus V_{I_{n+1}}$ 所代替。这相当于将$\{e_k^{I_n}\}_k$ 和$\{e_k^{I_n}\}_k$"合并"为$\{e_k^{I_n \cup I_{n+1}}\}_k$。这个技巧是构造局部正(余)弦基库的源泉。下面以二进分划的正交基库说明之。

例 5.5.6($L_2(\mathbf{R})$上局部正弦基库)　若在例 5.5.5 中将$[2n, 2n+1)$与$[2n+1, 2(n+1))$合并成$[2n, 2(n+1))$。继续合并,得 $I_{jn}=[2^j n, 2^j(n+1))$。简记 $V_{jn}=V_{I_{jn}}$。那么$\bigoplus_{(j,n)} V_{jn} = L_2(\mathbf{R})$的充要条件是,相应的区间$\{[2^j n, 2^j(n+1))\}_{(j,n)}$构成 $\mathbf{R}$ 的一个划分。

例 5.5.7($l_2(\mathbf{Z})$上局部正弦基库)　$l_2(\mathbf{Z})$上局部正弦基库的构造同 $L_2(\mathbf{R})$完全类似。仍

以二进区间为例。为明确起见，下面的 $b(x)$ 满足例 5.5.5 的条件。

设 $n\in\mathbf{Z}, j\geqslant 0, 0\leqslant k\leqslant 2^j-1$。定义一个数列 ψ 为

$$\boldsymbol{\psi}_{jnk} = ((\boldsymbol{\psi}_{jnk}(m)))_{m\in\mathbf{Z}} = \left(b\left(\frac{m+1/2}{2^j}-n\right)\frac{1}{\sqrt{2^{j-1}}}\sin((k+1/2)(m+1/2)\pi/2^j)\right)_{m\in\mathbf{Z}}$$

显然，$\boldsymbol{\psi}_{jnk}(m)=0, \forall\, m<2^j(n-1/2)$ 或 $m>2^j(n+3/2)-1$。

与连续情形类似，可以验证向量 $\boldsymbol{\psi}_{jnk}, 0\leqslant k\leqslant 2^j-1, n\in\mathbf{Z}$ 是标准正交的，即

$$\sum_{m=2^j(n-1/2)}^{2^j(n+3/2)-1}\boldsymbol{\psi}_{jnk}(m)\boldsymbol{\psi}_{j0k'}(m) = \delta_{k,k'}\delta_{n,n'}$$

记 V_{jn}^d 为它们生成的向量空间，称 $\{\boldsymbol{\psi}_{jnk}\}_{k=0}^{2^j-1}$ 是 V_{jn}^d 的局部正弦基。同例 5.5.6 一样，$\bigoplus_{(j,n)}V_{jn}^d = l_2(\mathbf{Z})$ 的充要条件是 $\{[2^jn, 2^j(n+1))\}_{(j,n)}$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个划分。

考察一下 V_{jn}^d 中元素的特征。不妨设 $n=0$。首先，若 $\boldsymbol{f}=(f(m))_m\in V_{j0}^d$，则对 $m<-2^{j-1}$ 或 $m>\frac{3}{2}2^j-1$，$f(m)=0$。进一步，我们注意到，$\forall\, 0\leqslant k<2^j$，$\sin((k+1/2)(m+1/2)\pi/2^j)$ 满足

$$\begin{cases} S(m) = -S(-1-m), & 0<m<2^{j-1} \\ S(m) = S(2^{j+1}-1-m), & 2^{j-1}\leqslant m<2^j \end{cases} \tag{5.5.11}$$

因此，$\boldsymbol{f}=(f(m))_m\in V_{j0}^d$，当且仅当存在数列 $S=(S(m))_m$ 使得 $f(m)=b(2^{-j}m+1/2))S(m)$，而且 $S(m)$ 满足式(5.5.11)。可见 V_{jn}^d 本质上等同于 $\mathbf{R}^{2^j}$。

对 $l_2(\mathbf{Z})$ 中的元素 $\boldsymbol{f}$，内积 $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}_{jnk}\rangle$ 的计算类似于式(5.5.8)，即

$$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}_{jnk}\rangle = \sum_{m=2^jn}^{2^j(n+1)-1}S(m)\frac{1}{\sqrt{2^{j-1}}}\sin((k+1/2)(m+1/2)\pi/2^j)$$

其中

$$S(m) = b\left(\frac{m+1/2-2^jn}{2^j}\right)f(m) - b\left(\frac{2^jn-m-1/2}{2^j}\right)f(2^{j+1}n-1-m) + b\left(\frac{2^jn-m-1/2+2^{j+1}}{2^j}\right)f(2^{j+1}(n+1)-m-1)$$

因此，利用离散正弦快速算法，关于 $(\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}_{jnk}\rangle)_{k=0}^{2^j-1}$ 的计算也有快速算法，其计算量为 $O(j2^j)$。

例 5.5.8　对于 $N=2^L$，也可以建立 $\mathbf{R}^N$ 上的局部正弦基库。为了方便，$\forall\, 0\leqslant j\leqslant L$，将 $\boldsymbol{x}=(x_m)_{m=0}^{2^j-1}\in\mathbf{R}^{2^j}$ 与 $(x_m)_{m=-2^{j-1}}^{3\times 2^{j-1}-1}\in\mathbf{R}^{2^{j+1}}$ 等同起来，其中，当 $-2^{j-1}\leqslant m<0$ 或 $2^j\leqslant m<3\times 2^{j-1}$ 时，x_m 由式(5.5.11)的方式定义。

为了建立 $\mathbf{R}^N$ 上的局部正弦基库，只需要例 5.5.7 中满足 $0\leqslant n<2^{L-j}$ 的 $\{\boldsymbol{\psi}_{jnk}\}_{k=0}^{2^j-1}$。这样的 (j,n) 对应于 $[0,1)$ 中的一个二进区间 $[n/2^j,(n+1)/2^j)$。$\{\boldsymbol{\psi}_{jnk}\}_{k=0}^{2^j-1}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的标准正交基（等价地，$\mathbf{R}^N=\bigoplus_{(jn)}V_{jn}^d$）的充要条件为 $\{[n/2^j,(n+1)/2^j)\}_{(j,n)}$ 是 $[0,1)$ 的一个分划。

现在考察一个向量 $\boldsymbol{f}\in\mathbf{R}^N$ 在局部正弦基库的系数计算量。固定 j,n，前面已经说过，计算 $\boldsymbol{f}$ 在 $\{\psi_{jnk}\}_{k=0}^{2^j-1}$ 下的 2^j 个系数，转为 S 与正弦序列的内积，用快速离散正弦变换计算这 2^j 个系数的复杂度为 $O(j2^j)$。变动 n 并注意 $0\leqslant n<2^{L-j}$，于是计算 $\boldsymbol{f}$ 在 j 固定时的全部系数的复杂

度是$O(jN)$。在整个正交基库的所有系数的复杂度为$O(\sum_{j=1}^{L} jN)=O(N(\log_2 N)^2)$。

反过来，倘若已知f在基库中某组基下的系数，可以用快速离散正弦变换去重构f。方法如下：假定$\{\psi_{jnk}\}, n\in\mathbf{Z}, j\geqslant 0, 0\leqslant k<2^j$是$\mathbf{R}^N$的标准正交基。先重构$f$在$V_{jn}^d$的正交投影

$$P_{V_{jn}^d} f = \sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f, \psi_{jnk}\rangle \psi_{jnk}$$

将ψ_{jnk}的表达式代入，得$P_{V_{jn}^d} f(m)=b\left(\frac{m+1/2-2^j n}{2^j}\right)S(m)$，其中

$$S(m) = \sum_{k=0}^{2^j-1}\langle f, \psi_{jnk}\rangle \frac{1}{\sqrt{2^{j-1}}}\sin((k+1/2)(m+1/2-2^j n)\pi/2^j)$$

由快速算法，重构$S(m)$，$2^j n-2^{j-1}\leqslant m\leqslant 2^j(n+1)+2^{j-1}-1$复杂度为$O(j2^j)$。再根据等式$f=\sum_{(j,n)} P_{V_{jn}^d} f$，知道重构$f$的复杂度为$O\left(\sum_{(j,n)} j2^j\right)=O(N\log_2 N)$。

最后，我们指出一个令人惊奇的事实：$L_2(\mathbf{R})$的局部正(余)弦基与 Meyer 小波基有密切的关系。后者的构造是前者的特殊情况(见参考文献[17]，6.4)。顺便指出，参考文献[17]的风格与参考文献[7]迥然不同。前者主要是给工程师看的，后者主要是为数学家写的。两本书对各自的主题都有精辟的论述。为了说明这一点，特别地选择$[1,2)$上的钟函数$b(x)$，$\varepsilon=1/3$，$\varepsilon'=2/3$，而且满足$b(2x)=b(2-x)$。这样$b_j(x)=b(2^{-j}x)$便是$I_j=[2^j,2^{j+1})$上的钟函数，且满足相容性条件。于是

$$u_{j,k}(x)=\sqrt{2}2^{-j/2}\cos(2^{-j}(k+1/2)\pi x)b(2^{-j}x),\qquad j\in\mathbf{Z},\ k\geqslant 0$$

和

$$v_{j,k}(x)=\sqrt{2}2^{-j/2}\sin(2^{-j}(k+1/2)\pi x)b(2^{-j}x),\qquad j\in\mathbf{Z}, k\geqslant 0$$

分别是$L_2(0,\infty)$的标准正交基。将$b(x)$扩充为$\mathbf{R}$上的偶函数，从而得到$u_{j,k}$的偶扩充，$v_{j,k}$的奇扩充，仍分别记为$u_{j,k}$和$v_{j,k}$。扩充后的函数系$\frac{1}{\sqrt{2}}u_{j,k}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}v_{j,k}$，$j\in\mathbf{Z}, k\geqslant 0$是$L_2(\mathbf{R})$的标准正交基。因此，$\frac{1}{2}(u_{j,k}+\mathrm{i}v_{j,k})$，$\frac{1}{2}(u_{j,k}-\mathrm{i}v_{j,k})$，$j\in\mathbf{Z}, k\geqslant 0$也是$L_2(\mathbf{R})$的标准正交基。注意到

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j,k}(x)-\mathrm{i}v_{j,k}(x))=\frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}}b(2^{-j}x)\exp(2^{-j}\mathrm{i}\pi(k+1/2)x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{j,k}(x)-\mathrm{i}v_{j,k}(x))=\frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}}b(2^{-j}x)\exp(2^{-j}\mathrm{i}\pi(k^*+1/2)x)$$

$$k^*=-1-k$$

显然$k^*=-1,-2,\cdots$。于是，最后的标准正交基恰好就是

$$\frac{1}{\sqrt{2^{j+1}}}b(2^{-j}x)\exp(2^{-j}\mathrm{i}\pi(k+1/2)x),\qquad j,k\in\mathbf{Z}\tag{5.5.12}$$

记ψ为$1/\sqrt{2}b(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}$的 Fouier 变换，那么由$b(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x/2}=\overline{b(-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x/2}}$知$\psi$为实函数，且

$$\psi(\pi-t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}} b(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\pi-t-\pi/2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}} b(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\pi-t-\pi/2)}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbf{R}} b(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(\pi-t-\pi/2)}\mathrm{d}x=\psi(t)$$

因此，函数系(5.5.12)的 Fourier 变换是

$$\frac{2^j}{\sqrt{2^{j+1}}}\int_{\mathbf{R}} b(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(2^j t-(k+1/2)\pi)}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2^{j-1}}\psi(2^j t-k\pi)$$

于是，$\left\{\frac{\sqrt{2^j}}{2\sqrt{\pi}}\psi(2^j t-k\pi)\right\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 也是 $L_2(\mathbf{R})$ 的标准正交基。倘若要求 $b(x)$ 是无穷次可微，则 ψ 属于 Schwartz 类。

5.5.3　信息花费函数与最优基选择

当一个信号有很多基下的表示时，可以在某种准则下，挑选该信号的最优表示。这种准则是针对信号在基下的系数序列而提出来的，它衡量存储的代价。

我们称定义在实序列（复情形可以类似处理）$s=(s_k)_k$ 上的函数 M 是一个花费函数，若存在非负连续函数 μ，使得 $M(s)=\sum_k\mu(|s_k|)$，$\mu(0)=0$。

一般地，有用的花费函数 M 应能反映序列 s 的集中程度。也就是说，当 s 的分量（的绝对值）都大致差不多时，$M(s)$ 的值应较大；反之，若 s 的分量只有几项不可忽视时，$M(s)$ 的值应该变小。下面是一些例子。

(1) 令 $\mu(t)=1,t>\varepsilon$；$\mu(t)=0,t<\varepsilon$。此时 $M(s)$ 就是 s 中绝对值大于 ε 的分量 s_k 的个数。

(2) $M(s)=\sum_k|s_k|^p$。我们注意到，对于两个 l_2 范数为 1 的序列 s^1 和 s^2，若 $M(s^1)<M(s^2)$，则 s^1 的能量比 s^2 集中在更少的系数上。

(3) 熵。对 $s=(s_k)_k$，令 $p_k=|s_k|^2/\|s\|_2^2$。当 $p=0$ 时，认为 $p\ln p=0$。定义序列 s 的熵 $\mathscr{H}(s)=-\sum_k p_k\ln p_k$。它并非花费函数，然而 $M(s)=-\sum_k|s_k|^2\ln|s_k|$ 是一个花费函数。利用关系式 $\mathscr{H}(s)=\|s\|_2^{-2}M(s)+\ln\|s\|_2^2$ 可以看出，当 $\|s\|_2$ 不变时，$\mathscr{H}$ 和 M 有共同的极值点。

关于熵的一个经典结果是：在一定的误差限内，为了表示一个信号所需的系数个数与 $\mathrm{e}^{\mathscr{H}(s)}$ 成正比。

(4) $s=(s_k)_{k=1}^N$，$M(s)=\sum_{k=1}^N\ln|s_k|^2$（约定 $\ln 0=0$）。它可以理解为有 N 个互不相关随机变量的 Gauss－Markov 过程的熵，而这 N 个 Gauss 随机变量的变差为 $\sigma_k^2=|s_k|^2$，$1\leqslant k\leqslant N$。

假定 E 是实 Hilbert 空间，$\mathscr{B}$ 是 E 中某些标准正交基组成的集合（称为正交基库），即 $\boldsymbol{B}\in\mathscr{B}$ 意味着 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{b}_k\}_k$ 是 E 的一组标准正交基。对每个 $x\in E$，记 $\boldsymbol{x}$ 在 E 下的系数序列 $(\langle x,b_k\rangle)_k$ 为 $\boldsymbol{B}^*x$。用这个记号的原因如下：在有限维情形，将 $\boldsymbol{B}$ 与以 $b_1,\cdots,b_N$（N 为 E 的维数）为列向量的 N 阶矩阵等同起来。那么向量 $(\langle x,b_k\rangle)_k$ 就是 $\boldsymbol{B}$ 的转置 $\boldsymbol{B}^*$ 与向量 $\boldsymbol{x}$ 相乘的结果 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}$。

对 $\boldsymbol{x}\in E$，我们称 $\widetilde{\boldsymbol{B}}\in\mathscr{B}$ 是 x 关于 $\mathscr{B}$ 和花费函数 M 的最优基，若 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 是函数 $M(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x})$ 定义在 $\mathscr{B}$ 上的最小值点，即 $M(\widetilde{\boldsymbol{B}}^*\boldsymbol{x})=\min\{M(\boldsymbol{B}*\boldsymbol{x}|\boldsymbol{B}\in\mathscr{B}\}$。若 $E=\mathbf{R}^N$，且 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^N$ 中所有标准正交基的全体，M 是连续的，则 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N$，其关于 $\mathscr{B}$ 和 M 的最优基总是存在的。然而不幸的是，计算 M 的最小值并不容易；寻找最优基的复杂度也不低。据此，我们在寻找最优基时，将限制 $\mathscr{B}$ 只包含“某些”标准正交基，使得 $\mathscr{B}$ 满足下面“二元树”的条件。

定义 5.5.3　称 $\mathbf{R}^N$ 的正交基库 $\mathscr{B}=\{B\}$ 是一个二元树，若它满足下述条件

(1) 对于每一组基 B，B 的子集可与某个二进区间 $I_\beta=[k/2^j,(k+1)/2^j)$ 对应，这里

$\beta=(j,k)\in\mathbf{Z}^2, j\geqslant 0, 0\leqslant k<2^j$；

(2) 每一组基 B 对应于$[0,1)$的形如区间 I_β 的划分；

(3) 记对应于 I_β 的基的子集所张成的子空间为 E_β（或记为 $E_{(j,k)}$），则 E_β 有正交分解

$$E_{j,k}=E_{j+1,2k}\oplus E_{j+1,2k+1}$$

(4) $E_{0,0}=\mathbf{R}^N$。

当然，$L_2(\mathbf{R})$和 $l_2(\mathbf{Z})$上的正交基库也有树结构的概念。

例 5.5.9　倘若 $N=2^L$，取正交基库 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^N$ 的小波包基的全体，则 $\mathscr{B}$ 是一个二元树。

证　为了说明它满足定义 5.5.3 条件(1)，注意到在定理 5.5.2 中出现的 $E_{\epsilon_1\cdots\epsilon_j}$ 可改写为定义 5.5.3 中的 $E_{j,k}$。这只需令 $k=\sum_{i=1}^{j}2^{j-i}\epsilon_i$。于是，条件(1)满足。由定理 5.5.2 知，条件(2)也成立。(3)即是定理 5.5.1。条件(4)是自然成立。证毕。

例 5.5.10　$N=2^L$，例 5.5.8 中的正交基库是二元树。

请读者给出其证明。

一般的二元树也可用图 5.17（将花费函数值构成对应的二元树）的形式表示。

若正交基库 $\mathscr{B}$ 是二元树，称 E 为这颗树的根，每个 E_β 为树的结点。若 $\mathscr{B}$ 包含长度为 2^{-L} 的二进区间所对应的正交向量，而不包含长度为 2^{-L-1} 的二进区间所对应的正交向量，则称它的深度为 L。对每个 $B\in\mathscr{B}$，有$[0,1)$的一个划分$\{I_\beta\}$与之对应，β 取自某个集合 Γ。那么由 M 的可加性知，$M(B^*x)=\sum_{\beta\in\Gamma}M(s^\beta)$，其中 s^β 是 x 在 I_β 对应的正交向量下的系数构成的序列。正是这个等式和 $\mathscr{B}$ 的树结构使得我们能快速求出 $M(B^*x)$的最小值以及最优基。下面介绍一下具体算法。

设 $\mathscr{B}$ 是有限深度的，设为 L。将每个值 $M(s^\beta)$标在对应的结点 E_β 上。将树的底层（离根最远的结点）标上 * 号。

从底层开始，我们将同一层的每二个值之和 $M(s^{(j+1,2k)})+M(s^{(j+1,2k+1)})$与它上一层的值 $M(s^{(j,k)})$作比较。当前者不小于后者时，我们将 $E_{j,k}$标上 * 号，如图 5.18（在低花费结点上标 * 号）所示。否则将 $M(s^{(j+1,2k)})+M(s^{(j+1,2k+1)})$的值写在 $E_{j,k}$上，用以代替 $E_{j,k}$。由于 $\mathscr{B}$ 是有限深度的，这个算法只需有限次便结束。实际上作比较的次数不超过树的结点个数，数量级为 $O(2^L)$。

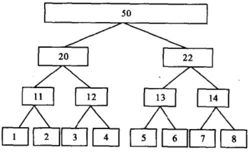


图 5.17　二元树结构

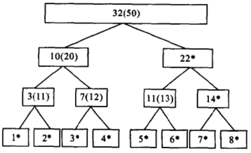


图 5.18　花费函数值的比较

若所有的结点都通过了比较，我们从树的根（顶层）开始经每个结点向下搜索，在每条“路径”上，保留最先遇到的标有 * 号的结点，而有 * 号的结点下面的结点就不必再搜索了。如

图 5.19(保留有 * 号的最高层结点)所示。根据树的定义，保留下来的结点的全体正是 $\mathbf{R}^N$ 的正交分解，它们的基的并集是 $\mathbf{R}^N$ 的一组标准正交基。它正是 x 关于 $\mathscr{B}$ 和花费函数 M 的最优基。

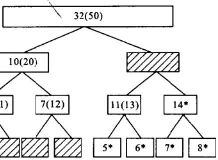


图 5.19　最优基

5.5.4　快速近似主因子分析

假设我们有 N 个实信号 $\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^N\in\mathbf{R}^d$，$\boldsymbol{x}^n=(x_i^n)_{i=1}^d$。记 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^N$。定义 $\boldsymbol{X}$ 的期望值 $E(\boldsymbol{X})=(E_k(\boldsymbol{X}))_{n=1}^N\in\mathbf{R}^d$ 以及标准偏差 $\sigma(\boldsymbol{X})=(\sigma_k(\boldsymbol{X}))_{n=1}^N\in\mathbf{R}^d$，其中

$$E_k(\boldsymbol{X})=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\boldsymbol{x}^n,\ \sigma_k(\boldsymbol{X})=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N(\boldsymbol{x}^n-E_k(\boldsymbol{X}))^2\right)^{1/2}$$

显然，$\sigma_k(\boldsymbol{X})$ 反映了 $\{x^n\}_{n=1}^N$ 在第 k 个坐标的发散程度。当某个 $\sigma_k(\boldsymbol{X})$ 很小时，可以认为不同的信号 $\boldsymbol{X}^n$ 在第 k 个坐标上的取值是相近的(特别地，若对某个 k，$\sigma_k(\boldsymbol{X})=0$，则 x_k^n 为常数，与 n 无关)。因此在允许的误差范围内，可以用 $E_k(\boldsymbol{X})$ 来代替 $\boldsymbol{x}_k^n$，$n=1,2,\cdots,N$。这样就可以达到压缩数据的目的。通常在应用中 N 都很大，所以效果也是可观的。

基于上述想法，希望找到一个 $\mathbf{R}^d$ 上的正交矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{B}}^*$，使得变换后的信号 $\boldsymbol{y}^n=\widetilde{\boldsymbol{B}}^*\boldsymbol{x}^n$，$n=1,\cdots,N$ 的偏差向量 $\sigma(\boldsymbol{Y})$ 在某种意义下是最小的，这里 $\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{y}^n\}_{n=1}^N$。记 $\widetilde{\boldsymbol{B}}^*$ 的转置为 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$，其列向量为 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_d$。上述变换即是 K－L 变换。这种方法称为主因子分析，而 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_d$ 称为是 K－L 基。

如何准确地解释 $\sigma(\boldsymbol{Y})$ 的分量是“最小”的含义并给出它的判断准则呢？首先注意到对任何正交变换 $\boldsymbol{B}^*$，由 $E(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}^*E(\boldsymbol{X}))$ 得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^d(\sigma_k(\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{X}))^2&=\sum_{k=1}^d\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N(\boldsymbol{y}_k^n-E_k(\boldsymbol{Y}))^2=\\&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^d(\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x}_k^n-E_k(\boldsymbol{X})))^2=\\&\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\sum_{k=1}^d(\boldsymbol{x}_k^n-E_k(\boldsymbol{X}))^2=\sum_{k=1}^d(\sigma_k(\boldsymbol{X}))^2\end{aligned}$$

第三个等式用到 $\boldsymbol{B}^*$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的正交变换，它保持向量的欧氏范数不变。上面说明了 d 个数之和 $\sum_{k=1}^d(\sigma_k(\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{X}))^2$ 是不变的。因此，我们要找的变换就是所谓的 K－L 变换，它由下面的定义给出。

定义 5.5.4　设 $X\in\mathbf{R}^d$ 固定。定义从正交变换全体 $\{\boldsymbol{B}^*\}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射为

$$M(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X}) := \sum_{k=1}^{d} \ln \sigma_k(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X}), \qquad \forall \text{ 正交变换 } \boldsymbol{B}^*$$

若 $\widetilde{\boldsymbol{B}}^*$ 是 $M(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X})$的最小值点，则称变换 $\widetilde{\boldsymbol{B}}^*$ 为(关于 $\boldsymbol{X}$ 的)K-L 变换。

解释一下，为什么通过使 $\prod_{k=1}^{d}\sigma_k(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X})$ 最小(等价于 $\prod_{k=1}^{d}(\sigma_k(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X}))^2$ 最小)来达到目的呢？从两个方面来说明理由。从反面来看，若 d 个数的和为定值，则当且仅当这 d 个数相等时，其乘积最大。为了从正面来说明，先证明下面的结论。仍设 $\boldsymbol{y}^n=\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{x}^n, n=1,2,\cdots,N$。

定理 5.5.5 设 $\text{span}\{\boldsymbol{x}^n\}=\mathbf{R}^d$。记 $\tilde{\boldsymbol{x}}^n=\boldsymbol{x}^n-E(\boldsymbol{X}), \tilde{\boldsymbol{y}}^n=\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{y}^n-E(\boldsymbol{Y})$。那么 $\tilde{\boldsymbol{y}}^n=\boldsymbol{B}^* \tilde{\boldsymbol{x}}^n$，$n=1,\cdots,N$，而且乘积 $\prod_{k=1}^{d}\sigma_k(\boldsymbol{Y})$ 最小，当且仅当

$$\sum_{n=1}^{N}\tilde{y}_k^n\tilde{y}_{k'}^n = 0, \qquad \forall k\neq k' \tag{5.5.13}$$

其中，$\tilde{y}_k^n, k=1,2,\cdots,d$，是 $\tilde{\boldsymbol{y}}^n$ 的分量。

证 显然，$\forall n=1,\cdots,N, \tilde{\boldsymbol{y}}^n=\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{x}^n-\boldsymbol{B}^* E(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{x}^n-E(\boldsymbol{X}))=\boldsymbol{B}^* \tilde{\boldsymbol{x}}^n$。

关于后一部分的证明，需要用到所谓 Hadamard 不等式：对于 d 阶正定矩阵 $\mathbf{A}=(a_{kk'})$，有 $\det\boldsymbol{A}\leqslant\prod_{k=1}^{d}a_{kk'}$，而且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是对角阵。

令 $a_{kk'}=\sum_{n=1}^{N}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n/N, k,k'=1,\cdots,d$。由于 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^N$ 能张成 $\mathbf{R}^N$。任取 $\boldsymbol{x}=(x_k)_{k=1}^d\in\mathbf{R}^d$，有

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle = \sum_{k,k'=1}^{d}x_k a_{kk'}x_{k'} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k,k'=1}^{d}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n x_k x_{k'}/N = \sum_{n=1}^{N}|\langle x,\tilde{x}^n\rangle|^2>0$$

即 $\boldsymbol{A}=(a_{kk'})_{kk'}$ 为正定矩阵。

由 $\tilde{\boldsymbol{y}}^n=\boldsymbol{B}^* \tilde{\boldsymbol{x}}^n$ 知

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{y}_k^n\tilde{y}_{k'}^n\Big)_{kk'} = \boldsymbol{B}^*\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n\Big)_{kk'}\boldsymbol{B} \tag{5.5.14}$$

因此

$$\det\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{y}_k^n\tilde{y}_{k'}^n\Big)_{kk'} = \det\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n\Big)_{kk'}$$

对等式右边的行列式用 Hadamard 不等式，有

$$\det\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n\Big)_{kk'}\leqslant\prod_{k=1}^{d}\sigma_k(Y)$$

而不等式左边与 $\boldsymbol{B}^*$ 无关(即与 $\boldsymbol{Y}$ 无关)。因此 $\prod_{k=1}^{d}\sigma_k(\boldsymbol{Y})$ 最小，也就是上述不等式中的等号成立，当且仅当式(5.5.13)成立。证毕。

定理 5.5.5 告诉我们，K-L 变换就是使得变换后的 $\tilde{\boldsymbol{y}}^n$ 满足式(5.5.13)。注意到 $\boldsymbol{y}^n=\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{x}^n$就是 $\boldsymbol{x}^n$ 在 $\boldsymbol{B}$ 下的系数，由此可见，K-L 变换的目的在于消除系数之间的相关性，即式(5.5.13)成立。这正符合使 $\sigma(\boldsymbol{Y})$达到“最小”的目的。

由此可见，想找 K-L 变换是很自然的，然而在实际上难以实现，因为从式(5.5.13)看到，K-L 基是由矩阵 $\Big(\sum_{n=1}^{N}\tilde{x}_k^n\tilde{x}_{k'}^n\Big)_{kk'}$ 的 d 个标准正交的特征向量构成，求出 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 所需的运算量为 $O(d^3)$。其次，即使求出 $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ 以后，每一次变换 $\boldsymbol{y}^n=\widetilde{\boldsymbol{B}}^* \boldsymbol{x}^n$ 需 $O(d^2)$次运算。为了绕开这个困难，

我们退一步，只在一切小波包基中来求 $M(\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{X})$ 的最小值点。这样得到的标准正交基称为近似 K－L 基，相应的正交变换为近似 K－L 变换。考虑到小波包基数量充分大，这种近似还是可以接受的，尤其是其算法的运算量由于使用小波包算法而大大减少。下面介绍该算法。

为方便起见，设 $d=2^J$，$\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{R}^d$ 上的正交小波包库，深度为 J。对 $\beta=(m,k)$，$0\leqslant m<2^k$，计算出 $\boldsymbol{x}^n$ 在 E_β 基下的系数 $(\lambda_p^{n,\beta})_{p=1}^{2^{J-k}}$。再计算

$$\sigma_p^\beta=\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\lambda_p^{n,\beta}-\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda_p^{n,\beta}\right)\right)^{1/2}$$

于是 $M^\beta=\sum\limits_{p=1}^{2^{J-k}}\ln\sigma_p^\beta(\boldsymbol{X})$ 是 $\boldsymbol{X}$ 在 E_β 的基下表示的偏差。同 5.5.3 一样，将 M^β 构成二元树（把它当成 5.5.3 中的 $M(s^\beta)$ 即可）。最后寻找一组基，使在这组基下，$\sum\limits_\beta M^\beta$ 这组基就是近似 K－L 基，记为 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_d)$，$\boldsymbol{y}^n=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^n$，$n=1,\cdots,N$。

进一步，对 b_j 重新编号，使得 $(\sigma(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{X}))_{k=1}^d$ 按下降次序排列。给定 $\varepsilon>0$，设 d' 满足 $(1-\varepsilon)\sum\limits_{k=1}^{d}\sigma_k(\boldsymbol{Y})\leqslant\sum\limits_{k=1}^{d'}\sigma_k(\boldsymbol{Y})$。通常 d' 远比 d 小。当 $k>d'$ 时，$\tilde{y}_k^n\approx 0$，$l\leqslant n\leqslant N$。

由于 d' 很小，可以对 $\{(y_k^n)_{k=1}^{d'}\}_{n=1}^N\subseteq\mathbf{R}^{d'}$ 寻找 K－L 基，即求出把矩阵 $\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\tilde{y}_k^n\tilde{y}_{k'}^n\right)_{k,k'=1}^{d'}$ 对角化的正交矩阵。然后求出 d' 维向量 $(y_k^n)_{k=1}$，$n=1,\cdots,N$，在这组基下的表示。

近似 K－L 变换的复杂度包括以下几个方面：

（1）将 N 个向量 $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n=1}^N\subseteq\mathbf{R}^d$ 作小波包展开：$O(Nd\log_2 d)$；

（2）求出所有 M^β，构成树结构：$O(d\log_2 d)$；

（3）求出最优基：$O(d+d\log_2 d)$；

（4）将基向量按下降次序编号：$O(d\log_2 d)$；

（5）将 $\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\tilde{y}_k^n\tilde{y}_{k'}^n\right)_{k,k'=1}^{d'}$ 对角化。

上面的最后一步可以不实施，这要根据具体情况而定。

5.6　小波分析应用简介

小波分析的应用是与小波分析的理论研究紧密地结合在一起的。毫不夸张地说，在当今信息时代，小波分析已经并将更加深刻地影响人们的生活。关于这一点，可以从下面的变化中看出：小波变换已经取代 JPEG 原有标准中的离散余弦变换（DCT），成为 JPEG2000 标准中的核心技术。限于篇幅，本节只介绍它在三个方面的应用。

5.6.1　在信号除噪方面的应用

在传统的基于 Fourier 变换的信号处理方法中，要求信号和噪声的频带重叠部分尽可能小。这样，在频域就可以通过时不变滤波方法将信号和噪声区分开。然而，当信号和噪声在频域有重叠时，基于 Fourier 变换的方法就难以处理了。这时需要使用其他变换，小波变换便是可供选择的方法之一。

假设要从被噪声污染的信号数据 $\boldsymbol{y}=(y_i)$ 中恢复真实信号数据 $\boldsymbol{x}=(x_i)$，而 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的关系是

$$y_i = x_i + \sigma N(0,1), \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

其中，$\sigma>0$ 为常数，$N(0,1)$ 是标准的高斯白噪声，n 是样本数。利用小波分析对信号进行降噪时，常常采用通过阈值处理消除信号噪声的方法。具体过程如下。

先对 $\boldsymbol{y}$ 作小波变换得 $Y=W\boldsymbol{y}$，记 Y 中对应低频和高频分量分别为 c,d，即 $Y=(c,d)$。再对高频分量系数 $d=(d_i)$ 进行阈值处理，处理方法分硬(hard)阈值处理和软(soft)阈值处理两种方法。

(1) 硬阈值处理方法

$$\hat{d}_i = \begin{cases} d_i, & 若\ |d_i| \geqslant t \\ 0, & 若\ |d_i| < t \end{cases}$$

(2) 软阈值处理方法

$$\hat{d}_i = \begin{cases} \operatorname{sgn} d_i(|d_i| - t), & 若\ |d_i| \geqslant t \\ 0, & 若\ |d_i| < t \end{cases}$$

最后，计算 $\hat{Y}=(c,\hat{d})$ 的逆小波变换 $\hat{\boldsymbol{x}}=W^{-1}\hat{Y}$。$\hat{\boldsymbol{x}}$ 即为原始信号 $\boldsymbol{x}$ 的恢复信号，当然是近似恢复。图 5.20 给出了一个被污染的信号以及通过除噪后的信号。

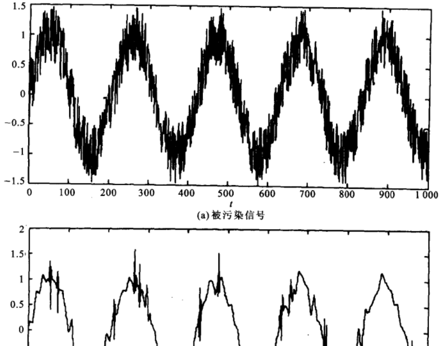


图 5.20 被污染信号和除噪后信号

5.6.2 在图像压缩方面的应用

在图像处理中，需要用二维小波变换或二维 Mallat 算法。在 5.3.3 中已经指出，高维 Mallat 算法可以是一维 Mallat 算法的张量积形式（见(5.3.30)和(5.3.31)），也可以是一般形式（见参考文献[6]）。

一张图像经模拟数字转换离散化后的数据量是巨大的，如此巨大的数据在传输、存储、处理方面会引起很大的困难。但实际上，图像数据中包含着大量无关紧要的信息，因此在保持图像一定的清晰度或分辨率的前提下，大量压缩其中无关紧要的数据，这就是图像数据压缩的任务。实际的图像信号像素点间一般都有相关性。相邻行之间、相邻列之间的相关性最强。1983 年，Burt 等人用 Laplacian 塔式分解进行图像数据压缩，其实质也是部分地消除原图像中的相关性，从而获得较好的压缩效果。变换域方法实现信号压缩是将信号按某一规范正交基进行展开，若展开后右边的不能忽略的项数越少则数据压缩比越高，即：将通常在时域或空域表示的信号变换到另外一些正交矢量空间（变换域）中进行表示，并使变换域中表示的各信号分量之间的相关性很小或互不相关，从而与变换前相比，其能量更加集中。因此，图像数据压缩主要利用以下性质：

(1) 图像像素点间的相关性（空间及时间）；

(2) 人眼的视觉特性（允许图像有一定的误差）；

(3) 变换域的能量集中特性（去除相关特性）；

(4) 编码数据间存在冗余度。

有损图像压缩（lossy compression）通常都采用变换编码方式。如：JPEG 采用的是 DCT 变换，JPEG2000 采用的是小波变换。经典的采用小波变换的图像压缩算法有 EZW 算法、SPIHT 算法和 EBCOT 算法，它们之间的主要区别在于对小波系数进行编码采用了不同的方法，这里不进行一一介绍。新一代静态图像压缩算法 JPEG2000 主要来源于 EBCOT 算法，JPEG2000 中所使用的离散小波变换可以选择，如果选择可逆的 LeGall(5,3)滤波器可以用来进行无损压缩，若选择不可逆的 Daubechies(9,7)滤波器可以得到高压缩率的有损压缩图像。另外，它还提供了很多特性，比如 ROI(Regions of Interest)压缩、容错传输、多位面图像压缩；还可以提供在变换域的图像旋转，这在一般的变换域是不能实现的。

用小波变换进行图像压缩是按照一定的规则来去掉部分小波系数，再对系数进行量化，从而达到数据压缩的目的。具体步骤如下：

(1) 对图像进行小波分解；

(2) 对细节信号（高频部分）系数进行阈值量化处理。对不同尺度的系数，选择相应的阈值，并对系数进行量化；

(3) 对量化后的系数进行小波重构。

与 DCT 变换比较，小波变换在下述两个方面具有显著的优势。

(1) 累进传输特性。小波变换由于其多分辨率的特性，非常适合图像的累进传输，这在实时图像传输与检索中是非常重要的。首先，可以利用有用的带宽传输图像的粗略部分，如果此图像不是用户所需要的，则放弃继续传送；如果是用户所需图像，则继续传送其细节部分。

(2) 在高压缩率时所表现的压缩性能。小波变换之所以在高压缩率有好的压缩效果是因为小波变换混合了大块的低频背景信息（如湖泊的表面）和小块的高频信息（如尖锐的边缘），

而自然图像的分布恰恰是这样的。而 JPEG 中 DCT 变换是一种分块的 DCT 变换，在高压缩率情况下，相当于对图像进行低频滤波，失去了大量的高频信息，因此使得边缘变模糊，造成通常所说的“块效应”。

（3）对设备的适应性。利用小波变换具有放大、缩小和平移的数学显微镜功能，可以方便地产生各种分辨率的图像，从而适应于不同分辨率的图像 I/O 设备和不同传输速率的通信系统。

图 5.21 给出了两幅分别用 JPEG 和 JPEG2000 压缩（512×512）的图像。



(a) 原图　　(b) JPEG 压缩，压缩比 =7　　(c) JPEG2000 压缩，压缩比 =8

图 5.21　JPEG 和 JPEG2000 压缩的图像

5.6.3　小波与快速数值计算

与其他变换一样，基于小波变换的数值算法是将算子和向量在小波基展开，而且计算也是在新坐标下进行，人们希望在新坐标下的运算更快。由于小波的快速算法、良好的时频局部化和消失矩条件，基于小波变换的数值算法显示出一些新的重要特点：它能使一大类算子有稀疏矩阵表示，这种表示可以看成是对算子的压缩，因而可以加快矩阵与向量相乘运算。毫无疑问，参考文献[18]是这方面的奠基工作。本节以一类积分算子为例，介绍小波变换在数值分析中的应用。

设 ϕ 是 $L_2(\mathbf{R})$ 的多尺度分析的正交尺度函数，ψ 是由它产生的正交小波。那么

$$\psi_{j,k}(x)\psi_{jk'}(y),\psi_{j,k}(x)\phi_{jk'}(y),\phi_{j,k}(x)\psi_{jk'}(y),\quad k,k'\in\mathbf{Z} \tag{5.6.1}$$

是 $L_2(\mathbf{R}^2)$ 的标准正交基。下面考虑积分算子

$$Tf(x)=\int_{\mathbf{R}}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\quad f\in L_2(\mathbf{R}) \tag{5.6.2}$$

在标准正交基(5.6.1)下的表示。形式上，将 $K(x,y)$ 在 $L_2(\mathbf{R}^2)$ 的标准正交基(5.6.1)下展开为

$$\begin{aligned}K(x,y)=\sum_{jkk'}&\alpha^j_{k,k'}\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)+\beta^j_{k,k'}\psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y)+\\&\gamma^j_{k,k'}\phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)\end{aligned} \tag{5.6.3}$$

其中，$\alpha^j_{k,k'}$，$\beta^j_{k,k'}$ 和 $\gamma^j_{k,k'}$ 为相应的内积，例如 $\alpha^j_{k,k'}=\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}K(x,y)\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。记矩阵 $\boldsymbol{A}_j:=(\alpha_{k,k'})_{kk'}$，$\boldsymbol{B}_j:=(\beta_{k,k'})_{kk'}$，$\boldsymbol{\Gamma}:=(\gamma_{k,k'})_{kk'}$。关于这些矩阵元素的大小，我们介绍下述定理。

定理 5.6.1　设 T 的核 $K(x,y)$ 满足 $|K(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1}$；$|\partial^M_x(x,y)|+|\partial^M_y(x,y)|\leqslant C_0|x-y|^{-1-M}$；$\left|\int_{I\times I}K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant C_0|I|$，$\forall$ 二进区间 I。那么对于有 M

阶消失矩的紧支集小波 ψ，成立不等式

$$|\alpha^j_{k,k'}|+|\beta^j_{k,k'}|+|\gamma^j_{k,k'}|\leqslant C_M(1+|k-k'|)^{-M-1},\qquad \forall j,k,k' \tag{5.6.4}$$

该定理的证明可以参看参考文献[6]或参考文献[7]的第二卷第八章。这个定理表明了在矩阵 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$ 中，当元素远离对角线时，其值是无穷小量。该定理不仅为近似计算提供了理论根据，同时，其"算子压缩"的思想，也为调和分析中著名的 $T(1)$ 定理提供了新的证明（见参考文献[7]的第二卷 8.3）。

将 f 在（一维）小波基 $\{\psi_{j,k}\}_{jk}$ 下展开，记 $d^j_k=\langle f,\psi_{j,k}\rangle$，$c^j_k=\langle f,\phi_{j,k}\rangle$。将 $f=\sum_{jk}d^j_k\psi_{j,k}$ 代入 Tf 的表达式(5.6.2)，得

$$Tf=\sum_{jk}\Big(\sum_{k'}\alpha^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)\psi_{j,k}(x)+\sum_{jk}\Big(\sum_{k'}\beta^j_{k,k'}c^j_{k'}\Big)\psi_{j,k}(x)+$$
$$\sum_{jk}\Big(\sum_{k'}\gamma^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)\phi_{j,k}(x) \tag{5.6.5}$$

因此，在已知 f 的小波分解系数 $d^j=(d^j_{k'})_{k'}$，$c^j=(c^j_{k'})_{k'}$ 条件下，关于 Tf 的计算转化为计算系数 $\boldsymbol{A}_jd^j=\Big(\sum_{k'}\alpha^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)_k$，$\boldsymbol{B}_jc^j=\Big(\sum_{k'}\beta^j_{k,k'}c^j_{k'}\Big)_k$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_jd^j=\Big(\sum_{k'}\gamma^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)_k$。

回忆起 P_j 和 $Q_j=P_{j+1}-P_j$ 分别是 $L_2(\mathbf{R})$ 到 V_j 和 W_j 的正交投影，于是，$TQ_jf=\int_{\mathbf{R}}\sum_{k'}d^j_{k'}\psi_{j,k'}(y)K(x,y)\mathrm{d}y$。再将它投影到 W_j 上，得

$$Q_jTQ_jf=\sum_k\langle TQ_jf,\psi_{j,k}\rangle\psi_{j,k}=$$
$$\sum_{k,k'}d^j_{k'}\psi_{j,k}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}}K(x,y)\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\sum_k\Big(\sum_{k'}\alpha^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)\psi_{j,k} \tag{5.6.6}$$

对 Q_jTP_j 和 P_jTQ_j 有类似的表达式

$$Q_jTP_jf=\sum_k\Big(\sum_{k'}\beta^j_{k,k'}c^j_{k'}\Big)\psi_{j,k} \tag{5.6.7}$$

$$P_jTP_jf=\sum_k\Big(\sum_{k'}\gamma^j_{k,k'}d^j_{k'}\Big)\phi_{j,k} \tag{5.6.8}$$

因此，完全可以将算子 Q_jTQ_j，Q_jTP_j 和 P_jTQ_j 与矩阵 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$ 等同起来。于是，可以将式(5.6.5)简记为

$$Tf=\sum_j(\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j+\boldsymbol{\Gamma}_j)f$$

上式也可直接由等式推出。

在应用中，我们不可能将其在所有尺度展开，只可能得到它的近似。对于式(5.6.3)的 $K(x,y)$ 我们有如下近似

$$K(x,y)=\sum_{kk'}s^0_{k,k'}\phi_{0,k}\phi_{0,k'}(y)+\sum_{jkk'}(\alpha^j_{k,k'}\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)+$$
$$\beta^j_{k,k'}\psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y)+\gamma^j_{k,k'}\phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y)) \tag{5.6.9}$$

其中，$s^j_{k,k'}=\int_{\mathbf{R}^2}K(x,y)\phi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。那么代替式(5.6.5)是 T 的近似 $Tf\approx T_nf$，其中，T_nf 为

$$T_n f = \sum_{k,k'} s^0_{k,k'} c^0_{k'} \phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{k,k'}\alpha^j_{k,k'} d^j_{k'}\psi_{j,k}(x) + \sum_{k,k'}\beta^j_{k,k'}c^j_{k'}\psi_{j,k}(x) + \sum_{k,k'}\gamma^j_{k,k'}d^j_{k'}\phi_{j,k}(x)\Big) \tag{5.6.10}$$

显然，在上面出现的 T_j 是 T 在不同尺度下的近似，即 $T_j=P_jTP_j$。同前面一样，可以将 T_j 等同于矩阵 $\boldsymbol{T}_j=(s^j_{k,k'})_{k,k'}$。

下面考虑上述方法的数值实现。为此假定 $K(x,y)$ 对 x 和 y 都是以 1 为周期，f 以 1 为周期。上面的表达式在周期情形也成立，只需把 $\psi_{j,k}$ 和 $\phi_{j,k}$ 分别换成它们的周期化 $\tilde{\psi}_{j,k}\left(=\sum_m \psi_{j,k}(x+m)\right)$ 和 $\tilde{\phi}_{j,k}$。当然积分区域由 $\mathbf{R}$ 换为$[0,1]$，此时矩阵为

$$\boldsymbol{T}_j=(s_{k,k'})^{2^j-1}_{k,k'=0}\qquad \boldsymbol{A}_j=(\alpha_{k,k'})^{2^j-1}_{k,k'=0}$$

$$\boldsymbol{B}_j=(\beta_{k,k'})^{2^j-1}_{k,k'=0}\qquad \boldsymbol{\Gamma}_j=(\gamma_{k,k'})^{2^j-1}_{k,k'=0}$$

它们都是 2^j 阶矩阵。若 T_n 已知，构造$\{\{\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j,\boldsymbol{\Gamma}_j\}^{n-1}_{j=0},T_0\}$的运算量为 $O(2^{2n})$。

记函数 f 在周期多尺度分析的 $\widetilde{V}_j$ 投影为 $P_jf=c^0_0+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}d^j_k\tilde{\psi}_{j,k}$。利用 $c^0=(c^0_0)$，$d^j=(d^j_k)^{2^j-1}_{k=0}$，$0\leqslant j\leqslant n-1$，以及周期信号的 Mallat 算法，可以重构出 $c^j=(c^j_k)^{2^j-1}_{k=0}$，$0\leqslant j\leqslant n-1$，运算量 $O(2^n)$。利用上式，我们有

$$T_nf=P_nTP_nf=s^0_{0,0}c^0_0+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}(\hat{d}^j_k\tilde{\psi}_{j,k}+\hat{c}^j_k\tilde{\phi}_{j,k})$$

其中 $$(\hat{d}^j_k)^{2^j-1}_{k=0}=\boldsymbol{A}_jd^j+\boldsymbol{B}_jc^j,\ (\hat{c}^j_k)^{2^j-1}_{k=0}=\boldsymbol{\Gamma}_jd^j,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-1 \tag{5.6.11}$$

式(5.6.11)就是基于小波的计算积分算子的数值方法。图 5.22 给出其矩阵表示($n=4$)。

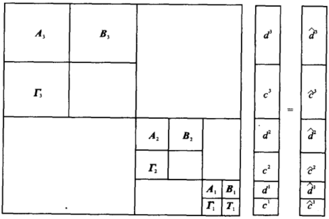


图 5.22 积分算子数值计算的矩阵表示($n=4$)。其中，只有 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j,\boldsymbol{\Gamma}_j,j=1,2,3$，和 $\boldsymbol{T}_1$ 是非零子矩阵

我们的任务就是要计算出上述所有系数 $\hat{c}^j_k,\hat{d}^j_k$。不难看出，其运算量为 $O(2^{2n})$(在已知 c^j 和 d^j 的前提下)。这在实际中是难以实现的。然而，在关于这些系数允许的误差范围内，其计算量可以大大减少。正是在这一点上，小波基显示出了其优点。

具体方法如下，选定自然数 μ，置 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$ 中沿对角线的一个宽为 2μ 的带之外的元素为零，得到新矩阵 $\boldsymbol{A}_{j,\mu},\boldsymbol{B}_{j,\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{j,\mu}$。以它们分别代替 $\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$，于是得到 T_n 的一个近似

$T_{n,\mu}$。根据定理 5.6.1 可以证明，$\| T_n - T_{n,\mu} \| = O(\mu^{-M})$。为使误差足够小，可以只让 M 适当大，而 μ 可以只取较小的值。显然，以 $\boldsymbol{A}_{j,\mu}$，$\boldsymbol{B}_{j,\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_{j,\mu}$ 分别代表 $\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$ 后，计算式(5.6.11)的运算量从 $O(2^{2n})$ 减少为 $O(2^n)$，与原始数据长度同阶。

为了应用上面的方法，我们需要计算出 $\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$。对于许多算子（比如微分算子、Hilbert变换分数阶导数和 Riesz 变换），我们可以通过一个较小的线性代数方程组的求解，来计算 $\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$。下面以微分算子 $T=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 为例来说明这一点。

例 5.6.1　对 $T=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，计算 $\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_j$。此时

$$\alpha^j_{k,k'} = 2^{2j}\int_{\mathbf{R}}\psi(2^jx-k)\psi'(2^jx-k')\mathrm{d}x = 2^j\alpha_{k-k'}$$

$$\beta^j_{k,k'} = 2^{2j}\int_{\mathbf{R}}\psi(2^jx-k)\phi'(2^jx-k')\mathrm{d}x = 2^j\beta_{k-k'}$$

$$\gamma^j_{k,k'} = 2^{2j}\int_{\mathbf{R}}\phi(2^jx-k)\psi'(2^jx-k')\mathrm{d}x = 2^j\gamma_{k-k'}$$

其中，$\alpha_k = \int_{\mathbf{R}}\psi(x-k)\psi'(x)\mathrm{d}x$，$\beta_k = \int_{\mathbf{R}}\psi(x-k)\phi'(x)\mathrm{d}x$ 和 $\gamma_k = \int_{\mathbf{R}}\phi(x-k)\psi'(x)\mathrm{d}x$。为了计算 α_k，β_k 和 γ_k，引入记号 $r_k = \int_{\mathbf{R}}\phi(x-k)\phi'(x)\mathrm{d}x$。记$(h_k)_k$ 和$(gk)k$ 分别为低通和带通滤波器，则有

$$\alpha_i = 4\sum_{k,k'}g_kg_{k'}r_{2i+k-k'},\quad \beta_i = 4\sum_{k,k'}g_kh_{k'}r_{2i+k-k'},\quad \gamma_i = 4\sum_{k,k'}h_kg_{k'}r_{2i+k-k'}$$

下面介绍计算 r_l 的方法。用 Fourier 变换改写 r_l 的表示，则有

$$r_l = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega}\mathrm{d}\omega \tag{5.6.12}$$

这说明 r_l 只依赖于 ϕ 的自相关函数（这个性质对一般卷积算子都对）。由于 $\mathrm{supp}\,\phi\subseteq[0,2M-1]$，$\forall\ |l|\geqslant 2M-1$，$r_l=0$。引入三角多项式 $r(\omega)=\sum_l r_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega}$。由式(5.6.12)知

$$r(\omega) = \sum_k(\omega+2k\pi)\,|\hat{\phi}(\omega)(\omega+2k\pi)|^2 =$$
$$2\,|m_0(\omega/2)|^2r(\omega/2)+|m_0(\omega/2+\pi)|^2r(\omega/2+\pi)$$

可见，$r(\omega)$是定义在三角多项式空间上的算子

$$M_0f(\omega) = |m_0(\omega/2)|^2f(\omega/2)+|m_0(\omega/2+\pi)|^2f(\omega/2+\pi)$$

以对应与特征值 1/2 的特征向量。可以证明，$M\geqslant 2$ 时，$r(\omega)$ 是惟一存在的。比较等式 $M_0r(\omega)=1/2r(\omega)$ 两边的系数，得到关于 r_l 的方程：$r_l = 2r_{2l}+\sum_n a_n(r_{2l+n}+r_{2l-n})$，其中 $a_n = \sum_k h_kh_{k-n}$。为保证 r_l 的惟一性，需用到规范条件 $\sum_l lr_l=-1$。后一等式成立的原因是 ϕ 满足所谓的多项式再生性质：$\sum_k\phi(x-k)=1$，$\sum_k(x-k)\phi(x-k)=c$。于是，$\sum_l lr_l = \int_{\mathbf{R}}\sum_l l\phi(x-l)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}(x-c)\phi'(x)\mathrm{d}x=-1$。

若在例 5.6.1 中选取 Daubechies 尺度 ϕ_N，则只有 $4N-3$ 项 $r_l(-2N+2\leqslant l\leqslant 2N-2)$不为 0。因此，$\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$，$\boldsymbol{\Gamma}_j$ 的带宽为 $4N-3$。图 5.23 表示其稀疏结构。



图 5.23 微分算子的稀疏结构(选取 Daubechies 尺度 ϕ_N 时,矩阵 A_j, B_j, Γ_j 的带宽为 $4N-3$)

习 题

1. 证明:若函数 f 在 (α,β) 是一致 Lip α,则它在任何点 $x_0\in(\alpha,\beta)$ 具有 Lip 指数 α。

2. 证明:$f(x)=x\sin(1/x)$ 在任何点 $x\in(-1,1)$ 具有 Lip 指数 1。但在 $(-1,1)$ 只是一致 Lip $\alpha,\alpha\leqslant 1/2$(提示,考察点列 $x_n=(n+1/2)^{-1}\pi^{-1}$)。

3. 证明:若是正交的尺度函数,则 $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(x-n)=1$。

4. 设 ψ 是式(5.3.14)定义的正交小波。若 ψ_1 满足 $\hat{\psi}_1(\omega)=m(\omega)\hat{\psi}(\omega)$, $m(\omega)$ 是 2π 周期的可测函数,且对任何 ω, $|m(\omega)|=1$,则 ψ_1 也是正交小波。

5. 证明引理 5.3.4 的证明过程中出现的矩阵几乎处处为酉阵。

6. 验证等式(5.3.29)。

7. 证明定理 5.3.3 的结论(1)。

8. 若以余弦函数代替式(5.5.7)中的正弦函数,引理 5.5.1、引理 5.5.2 和定理 5.5.4 该如何叙述。

9. 证明:$\{\sqrt{2}\sin(k\pi x)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是 $L_2[0,1]$ 的一组标准正交基。请构造 $\mathbf{C}^N$ 上相应的一组标准正交基。

参考文献

[1] Daubechies i. Orhtonormal Bases of Compactly Supported wavelets. Comm. Pure Appl Math. 1988,41:909-996

[2] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. Philadelphia: SIAM,1992

[3] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego: Academic Press, 1998

[4] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonhormonic Fourier Seriers. Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952),341～366.

[5] Liu Y M, Walter G G. Irregular Sampling in Wavelet Subspaces. J. Fourier Anal. Appl. 1995,2:181～189

[6] 龙瑞麟. 高维小波分析. 北京:世界图书出版社,1995

[7] Meyer Y. 小波与算子(第一、二卷). 尤众译. 北京:世界图书出版社,1994

[8] Cavaretta A S, Dahmen W, Micchelli C A. Stationary Subdivision. Memoirs AMS, 1991,93(1):1～186

[9] Chen D R, Jia R Q, Riemenschneider S D. Vector subdivision schemes in Sobolev spaces. Appl Comp Harmonic Anal. 2002,12:128～149

[10] Daubechies I, Lagarias J C. Two-scale difference equations I: Global regularity of solutions, SIAM J. Math. Anal. Appl. 1991,22:1388～1410

[11] Wang Y. Two-scale dilation equations and the mean spectral radius. Random and Computational Dynamics. 1996,4:47～72

[12] Jia R Q. Subdivision schemes in L_p spaces, Adv. in Comput. Math. 1995,3:309～341

[13] Strang G, Strela V. Short wavelets and matrix dilation eequations. IEEE, Trans. on Signal Processing,1995,43:108～115

[14] Cohen A, Daubechies I, Feauveau J C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Comm. Pure Appl. Math. 1992,45:485～560

[15] Wickerhauser M V. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. Massachusetts: A K Peters, Ltd., 1994

[16] Chen D R. On the splitting trick and wavelet frame packets, SIAM Math. Anal. 2000,31:726～739

[17] Meyer Y. Wavelets Algorithms and Applications. Philadelphia: SIAM, 1993

[18] Belkin G, Coifman R, Rokhlin V. Fast wavelet transformas and numerical algorithms. Comm. Pure Appl. Math. 1991,44:141～183

第六章　随机微分方程

随机微分方程是在概率论和微分方程的基础上产生的一门边缘学科，是应用促理论发展的典范，现已发展成为概率论的一个重要分支，并在物理学、生物学、控制论、现代通信理论和社会经济等领域有着广泛而深入的应用，日益成为一种有效的分析工具。随机微分方程可分为一般随机微分方程和 Ito 随机微分方程。由于后者在工程技术中应用广泛，将予以重点介绍。有关前者的详细讨论可参见参考文献[1]。Ito 随机积分的引入主要有两种途径：一种是采用逼近理论，定义简单函数的 Ito 随机积分，然后再推广到一般情形，这需要较深的理论基础；另一种是均方理论方法，类似于高等数学中积分的定义，相对而言容易被非概率论专业的学生接受和理解，因此采用此种方法。本章首先有针对性地介绍随机过程的一些基本概念，包括 Markov 过程、Brown 运动、随机微积分等，然后在此基础上重点介绍 Ito 随机微分方程的定量方面的一些基本理论及其简单应用，有关定性方面的讨论参见参考文献[2]。

6.1　引　言

先举两个随机微分方程的实际例子。

例 6.1.1　考虑简单的某种群数量增长模型

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)N(t), \qquad N(0) = N_0 \tag{6.1.1}$$

式中，$N(t)$是 t 时刻种群个体数量，$a(t)$是 t 时刻该种群的相对增长率。

如果在 t 时刻增长率 $a(t)$完全已知且是常数，则模型就是著名的 Malthus 模型。如果在 t 时刻增长率 $a(t)$不是完全确定的，而是受某些外部不可控因素的影响，即 $a(t)$的表达式为$a(t)=r(t)+$“噪声”，$r(t)$是 t 时刻的相对增长率，是已知的，且往往取为常数。而“噪声”项的精确形式是未知的，仅知道它的概率分布。

例 6.1.2　在电路的某一固定点，t 时刻的电荷 $Q(t)$满足微分方程

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = F(t),\ Q(0) = Q_0, Q'(0) = I_0 \tag{6.1.2}$$

式中，L 是电感，R 是电阻，C 是电容，$F(t)$是 t 时刻的位势源。如果 $F(t)$不是确定的，而是有形式 $F(t)=G(t)+$“噪声”，$G(t)$是 t 时刻的位势源，是完全确定的。

上述两个方程共同的特点是：由于噪声项的存在，也就是引入随机因素的影响，它们不再是普通的微分方程。随机因素的引入直接导致方程的解不再是确定性函数，而是随时间变化的随机变量，即随机过程，因而需要给出这类方程精确的数学描述以及处理方法。这类方程形式在工程技术中极为常见，关于它们的求解方法和理论，将是这章讨论的重点。

6.2 基本知识

6.2.1 随机过程

用Ω表示基本空间，$\mathscr{F}$是Ω上一个**σ代数**，即$\mathscr{F}$是由Ω的某些子集组成的集类且满足：(1) $\Omega\in\mathscr{F}$；(2) 若$A\in\mathscr{F}$，则$A^c=\Omega-A\in\mathscr{F}$；(3) 若$A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$，称$(\Omega,\mathscr{F})$为**可测空间**。若在$\mathscr{F}$上定义了一个测度$\mu$，则称$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为**测度空间**。进一步，若测度$\mu$满足$\mu(\Omega)=1$，则称$\mu$为**概率**，此时用$P$表示，相应地称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**。

一般情形下，Ω的子集类$\mathfrak{S}$未必是σ代数，但在Ω上至少存在一个σ代数包含集类$\mathfrak{S}$，如Ω的所有子集组成的集类是一个σ代数且包含$\mathfrak{S}$。将Ω上包含$\mathfrak{S}$的最小σ代数称为由子集类$\mathfrak{S}$所生成的σ代数，记为$\sigma(\mathfrak{S})$。例如，取Ω为实数域$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，令

$$\mathfrak{S}=\{A:A=\mathbf{R}\text{ 或}[a,b)\text{ 或}(-\infty,b)\text{ 或}[a,+\infty),a,b\in\mathbf{R}\}$$

则$\mathfrak{S}$不是$\mathbf{R}$上的一个σ代数，由它生成的最小σ代数$\sigma(\mathfrak{S})$称为直线上的**Borel域**，记为$\mathscr{B}^1$或$\mathscr{B}$。$\mathscr{B}$中的集称为**Borel集**。相应地称$(\mathbf{R},\mathscr{B})$为**Borel空间**。类似地可以定义n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$上的n维Borel域$\mathscr{B}^n$及n维Borel空间$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$。

设E_1和E_2是两个集合，用$f:E_1\mapsto E_2$表示由E_1到E_2的影射。对任何的$A\subset E_1$，记A关于影射f的像为$f(A)=\{y:y=f(x),x\in A\}$，而对任何的$B\subset E_2$，B关于影射f的原像记为$f^{-1}(B)=\{x:x\in E_1,f(x)\in B\}$。

定义 6.2.1 设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$(\mathbf{R},\mathscr{B})$是Borel空间，$X:\Omega\mapsto\mathbf{R}$。如果对任意$A\in\mathscr{B}$有$X^{-1}(A)\in\mathscr{F}$，则称$X$是$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbf{R},\mathscr{B})$的**可测函数**，简称$X$是$\mathscr{F}$可测的，记为$X\in\mathscr{F}$。此时也称$X$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的**随机变量**。

易证$X^{-1}(\mathscr{B})=\{X^{-1}(B):B\in\mathscr{B}\}$是$\Omega$的子集类，且是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数。

若$X^{\mathrm{T}}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的每个分量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$都是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，则称$X$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的$n$**维随机变量**或$n$**维随机向量**。

设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是$\mathscr{F}$的一族子σ代数，其中T为参数集，通常取T为$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$或$[a,b]$或非负整数。如果$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$满足对任意的$s,t\in T,s<t$都有$\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}$，则称$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$为$\mathscr{F}$的一族上升的子$\sigma$代数。

定义 6.2.2 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$(\mathbf{R},\mathscr{B})$是Borel空间，T为参数集，$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是$\mathscr{F}$的一族上升的子σ代数。如果对每个固定的$t\in T$，有$X(t,\omega):\Omega\mapsto\mathbf{R}$，且$X(t,\omega)\in\mathscr{F}_t$，则称$\{X(t,\omega),t\in T\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$适应的**随机过程**。

设$\{X(t,\omega),t\in T\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$适应的随机过程。对任意固定的$t\in T$，当$s\leqslant t$时，$X^{-1}(s,\mathscr{B})$是σ代数，但$\bigcup_{s\leqslant t}X^{-1}(s,\mathscr{B})$未必是$\sigma$代数。这是由于无穷多个$\sigma$代数的并，不一定是$\sigma$代数。若令

$$\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t)=\sigma\Big(\bigcup_{s\leqslant t}X^{-1}(s,\mathscr{B})\Big),\qquad t\in T$$

则$\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t)$表示由$\bigcup_{s\leqslant t}X^{-1}(s,\mathscr{B})$所生成的$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数。显然，当$t_1<t_2$时，$\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t_1)\subset\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t_2)$，即$\{\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t),t\in T\}$也是$\mathscr{F}$的一族上升的子$\sigma$代数，称它是由随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$所生成的$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数族。由于对每个固定的$t$，

$X(t,\omega)\in\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t)$，因此$\{X(t,\omega),t\in T\}$也是$\{\sigma(X(s,\omega),s\leqslant t),t\in T\}$适应的随机过程，简称$\{X(t,\omega),t\in T\}$为随机过程。根据这个解释，随机过程也可以简单地定义为对任意固定的$t\in T$，$X(t,\omega)$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量，称随机变量族$\{X(t,\omega),t\in T\}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程。这正是许多教科书中关于随机过程的定义，今后，若无特别说明，均这样认为。

如果将随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$看作是定义在$\Omega\times T$上的二元函数，那么对固定的$t\in T$，$X(t,\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量；而对固定的$\omega\in\Omega$，$X(t,\omega)$是定义在T上的实函数，称为随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$的一条样本函数或轨道。在工程中，通过测量所获得的往往是随机过程的一些样本曲线，每条样本曲线表示一次试验随时间变化的结果。因此，对随机过程进行一次试验测量，获得的样本函数是随机的。下面举一个简单的例子来说明。

例 6.2.1 热噪声电压[2]。电子元器件由于内部微观粒子(如电子等)的随机热运动所引起的端电压，称为热噪声电压。用$\{X(t,\omega),t\in[0,+\infty)\}$表示电子元件的热噪声电压。在第一次试验中，进行长时间的测量，可以获得一条电压-时间曲线$x(t,\omega_1)$，为一条样本曲线；进行第二次试验，可以获得另一条样本曲线$x(t,\omega_2)$……进行第n次试验，可以获得第n条样本曲线$x(t,\omega_n)$等等，如图 6.1 所示。一次试验所得到的样本曲线是随机的。

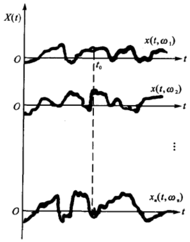


图 6.1 随机过程的样本曲线

如何将随机过程$\{X(t,\omega),t\in[0,+\infty)\}$理解为一族随机变量呢？固定$t=t_0$，考察$X(t,\omega)$在$t_0$的数值$X(t_0,\omega)$，第一次试验值为$x(t_0,\omega_1)$，第二次试验值为$x(t_0,\omega_2)$，……，第$n$次试验值为$x(t_0,\omega_n)$。显然，由于试验环境等的变化，在$t_0$时刻，多次试验的结果是随机的，从而$X(t_0,\omega)$是一个随机变量，如图 6.1 所示。当$t$变化时，$\{X(t,\omega),t\in[0,+\infty)\}$是一族随机变量，因此它是一个随机过程。

类似地可以定义n维随机过程。

在概率论中，用分布函数表示随机变量的统计分布。同样地，也可以用有限维分布函数表示随机过程的统计分布。为方便起见，今后将随机过程$\{X(t,\omega),t\in T\}$简记为$\{X(t),t\in T\}$或$X(t)$。

定义 6.2.3 设$\{X(t),t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程，对任意正整数n、任意参数$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$及任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$，函数

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\leqslant x_1,X(t_2)\leqslant x_2,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n\}\quad(6.2.1)$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 **n 维分布函数**。

特别地，若对任意正整数n及任意参数$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，n维随机向量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))^{\mathrm{T}}$的分布函数是绝对连续的，即存在$\mathbf{R}^n$上关于$x_1,x_2,\cdots,x_n$的 Borel 函数$p_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n$$

则称$p_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 **$n$ 维概率密度**。

n 维分布函数描述随机过程$\{X(t),t\in T\}$在任意 n 个时刻的统计特性。随机过程$\{X(t),t\in T\}$的一维分布函数，二维分布函数等的集合

$$\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n):t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\} \tag{6.2.2}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**有限维分布函数族**，它描述随机过程$\{X(t),t\in T\}$统计分布。同样地，概率密度的全体

$$\{p_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n):t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\} \tag{6.2.3}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**有限维概率密度族**，它也描述随机过程$\{X(t),t\in T\}$统计分布。

显然，随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维分布函数族(6.2.2)具有如下性质。

(1) 对称性。对于$(1,2,\cdots,n)$的任意一种排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}) \tag{6.2.4}$$

(2) 相容性。当 $m<n$ 时，有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)=F_{t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty) \tag{6.2.5}$$

反之，对给定的满足对称性式(6.2.4)和相容性式(6.2.5)条件的有限维分布函数族式(6.2.2)是否一定存在一个以式(6.2.2)作为有限维分布函数族的随机过程呢? 随机过程的Kolmogorov存在性定理回答了这个问题。

定理 6.2.1(Kolmogorov 存在定理) 对给定的参数集 T 及满足对称性式(6.2.4)和相容性式(6.2.5)的分布函数族式(6.2.2)，则必存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及定义在其上的随机过程$\{X(t),t\in T\}$，使得它的有限维分布函数族是式(6.2.2)。

Kolmogorov 存在定理的证明参见参考文献[3]，它是随机过程理论的基本定理，也是证明随机过程存在性的有力工具。值得注意的是，Kolmogorov 存在定理是从构造的角度来证明随机过程的存在性的，因此定理中的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$和随机过程$\{X(t),t\in T\}$不惟一。另一方面，Kolmogorov 存在定理也说明随机过程的有限维分布函数族是随机过程统计特性的完整描述。

6.2.2 随机过程的数字特征和特征函数

定义 6.2.4 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程。如果对任意的 $t\in T$，$E(X(t))$存在，则称函数

$$m_X(t)=E(X(t)),\qquad t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**数学期望**，也称为随机过程的**均值函数**或**一阶矩**。

定义 6.2.5 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程。如果对任意的 $t\in T$，$E(X^2(t))$存在，则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$为**二阶矩过程**。称函数

$$\mathrm{Var}_X(t)=E(X(t)-m_X(t))^2,\qquad t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**方差函数**。称函数

$$C_X(s,t)=E(X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t)),\quad s,t\in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**协方差函数**。称函数

$$R_X(s,t)=E(X(s)X(t)),\qquad s,t\in T$$

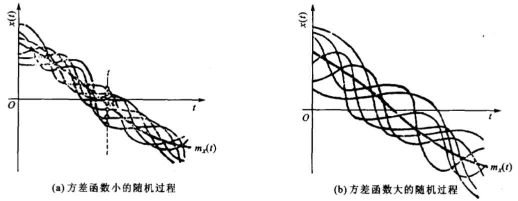
为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**相关函数**。

根据 Schwarz 不等式 $E|XY|\leqslant\sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$，二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$的协方差函数$C_X(s,t)$和相关函数 $R_X(s,t)$一定存在，且

$$C_X(s,t) = R_X(s,t) - m_X(s)m_X(t), \quad s,t \in T$$

特别地，当 $m_X(t)\equiv 0$ 时，有 $C_X(s,t)=R_X(s,t)$，此时协方差函数和相关函数是一致的。

随机过程$\{X(t),t\in T\}$的均值函数 $m_X(t)$描述了样本函数在 t 时刻的平均取值，方差函数 $\mathrm{Var}_X(t)$描述了样本函数在 t 时刻相对于均值函数 $m_X(t)$的偏离程度。均值函数 $m_X(t)$是 t 的一条固定的曲线，样本曲线围绕均值函数曲线上下波动，其幅度越大，说明偏离程度越大。例如，图 6.2 中(a)和(b)给出了两个具有相同均值函数的随机过程的样本曲线图，(a)图的方差函数比(b)图的方差函数小。而协方差函数 $C_x(s,t)$和相关函数 $R_X(s,t)$则反映了随机过程$\{X(t),t\in T\}$在 s 时刻和 t 时刻的线性相关程度。



(a) 方差函数小的随机过程　　(b) 方差函数大的随机过程

图 6.2　均值相同但方差不同的随机过程

在实际问题中，有时需要考虑两个或两个以上随机过程之间的关系。例如，把一个随机信号 $X(t)$输入到一个线性系统，那么系统的输出 $Y(t)$也是一个随机过程，实际需要讨论输入随机过程 $X(t)$和输出随机过程 $Y(t)$之间的联系，因而需要讨论它们的联合统计特性。这个可以用它们的联合分布函数来描述，在此仅给出描述它们之间线性相关的互协方差函数和互相关函数的定义。

定义 6.2.6　设$\{X(t),t\in T\}$，$\{Y(t),t\in T\}$是两个二阶矩过程，则称函数

$$C_{XY}(s,t) = E(X(s) - m_X(s))(Y(t) - m_Y(t)), \quad s,t \in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的**互协方差函数**。称函数

$$R_{XY}(s,t) = E(X(s)Y(t)), \quad s,t \in T$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的**互相关函数**。

如果对任意的 $s,t\in T$，有 $C_{XY}(s,t)\equiv 0$，即 $R_{XY}(s,t)=m_X(s)m_Y(t)$，则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$的**互不相关**。

在概率论中，随机变量的分布函数与特征函数是相互惟一确定的。一般情况下，特征函数可以看作是广义 Fourier 变换，而 Fourier 分析是数学中非常有力的常用工具，在许多数学分支中都起着重要作用。由于特征函数既能完全确定随机变量的统计特性，又具有良好的分析性质，所以它在随机微分方程等领域中有着重要应用。有关随机变量的特征函数及性质的详细讨论可参见参考文献[4]。

随机过程的特征函数可以用类似于随机向量的特征函数的定义方式来定义。自然，由于

随机过程$\{X(t),t\in T\}$的分布是由有限维分布函数族来确定的，相应地它也有有限维特征函数族。

定义 6.2.7　设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，对任意n个固定的$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，在$\mathbf{R}^n$上定义函数

$$\phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=E\left(\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}u_kX(t_k)\right\}\right)$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的 **n 维特征函数**。称特征函数的全体

$$\{\phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n):t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geqslant 1\}\tag{6.2.6}$$

为随机过程$\{X(t),t\in T\}$**有限维特征函数族**。

例如，设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，若对任意正整数n和$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))^{\mathrm{T}}$服从$n$维正态分布，即过程的有限维分布是正态分布，则称随机过程$\{X(t),t\in T\}$为正态过程或 Gauss 过程。对任意固定的$t\in T$，由于$X(t)\sim N(m_X(t),\sigma_X^2(t))$，所以它的一维特征函数为

$$\phi_t(u)=\exp\left\{\mathrm{i}m_X(t)u-\frac{1}{2}\sigma_X^2(t)u^2\right\}$$

其中，$m_X(t)$是均值函数，$\sigma_X^2(t)$是方差函数。一般地，它的n维特征函数为

$$\phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{m}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}\boldsymbol{u}\right\}$$

其中$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$\boldsymbol{m}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\Sigma}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$分别是随机向量$(X(t_1),X(t_2),\cdots,X(t_n))^{\mathrm{T}}$的数学期望和协方差矩阵，即

$$\boldsymbol{m}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{\mathrm{T}}=(m_X(t_1),m_X(t_2),\cdots,m_X(t_n)),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{t_1,t_2,\cdots,t_n}=(C_X(t_i,t_j))$$

定理 6.2.2　随机过程$\{X(t),t\in T\}$的有限维分布函数族(6.2.2)和有限维特征函数族(6.2.6)相互惟一确定。

6.2.3　Markov 过程

实际问题中所遇到的许多随机过程在数学上都可以精确地归结为或近似地归结为 Markov 过程，这类过程的一个重要特点是它具有无后效性，即“知道现在”，而“过去”与“未来”无关。先考查几个例子。

例 6.2.2　直线上质点的随机游动。

设一个质点在实数轴上移动，零时刻时它位于原点，每隔单位时间向左或向右移动一个长度单位。向右移动的概率为$p(0<p<1)$，向左移动的概率为$q=1-p$。由于质点在直线上的移动是随机的，因此质点的这种移动称为质点在直线上的随机游动。令质点在n时刻的位置为$X(n)$，$n=0,1,\cdots$。显然，若已知质点现在的位置$X(n)$，将来$n+k$时刻所处的位置$X(n+k)$只与现在的位置有关，而与n时刻前(即过去)所处的位置无关。所以，直线上质点的随机游动具有无后效性，即过程$\{X(n),n=0,1,\cdots\}$是 Markov 过程。

例 6.2.3　来到某银行一个服务窗口的顾客。

若令$X(t)$表示在$[0,t]$时段内来到窗口的顾客数，则来到的顾客数$X(t)$是随机的。已知现在t_n时刻前所来到的顾客数$X(t_n)$，那么未来$t(t_n<t)$时刻前来到的顾客数$X(t)$只依赖于t_n时刻前来到的顾客数$X(t_n)$。因为$[0,t]$内来到的顾客数等于$[0,t_n]$内来到的顾客数加上

$(t_n,t]$内来到的顾客数，而$(t_n,t]$内来到的顾客数与t_n时刻前来到的顾客数无关。因此，$\{X(t),t\in[0,+\infty)\}$具有无后效性，是 Markov 过程。

例 6.2.4 Brown 运动。

1827 年英国植物学家 Robert Brown 观察到浸没在液体中小花粉粒子的无规则运动，这是粒子与周围液体的分子碰撞的结果。这种无规则的粒子运动称为 Brown 运动，运动的粒子称为 Brown 粒子。在液体中作一空间直角坐标系，不妨假设 Brown 粒子在起始时刻位于坐标原点，Brown 粒子在t时刻所处的位置为$\boldsymbol{X}(t)$。由于 Brown 粒子将来(t时刻后)所处的位置只依赖于现在(t时刻)所处的位置，而与过去(t时刻前)Brown 粒子的位置无关。所以，Brown 粒子的无规则运动具有无后效性，也就是过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\geqslant 0\}$具有无后效性，是 Markov 过程，且是三维 Markov 过程。有关 Brown 运动的定义和一些简单性质将在 6.2.5 节中介绍。

定义 6.2.8 设$\{X(t),t\in T\}$为随机过程。若对任意正整数n，任意$t_1<t_2<\cdots<t_n<t,t_i,t\in T$，有

$$P\{X(t)\leqslant x\mid X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_n)=x_n\}=P\{X(t)\leqslant x\mid X(t_n)=x_n\}\tag{6.2.7}$$

则称$\{X(t),t\in T\}$为 **Markov 过程**。

类似地可以定义n维 Markov 过程。

利用条件分布函数可以给出 Markov 过程的定义，这种定义既简单又易于理解 Markov 过程无后效性的特点。关于 Markov 过程的定义，还有其他等价的方式，如利用条件概率和条件数学期望等来定义 Markov 过程，而这些等价的定义要求较深的概率论基础知识，有关这方面详细讨论可参见参考文献[3]。

称式(6.2.7)为随机过程的 **Markov 性或无后效性**。Markov 过程$\{X(t),t\in T\}$所可能取值的全体，称为过程的状态空间，记为E。E中的每一元素，即过程可能的取值$X(t)=x$称为过程的状态。若$X(t)=x$，就说x是过程在t时刻所处的状态。这样，如果把t_n看作“现在”，$t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$看作“过去”，t看作“未来”，那么 Markov 性可以解释为在已知过程现在所处的状态下，过程未来所处的状态与过去所处的状态无关，即就是知道现在，过去与未来是相互独立的。因此，Markov 性可以认为是相互独立性的一种自然推广。

根据参数空间T和状态空间E的情况，Markov 过程$\{X(t),t\in T\}$可分为三类：

(1) 时间离散、状态离散的 Markov 过程。通常称这类过程为 Markov 链，简称马氏链。如在例 6.2.2 中，Markov 过程$X(n)$的参数集$T=\{0,1,\cdots\}$，状态空间E为所有整数组成的集合。因此，过程$\{X(n),n=0,1,\cdots\}$是 Markov 链。

(2) 时间连续、状态离散的 Markov 过程。如在例 6.2.3 中，t时刻前来到窗口的顾客数$X(t)$的参数集$T=[0,+\infty)$，状态空间E为所有非负整数组成的集合。因此，过程$\{X(t),t\in[0,+\infty)\}$是时间连续，状态离散的 Markov 过程。

(3) 时间连续、状态连续的 Markov 过程。如在例 6.2.4 中，Brown 运动$\boldsymbol{X}(t)$的参数集$T=[0,+\infty)$，状态空间E为$\mathbf{R}^3$。因此，过程$\{\boldsymbol{X}(t),t\in[0,+\infty)\}$是时间连续、状态连续的三维 Markov 过程。

在此，仅简单介绍时间连续、状态连续的 Markov 过程。有关状态离散的 Markov 过程的详细讨论可参见参考文献[2,5]。

称式(6.2.7)的右边为 Markov 过程$X(t)$的**转移概率分布函数**，记为$F(s,x;t,y)$，即

$$F(s,x;t,y)=P\{X(t)\leqslant y\mid X(s)=x\},\qquad s<t$$

它表示过程在 s 时刻处于状态 x 条件下，时间进行到 t 时刻时过程状态不超过 y 的概率分布。

转移概率分布是 Markov 过程的一个非常重要的概念，因为 Markov 过程的有限维分布由初始时刻 t_0 时 $X(t_0)$ 的概率分布和转移概率分布所完全确定，因此，只要知道了 Markov 过程的初始分布和转移概率分布就可以获得过程的有限维分布，即就是完全确定了 Markov 过程的统计规律。

显然，转移概率分布函数 $F(s,x;t,y)$ 关于 y 满足分布函数的如下性质：

(1) $0\leqslant F(s,x;t,y)\leqslant 1$；

(2) $F(s,x;t,y)$ 是 y 的非降函数；

(3) $F(s,x;t,y)$ 关于 y 是右连续的，即 $\lim\limits_{h\to 0^+}F(s,x;t,y+h)=F(s,x;t,y)$；

(4) $\lim\limits_{y\to -\infty}F(s,x;t,y)=0$，$\lim\limits_{y\to +\infty}F(s,x;t,y)=1$。

对转移概率分布函数，通常规定 $F(t,x;t,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ 0, & x>y\end{cases}$。特别地，如果转移概率分布函数 $F(s,x;t,y)$ 只依赖于时间间隔 $t-s$，而与 s,t 本身无关，此时记为 $F(t-s,x;y)=F(s,x;t,y)$ 或 $F(\tau,x;y)=F(s,x;s+\tau,y)$，则称 $F(\tau,x;y)$ 为**时齐的转移概率分布函数**，相应的 Markov 过程称为时齐 Markov 过程。时齐转移概率分布函数 $F(\tau,x;y)$ 的直观意义是从状态 x 转移到状态集 $(-\infty,y]$ 的概率仅与转移所耗的时间 τ 有关，而与转移的起始时刻 t 无关。

对固定的 x,s 和 t，如果存在 $\mathbf{R}$ 上关于 y 的 Borel 函数 $p(s,x;t,y)$，有下式

$$F(s,x;t,y)=\int_{-\infty}^{y}p(s,x;t,u)\mathrm{d}u$$

成立，那么，函数 $p(s,x;t,y)$ 称为 Markov 过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的**转移概率密度**或**转移概率函数**，它关于 y 满足概率密度的性质。若 Markov 过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是时齐的，则相应的转移概率密度记为 $p(\tau,x;y)$。

对转移概率密度，通常规定 $p(t,x;t,y)=\delta(y-x)$，其中 $\delta(\cdot)$ 表示 Dirac δ-函数。这是由于在 t 时刻要求概率分布 $P\{X(t)=x\}=1$。

从 Markov 过程的定义可知，过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是 Markov 过程的充分必要条件是 $p(t_1,x_1,t_2,x_2,\cdots,t_n,x_n;t,x)=p(t_n,x_n;t,x)$。

利用 Markov 性可以获得下面有关转移概率分布函数的重要结果。

定理 6.2.3　设 $\{X(t),t\in T\}$ 是 Markov 过程，则对任意 $s<u<t,s,u,t\in T$，有

$$F(s,x;t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(s,x;u,\mathrm{d}y)F(u,y;t,z)\tag{6.2.8}$$

这个方程称为 Chapman - Kolmogorov 方程，简称为 C - K 方程。特别地，对时齐的转移概率分布函数 $F(\tau,x;y)$，有 C - K 方程

$$F(s+t,x;z)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(s,x;\mathrm{d}y)F(t,y;z)\tag{6.2.9}$$

同样地，如果 Markov 过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的转移概率密度 $p(s,x;t,y)$ 存在，则 C - K 方程变为 $p(s,x;t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,y;t,z)p(s,x;u,y)\mathrm{d}y$，即就是在时间间隔 $[s,t]$ 内，$X(t)$ 从状态 x 转移到状态 z 的概率等于 $X(t)$ 在任何 $u(s<u<t)$ 时刻先转移到任一状态 y，然后，不依赖于转移到 y 的方式，再转移到状态 z 的概率。进一步，若转移概率密度 $p(s,x;t,y)$ 是时齐的，则有

$$p(s+t,x;z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(t,y;z)p(s,x;y)\mathrm{d}y。$$

对于状态离散的 Markov 过程，也有上述类似的 C－K 方程。

6.2.4　扩散过程

扩散过程是一类非常重要的 Markov 过程，因为它的转移概率密度和转移概率分布函数分别满足偏微分方程，即向前方程和向后方程。这两类偏微分方程为研究 Ito 随机微分方程解的统计规律提供了一种有效途径。

定义 6.2.9　若一维 Markov 过程$\{X(t),t\in T\}$的转移概率密度 $p(s,x;t,y)$满足下述条件：

(1) 对任意的 $\varepsilon>0$，t 和 x，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|>\varepsilon}p(t,x;t+h,y)\mathrm{d}y=0$$

(2) 存在函数 $a(t,x)$和 $b(t,x)$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，t 和 x，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x)p(t,x;t+h,y)\mathrm{d}y=a(t,x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x)^2p(t,x;t+h,y)\mathrm{d}y=b(t,x)$$

则称 Markov 过程$\{X(t),t\in T\}$为**扩散过程**，其中函数 $a(t,x)$称为扩散过程的**偏移系数**，$b(t,x)$称为**扩散系数**。

如果质点在液体中的运动用 $X(t)$来描述，则条件(1)和(2)及 $a(t,x)$和 $b(t,x)$的直观意义如下：当 h 很小时，在时间区间$[t,t+h]$内，在 t 时刻，质点在点 x 所作的位移为 $a(t,x)h+\delta x+o(h)$，其中 $a(t,x)$是质点在介质中偏移的速度，δx 是质点的随机波动，这种随机波动是由于随机碰撞和热的起伏及其他因素所引起的。$E(\delta x)=0$，$\mathrm{Var}(\delta x)=b(t,x)h$，即 $b(t,x)$与质点邻域中液体分子的平均能量成正比。

可以证明下面的两个条件蕴涵条件(1)和(2)。

(1^*) 存在一个正数 ε，对任意的 t 和 x 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E(|X(t+h)-X(t)|^{2+\varepsilon}\mid X(t)=x)=0$$

(2^*) 存在函数 $a(t,x)$和 $b(t,x)$，使得对任意的 t 和 x，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E(X(t+h)-X(t)\mid X(t)=x)=a(t,x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E((X(t+h)-X(t))^2\mid X(t)=x)=b(t,x)$$

条件(1^*)和(2^*)使用了条件数学期望，这在证明 Markov 过程是否是扩散过程时较条件(1)和(2)要容易验证，尤其是条件(2^*)在具体求偏移系数和扩散系数时使用起来更方便。

下面给出扩散过程的转移概率密度和转移概率分布函数所满足的偏微分方程，证明从略。

定理 6.2.4　设$\{X(t),t\in T\}$是扩散过程，并假定它的转移概率密度 $p(s,x;t,y)$存在，且偏导数$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x;t,y)$，$\frac{\partial}{\partial y}(a(t,y)p(s,x;t,y))$和$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(t,y)p(s,x;t,y))$都存在并连续，则转移概率密度 $p(s,x;t,y)$满足方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x;t,y)=-\frac{\partial}{\partial y}(a(t,y)p(s,x;t,y))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(b(t,y)p(s,x;t,y)) \quad (6.2.10)$$

抛物型偏微分方程(6.2.10)称为**向前方程**,因为其中转移概率密度 $p(s,x;t,y)$看作从 s 向前运动的向前变量 y 和 t 的函数。这个方程通常也称为 Fokker - Planck 方程。

定理 6.2.5 设$\{X(t),t\in T\}$是扩散过程,且偏导数$\frac{\partial}{\partial x}F(s,x;t,y)$和$\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(s,x;t,y)$存在并连续,则转移概率分布函数 $F(s,x;t,y)$满足方程

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s,x;t,y)=-a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}F(s,x;t,y)-\frac{1}{2}b(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(s,x;t,y) \quad (6.2.11)$$

偏微分方程(6.2.11)称为**向后方程**,是把转移概率分别函数 $F(s,x;t,y)$看作从 t 向后运动的向后变量 x 和 s 的函数。这个方程也称为 Kolmogorov 方程。

对 n 维 Markov 过程,容易定义 n 维扩散过程及建立相应的方程(6.2.10)和(6.2.11)的向量形式。设$\{\boldsymbol{X}(t),t\in T\}$是 n 维扩散过程,相应的 Fokker - Planck 方程为

$$\frac{\partial p(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y})}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}(a_i(t,\boldsymbol{y})p(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y}))+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}(b_{ij}(t,\boldsymbol{y})p(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y}))$$

其中 $a_i(t,\boldsymbol{y})=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}E((X_i(t+h)-X_i(t))\mid\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{y}),i=1,2,\cdots,n,b_{ij}(t,\boldsymbol{y})=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}E((X_i(t+h)-X_i(t))(X_j(t+h)-X_j(t))\mid\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{y}),i,j=1,2,\cdots,n$。类似地,Kolmogorov 方程为

$$\frac{\partial F(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y})}{\partial s}=-\sum_{i=1}^{n}a_i(s,\boldsymbol{x})\frac{\partial F(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y})}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(s,\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 F(s,\boldsymbol{x};t,\boldsymbol{y})}{\partial x_i\partial x_j}$$

6.2.5 Brown 运动

在例 6.2.4 中,作为 Markov 过程的例子,简单地介绍了 Brown 运动。在这一节中,将给出 Brown 运动严格的数学定义,以及它的一些基本性质。有关 Brown 运动的详细讨论参见参考文献[6]。Brown 运动是具有独立增量的随机过程的一类典型代表,它的样本轨道是连续的,但几乎必然不可微。

定义 6.2.10 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$T=[0,b)\subset\mathbf{R}$,b 为正实数或$+\infty$,对每个 $t\in T$,有 $\boldsymbol{B}(t):\Omega\mapsto\mathbf{R}^n,\boldsymbol{B}(t)\in\mathscr{F}/\mathscr{F}^n$,满足

(1) $\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{0}$;

(2) 对任意 $\omega\in\Omega$,$\boldsymbol{B}(t)$是$[0,b)$上的连续函数;

(3) 对任意 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<b$,

$$\boldsymbol{B}(t_1)-\boldsymbol{B}(t_0),\boldsymbol{B}(t_2)-\boldsymbol{B}(t_1),\cdots,\boldsymbol{B}(t_n)-\boldsymbol{B}(t_{n-1}) \quad (6.2.12)$$

相互独立,即$\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$具有独立增量;

(4) 对任意 $0\leqslant s<t<b$,$\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)$服从正态分布,且 $E(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))=\boldsymbol{0}$,$E(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))^{\mathrm{T}}=(t-s)\boldsymbol{I}$,则称$\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$是标准的始于零的 **$n$ 维 Brown 运动**。

有关满足定义中条件的 Brown 运动的存在性,有下面的定理,其详细的证明可参见参考文献[3]。

定理 6.2.6 标准的始于零的 n 维 Brown 运动$\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$是存在的。

需要说明的是,定义 6.2.10 中条件(4)可以换成:对任意 $0\leqslant s<t<b$,$\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)$服从正态分布,且 $E(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))=(t-s)\boldsymbol{\mu}$,$E(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))(\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s))^{\mathrm{T}}=\sigma^2(t-s)\boldsymbol{I}$,其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为实

向量，σ 为实数，$\sigma>0$。此时称 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 为始于零的 n 维 Brown 运动。参数 $\boldsymbol{\mu}$ 和 σ^2 分别称为 Brown 运动的漂移和方差。当 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{0},\sigma^2=1$ 时，$\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 就变为标准的始于零的 n 维 Brown 运动。而对于具有漂移 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差 σ^2 的任何始于零的 n 维 Brown 运动 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$，都可通过变换 $(\boldsymbol{B}(t)-t\boldsymbol{\mu})/\sigma$ 将其化为标准的始于零的 n 维 Brown 运动。因此，为了今后讨论方便，将标准的始于零的 n 维 Brown 运动简称为 n 维 Brown 运动。

从 Brown 运动的定义可知，$\boldsymbol{B}(t)$ 服从 n 维正态分布，即 $\boldsymbol{B}(t)\sim N(\boldsymbol{0},t\boldsymbol{I})$。众所周知如果 n 维正态随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充分必要条件是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是对角矩阵。n 维 Brown 运动具有如下性质。

性质 6.2.1 设 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动，则对任意 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{B}^n,t\in(0,b)$，有

$$P(\boldsymbol{B}(t)\in \boldsymbol{A})=\int_{\boldsymbol{A}}(2\pi t)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2t}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$。

性质 6.2.2 设 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动，则对每个 $k(k=1,\cdots,n)$，$\{B_k(t),t\in[0,b)\}$ 是一维 Brown 运动，服从正态分布 $N(0,t)$，且对每个 $t\in[0,b)$，$B_1(t),B_2(t),\cdots,B_n(t)$ 相互独立。

性质 6.2.3 若 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动，则对任意 h，$\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h)$ $(0\leqslant s\leqslant t<t+h<b)$ 与 $\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)$ 有相同的概率分布，即 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 具有平稳增量，且 $\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h)\sim N(\boldsymbol{0},(t-s)\boldsymbol{I})$。

证 任取 $0\leqslant s\leqslant t<b$，由于 $\boldsymbol{B}(t+h)=(\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h))+(\boldsymbol{B}(s+h)-\boldsymbol{B}(0))$，而 $\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h)$ 与 $\boldsymbol{B}(s+h)-\boldsymbol{B}(0)$ 相互独立，所以根据独立随机变量之和的特征函数等于它们的特征函数之积有

$$\mathrm{E}(\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{B}(t+h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})=$$
$$E(\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})\cdot E(\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{B}(s+h)-\boldsymbol{B}(0))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})$$

由性质 6.2.1 知 $\boldsymbol{B}(t)\sim N(\boldsymbol{0},t\boldsymbol{I})$，因此 $\boldsymbol{B}(t)$ 的特征函数为 $E(\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{B}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})=\exp\left\{-\frac{1}{2}t\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right\}$。从而 $E(\exp\{\mathrm{i}(\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})=E(\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{B}(t+h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})/\mathrm{E}(\exp\{\mathrm{i}\boldsymbol{B}(s+h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\})=\exp\left\{-\frac{1}{2}(t-s)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right\}$。这正是 n 维正态分布 $N(\boldsymbol{0},(t-s)\boldsymbol{I})$ 的特征函数，故 $\boldsymbol{B}(t+h)-\boldsymbol{B}(s+h)\sim N(\boldsymbol{0},(t-s)\boldsymbol{I})$。证毕。

性质 6.2.4 设 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动，则对任何 $0<t_1<t_2<,\cdots,<t_k<b$，$(\boldsymbol{B}(t_1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}(t_2)^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{B}(t_k)^{\mathrm{T}})$ 服从 nk 维正态分布，即 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是正态过程。

证明留作习题。

性质 6.2.5 若 $\{B(t),t\in[0,b)\}$ 是一维 Brown 运动，则对任意 $s,t\in[0,b)$ 有

$$R_B(s,t)=\mathrm{Cov}(B(s),B(t))=s\wedge t \tag{6.2.13}$$

其中 $s\wedge t=\min\{s,t\},s\vee t=\max\{s,t\}$。

证 由 $\{B(t),t\in[0,b)\}$ 具有独立增量和 $B(t)\sim N(0,t)$ 可知

$$R_B(s,t)=\mathrm{Cov}(B(t),B(s))=$$
$$\mathrm{Cov}(B(s\wedge t),B(s\vee t)-B(s\wedge t))+\mathrm{Cov}(B(s\wedge t),B(s\wedge t))=$$
$$\mathrm{Cov}(B(s\wedge t)-B(0),B(s\vee t)-B(s\wedge t))+\mathrm{Cov}(B(s\wedge t),B(s\wedge t))=$$

$$\mathrm{Cov}(B(s \wedge t), B(s \wedge t)) = \mathrm{Var}(B(s \wedge t)) = s \wedge t$$

证毕。

停时和鞅是随机过程中两个非常重要的概念，通过它们可以更细致地刻划 Brown 运动的特性。

定义 6.2.11 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，参数集 $T=[0,+\infty)$，$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$是$\mathscr{F}$的一族上升的子σ代数。取值于 T 的随机变量τ，如果对每个$t\in T$，有$\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$，则称$\tau$为$\{\mathscr{F}_t,t\in T\}$停时，简称**停时**。

在定义中，也可取 $T=\{1,2,\cdots\}$，这时只要$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n$成立即可。

特别地，对随机过程$\{X(t),t\geqslant0\}$而言，若取$\mathscr{F}_t=\sigma(X(s),s\leqslant t)$，则称$\tau$为关于过程$\{X(t),t\geqslant0\}$的停时。例如，令$\mathscr{F}_t=\sigma(B(s),s\leqslant t)$，$\tau_x=\min\{t\mid B(t)=x\}$，即$\tau_x$表示首次到达状态$x$的时间，它是关于 Brown 运动$\{B(t),t\geqslant0\}$的停时。事实上，对任意的$t\geqslant0$，有$\{\tau_x\leqslant t\}$ $=\bigcap\limits_{n\geqslant1}\bigcup\limits_{0\leqslant r\leqslant t}\left\{B(r)>x-\dfrac{1}{n}\right\}\in\mathscr{F}_t$，其中 r 是有理数。

设τ是任一关于 Brown 运动的停时，τ前σ代数定义为

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\mid A\in\mathscr{F}_\infty,A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t,t\geqslant0\}$$

其中$\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t=\sigma(\bigcup\limits_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t)$。令$\widetilde{B}(t)=B(t+\tau)-B(\tau),t\geqslant0,\widetilde{\mathscr{F}}_t=\sigma(\widetilde{B}(s),s\leqslant t),\widetilde{\mathscr{F}}_\infty=\bigvee\limits_{t\geqslant0}\widetilde{\mathscr{F}}_t$。可以证明随机过程$\{\widetilde{B}(t),t\geqslant0\}$是 Brown 运动，且$\widetilde{\mathscr{F}}_\infty$与$\mathscr{F}_\tau$独立。由此可知，Brown 运动在任意停时重新开始。

定义 6.2.12 设$\{X(t),t\in T\}$是随机过程，如果对任意固定 $n\geqslant1$，所有 $t_1<t_2<\cdots<t_n<t(t_i,t\in T)$和 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i\in\mathbf{R})$，有 $E|X(t)|<\infty$和 $E(X(t)\mid X(t_1)=x_1,X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_n)=x_n)=x_n$，则称$\{X(t),t\in T\}$是**鞅**。

Brown 运动是鞅。首先，$E|B(t)|<\infty$显然成立。其次，由 Brown 运动的 Markov 性(习题 3)知，只要证明对任意的$s<t$，有 $E(B(t)\mid B(s)=x)=x$。事实上，由性质 6.2.4，有

$$\begin{aligned}
&E(B(t)\mid B(s)=x)=\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right\}\mathrm{d}y=\\
&-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-y}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right\}\mathrm{d}y+x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right\}\mathrm{d}y=x
\end{aligned}$$

因为第一个积分中的被积函数是$x-y$的奇函数，其积分值等于 0；第二个积分中的被积函数是概率密度函数，其积分值等于 1。

有关停时和鞅的详细讨论可参见参考文献[3,6,7]。最后，给出 Brown 运动的样本轨道的不可微性，其证明可参见参考文献[8]。

定理 6.2.7 一维 Brown 运动的样本轨道 $B(t)$在 $t\in[0,b)$上是几乎必然不可微的。

6.3 随机微积分

在确定性的情形下，微分方程的理论是建立在普通函数微积分的基础之上的，而极限(或收敛)又是普通函数微积分的基础。类似地，对于随机微分方程的研究，也需要建立随机过程的收敛、连续、微分和积分等概念。

6.3.1 L_2 空间

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,如果存在一个可测集 $N\in\mathscr{F}$且 $P\{N\}=0$,当 $\omega\in N^c$ 时有某种性质成立,就称此性质几乎必然(almost surely)成立,简记为 a. s. 成立,其中可测集 N 称为**零概集**。

设 $X(\omega)$和 $Y(\omega)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的两个随机变量,如果 $P\{X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$,则称随机变量 $X(\omega)$和 $Y(\omega)$等价。因为等价的随机变量有相同的统计特性,所以可以将等价的随机变量看成是相同的。

令概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上二阶矩有限的所有随机变量的集合为 $L_2=\{X:EX^2<+\infty\}$,在等价的意义下,L_2 是一个线性空间。事实上,对任意两个随机变量 $X,Y\in L_2$,有 $E(X+Y)^2\leqslant EX^2+EY^2+2E|XY|$,由 Schwarz 不等式 $E|XY|\leqslant\sqrt{EX^2}\sqrt{EY^2}$,有 $E(X+Y)^2<+\infty$。所以 $X+Y\in L_2$。又对任意给定的常数 $c\in\mathbf{R}$,有 $E(cX)^2=c^2EX^2<+\infty$。因此 $cX\in L_2$。

在 L_2 空间中定义

$$\|X\|=\sqrt{E(X^2)}\tag{6.3.1}$$

于是 $\|X\|$ 是 L_2 上的范数,因为它满足范数的三个条件:

(1) $\|X\|\geqslant 0$,且 $\|X\|=0$,当且仅当 $X=0$(a. s.);

(2) $\|cX\|=|c|\,\|X\|$,其中 c 是有限实数;

(3) $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$,对任意的 $X,Y\in L_2$ 成立。

显然(1)和(2)成立。至于(3),对任意的 $X,Y\in L_2$,由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}\|X+Y\| &=\sqrt{E(X+Y)^2}\leqslant\sqrt{EX^2+2E\,|\,XY\,|+EY^2}\leqslant\\ &\sqrt{\|X\|^2+2\|X\|\cdot\|Y\|+\|Y\|^2}=\\ &\|X\|+\|Y\|\end{aligned}$$

定理 6.3.1 L_2 空间对如下定义的距离

$$d(X,Y)=\|X-Y\|,\qquad X,Y\in L_2$$

是一个完备的赋范线性空间,即 Banach 空间。

本定理的证明可参见参考文献[9]。

在以后的讨论中若无特别说明,均假定所考虑的随机变量都属于 L_2 空间且是实随机变量。

6.3.2 随机变量序列的收敛

随机变量序列收敛的定义有许多种,下面仅介绍几乎必然收敛、依概率收敛、均方收敛和依分布收敛四种常用的收敛,以及它们之间的相互关系。由于均方微积分是建立在均方收敛概念的基础上,所以重点讨论均方收敛及其收敛性质。

定义 6.3.1 设$\{X_n\}$为随机变量序列,称 X_n **几乎必然收敛**于随机变量 X(或称 X_n **概率为 1 地收敛**于随机变量 X),若

$$P\{\omega:\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)\}=1$$

常记作$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$(a. s.)或 $X_n\xrightarrow{\text{a. s.}}X$。

定理 6.3.2　如果 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 且 $X_n \xrightarrow{a.s.} Y$，则 $X=Y$(a.s.)。即在等价的意义下，几乎必然收敛的极限是惟一的。

证　因为 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$，则 $\exists N_1 \in \mathscr{F}$，当 $\omega \in N_1^c$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$。又因为 $X_n \xrightarrow{a.s.} Y$，所以 $\exists N_2 \in \mathscr{F}$，当 $\omega \in N_2^c$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=Y(\omega)$。令 $N=N_1\cup N_2$，则当 $\omega\in N^c$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)=Y(\omega)$。但 $N\in\mathscr{F}$，且 $P\{N\}\leqslant P\{N_1\}+P\{N_2\}=0$。故 $X(\omega)=Y(\omega)$(a.s.)。证毕。

称随机变量序列 X_n 几乎必然是 Cauchy 序列，如果当 $m,n\to\infty$ 时，$X_m-X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ 或当 $n\to\infty$ 时，$X_{n+k}-X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ 对所有的 $k\geqslant 1$ 成立。

由 Cauchy 准则知，$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 的充要条件是 $\{X_n\}$ 几乎必然是 Cauchy 序列。由几乎必然收敛的定义和上面的讨论易知，随机变量序列几乎必然收敛于随机变量，其实质是随机变量等价类序列几乎必然收敛于随机变量等价类。

定义 6.3.2　随机变量序列 $\{X_n\}$ 称为**依概率收敛于随机变量** X，若对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0$。依概率收敛简记为 $X_n \xrightarrow{P} X$。

定理 6.3.3　随机变量序列 $\{X_n\}$ 几乎必然收敛于随机变量 X，当且仅当下列两个条件之一成立：

(1) 对任意 $\varepsilon>0$，有 $P\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}=0$；

(2) 当 $n\to\infty$ 时，有 $\sup\limits_{j\geqslant n}|X_j-X| \xrightarrow{P} 0$。

证　(1) 必要性。由于 $\{X_n-X\not\to 0\}=\bigcup\limits_{\varepsilon>0}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}$，所以当 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$，即 $P\{X_n-X\not\to 0\}=0$ 时，有

$$P\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}\leqslant P\{\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}=$$
$$P\{X_n-X\not\to 0\}=0$$

充分性。若对任意的 $\varepsilon>0$，有 $P\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}=0$，那么对任取一收敛于零的正数序列 $\{\varepsilon_k\}$，可得

$$P\{X_n-X\not\to 0\}=P\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon_k\}\}\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon_k\}\}=0$$

于是 $P\{X_n-X\to 0\}=1$，即 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$。

(2) 对任意的 $\varepsilon>0$，根据概率的上连续性有

$$\lim_{n\to\infty}P\{\sup_{j\geqslant n}|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty}P\{\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}=$$
$$P\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=n}^{\infty}\{|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}\}$$

所以(1)成立当且仅当 $\sup\limits_{j\geqslant n}|X_j-X| \xrightarrow{P} 0$。证毕。

同样地，称 X_n 依概率是 Cauchy 序列，若 $X_m - X_n \xrightarrow{P} 0\,(n,m\to\infty)$。这时 Cauchy 准则仍成立，即随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于某个随机变量 X 的充要条件是该序列依概率是 Cauchy 序列。

定理 6.3.4 设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，若 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$，则 $X_n \xrightarrow{P} X$。

证 对任意的 $\varepsilon>0$，有 $P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant P\{\sup\limits_{j\geqslant n}|X_j-X|\geqslant\varepsilon\}$。当 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 时，根据定理 6.3.3 的(2)可得 $\lim\limits_{n\to 0} P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0$，从而 $X_n \xrightarrow{P} X$。证毕。

一般情况下，定理 6.3.4 的逆不一定成立。但是当样本空间 Ω 可数时，几乎必然收敛和依概率收敛等价，此时也称概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是可数的。

推论 6.3.1 设 $\{X_n\}$ 和 X 分别是可数概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量序列和随机变量，则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ 充分必要条件是 $X_n \xrightarrow{P} X$。

证 必要性由定理 6.3.4 可得，下面用反证法证明充分性。

令 $A=\{\omega: \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\}$，并假设 $P\{A\}<1$ 或等价 $P\{A^c\}>0$，即 $X_n \overset{a.s.}{\not\longrightarrow} X$。因为 A^c 是可数的，而零概集的可数并仍是零概集，所以存在 $\omega_0\in A^c$，使得 $P\{\omega_0\}=\delta>0$。由 $\omega_0\in A^c$ 可知，对某一 $\varepsilon>0$，存在正整数的子序列 $\{n_j\}$ 使得 $|X_{n_j}(\omega_0)-X(\omega_0)|\geqslant\varepsilon, j\geqslant 1$。从而 $P\{|X_{n_j}-X|\geqslant\varepsilon\}\geqslant P\{\omega_0\}=\delta$，即当 $j\to\infty$ 时，$P\{|X_{n_j}-X|\geqslant\varepsilon\}\not\to 0$，这与 $X_n \xrightarrow{P} X$ 矛盾。证毕。

定义 6.3.3 设随机变量序列 $\{X_n\}$ 的分布函数序列为 $F_n(x)$，随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$。若在 $F(x)$ 的每一个连续点 x 处，有 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ 成立，则称随机变量序列 $\{X_n\}$ **依分布收敛**于随机变量 X，简记为 $X_n \xrightarrow{d} X$，或 $F_n(x) \xrightarrow{C} F(x)$。

定理 6.3.5 设 $\{X_n\}$ 和 X 分别是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量序列和随机变量，如果 $X_n \xrightarrow{P} X$，则 $X_n \xrightarrow{d} X$。

证 对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\{X_n\leqslant x\}=\{X_n\leqslant x, X\leqslant x+\varepsilon\}\cup\{X_n\leqslant x, X>x+\varepsilon\}\subset\{X\leqslant x+\varepsilon\}\cup\{|X_n-X|>\varepsilon\}$，从而有 $F_n(x)\leqslant F(x+\varepsilon)+P\{|X_n-X|>\varepsilon\}$。当 $n\to\infty$ 时，由假设 $P\{|X_n-X|>\varepsilon\}\to 0$ 知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \leqslant F(x+\varepsilon) \tag{6.3.2}$$

类似地

$$\begin{cases} \{X\leqslant x-\varepsilon\}\subset\{X_n\leqslant x\}\cup\{|X_n-X|>\varepsilon\} \\ F(x-\varepsilon)\leqslant F_n(x)+P\{|X_n-X|>\varepsilon\} \\ F(x-\varepsilon)\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) \end{cases} \tag{6.3.3}$$

由式(6.3.2)和(6.3.3)可得 $F(x-\varepsilon)\leqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} F_n(x)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} F_n(x)\leqslant F(x+\varepsilon)$，这样对于 F 的每一个连续点 x，令 $\varepsilon\to 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$。证毕。

推论 6.3.2 若 $X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0$，且 $Y_n \xrightarrow{d} Y$，则 $X_n \xrightarrow{d} Y$。

推论 6.3.3 设 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，则 $X_n \xrightarrow{P} a$（常数）的充分必要条件是 $X_n \xrightarrow{d} a$，即

$F_n(x) \xrightarrow{C} F(x)$，其中 $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1, & x\geqslant a\end{cases}$。

证　必要性。根据定理 6.3.5，当 $X_n \xrightarrow{P} a$ 时，有 $X_n \xrightarrow{d} a$，显然常数 a 的分布函数为 $F(x)$。

充分性。对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}P\{|X_n-a|\geqslant\varepsilon\} &= P\{X_n\leqslant a-\varepsilon\}+P\{X_n\geqslant a+\varepsilon\}=\\ &P\{X_n\leqslant a-\varepsilon\}+1-P\{X_n<a+\varepsilon\}\leqslant\\ &P\{X_n\leqslant a-\varepsilon\}+1-P\left\{X_n\leqslant a+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\\ &F_n(a-\varepsilon)+1-F_n\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)\end{aligned}$$

由假设 $F_n(x)\xrightarrow{C}F(x)$ 及 $a-\varepsilon$ 和 $a+\varepsilon/2$ 都是 $F(x)$ 的连续点，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-a|\geqslant\varepsilon\}=0$，于是 $X_n\xrightarrow{P}a$。证毕。

定义 6.3.4　随机变量序列 $\{X_n\}$ 称为**均方收敛**于 X，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-X\|=0$。均方收敛简记为 $X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X$，或 $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n=X$ 或 $\text{l.i.m}X_n=X$。记号 l.i.m 是 limit in mean square 的缩写。

下面先来看一个简单的均方收敛例子。

例 6.3.1　设 $\{Y_n,n\geqslant1\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(Y_n)=\mu$，$\text{Var}(Y_n)=\sigma^2$。若令 $X_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，试证明 $X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}\mu$。

证　首先，由 $Y_n\in L_2$ 知，$X_n\in L_2$。其次，

$$\begin{aligned}\|X_n-\mu\|^2 &= \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_n-\mu)\right\|^2=\\ &\frac{1}{n^2}E\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_i-\mu)(Y_j-\mu)\Big)=\\ &\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E(Y_i-\mu)(Y_j-\mu)\end{aligned}$$

由于 Y_n 是相互独立的，所以当 $i\neq j$ 时，有 $E(Y_i-\mu)(Y_j-\mu)=E(Y_i-\mu)E(Y_j-\mu)=0$，因而 $\|X_n-\mu\|^2=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}E(Y_i-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{n}$。从而可知，当 $n\to\infty$ 时，$\|X_n-\mu\|\to0$，故结论成立。证毕。

在概率论中，大数定律是在依概率收敛的意义下成立的。例 6.3.1 表明，在均方收敛的意义下，大数定律也成立。

定理 6.3.6　随机变量序列 $\{X_n\}$ 均方收敛于某一随机变量 X 的充分必要条件是 $E|X_m-X_n|^2\to0(m,n\to\infty)$。

这个定理称为均方极限的 Cauchy 收敛准则，其证明参见参考文献[7]。

定理 6.3.7　若 $X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X$，$Y_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X$，则 $P\{X=Y\}=1$。即均方极限在等价的意义下是惟一的。

证 因为$E|X-Y|^2=\|(X_n-X)-(X_n-Y)\|^2\leqslant(\|X_n-X\|+\|X_n-Y\|)^2$，当$n\to\infty$时，由假设$\|X_n-X\|\to 0$及$\|X_n-Y\|\to 0$知，$E|X-Y|^2=0$，即$\|X-Y\|=0$。由范数定义的条件(1)知，$X-Y=0(\text{a.s.})$，从而$P\{X=Y\}=1$。证毕。

定理 6.3.8 若$X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X$，则$X_n\xrightarrow{P}X$。

证 对任意的$\varepsilon>0$，由 Markov 不等式有$P\{|X_n-X|>\varepsilon\}\leqslant\dfrac{E(X_n-X)^2}{\varepsilon^2}=\dfrac{\|X_n-X\|^2}{\varepsilon^2}$。因为当$n\to\infty$时，$\|X_n-X\|\to 0$，从而有$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|>\varepsilon\}=0$。故结论成立。证毕。

由定理 6.3.8 和定理 6.3.5 可得如下推论。

推论 6.3.4 若$X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X$，则$X_n\xrightarrow{d}X$。

定理 6.3.9 设$X_n\xrightarrow{\text{m.s.}}X,Y_n\xrightarrow{\text{m.s.}}Y$，则

(1) $a_nZ\xrightarrow{\text{m.s.}}aZ$，其中$Z$是随机变量，$\{a_n\}$是数列且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$；

(2) $aX_n+bY_n\xrightarrow{\text{m.s.}}aX+bY$，其中$a$和$b$是任意常数；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=E(X)=E(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n)$；

(4) $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}E(X_mY_n)=E(XY)$。特别地，$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}E(X_mX_n)=E(X^2)$。

证 (1) 因为$\|a_nZ-aZ\|=\|Z\|\cdot|a_n-a|$，所以当$n\to\infty$时，由假设$|a_n-a|\to 0$及$\|Z\|<\infty$可知$\|a_nZ-aZ\|\to 0$。故结论成立。

(2) 因为$\|(aX_n+bY_n)-(aX+bY)\|=\|a(X_n-X)+b(Y_n-Y)\|\leqslant|a|\,\|X_n-X\|+|b|\,\|Y_n-Y\|$，所以由假设$\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n-X\|=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}\|Y_n-Y\|=0$知，$\lim\limits_{n\to\infty}\|(aX_n+bY_n)-(aX+bY)\|=0$。

(3) 由 Schwarz 不等式有$|E(X_n)-E(X)|=|E(X_n-X)|\leqslant\sqrt{E|X_n-X|^2}=\|X_n-X\|$。当$n\to\infty$时，由假设$\|X_n-X\|\to 0$得$|E(X_n)-E(X)|\to 0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}E(X_n)=E(X)=E(\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m}}X_n)$。

(4) 由 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}|E(X_mY_n)-E(XY)|&=|E(X_mY_n-XY)|=\\&|E((X_m-X)(Y_n-Y)+Y(X_m-X)+X(Y_n-Y))|\leqslant\\&E|(X_m-X)(Y_n-Y)|+E|Y(X_m-X)|+E|X(Y_n-Y)|\leqslant\\&\|X_m-X\|\cdot\|Y_n-Y\|+\|Y\|\cdot\|X_m-X\|+\\&\|X\|\cdot\|Y_n-Y\|\end{aligned}$$

当$m\to\infty,n\to\infty$时，由假设$\|X_m-X\|\to 0$，$\|Y_n-Y\|\to 0$以及$\|X\|<\infty$，$\|Y\|<\infty$可知$|E(X_mY_n)-E(XY)|\to 0$，即$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}E(X_mY_n)=E(XY)$。证毕。

在定理 6.3.9 中，(1)和(2)说明均方极限的线性运算性质与普通极限相似，而(3)和(4)说明极限运算与求数学期望运算可以交换顺序，但要注意极限意义的不同。另外，在定理 6.3.9 的条件(4)下，当$n\to\infty$时，不能得到$X_n^2\xrightarrow{\text{m.s.}}X^2$及$X_nY_n\xrightarrow{\text{m.s.}}XY$，因为$\|X_n^2-X^2\|$和$\|X_nY_n-XY\|$与随机变量的四阶矩有关。

定理 6.3.10　随机变量序列$\{X_n\}$均方收敛的充分必要条件是限极$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}E(X_nX_m)$存在。

证　必要性。由定理 6.3.9 的(4)易知成立。

充分性。设$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}E(X_nX_m)=c$，因为$\|X_n-X_m\|^2=E|X_n-X_m|^2=E|X_n|^2-2E(X_nX_m)+E|X_m|^2$，所以，有$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\|X_n-X_m\|^2=c-2c+c=0$。根据定理 6.3.6 知，当$n\to\infty$时，$X_n$均方收敛。证毕。

以上仅讨论L_2空间上随机序列均方极限的性质。对于二阶矩过程$\{X(t),t\in T\}$，可以类似地定义其均方极限，且有类似于定理 6.3.9 的均方极限性质。

有关随机变量序列四种收敛形式的关系如图 6.3 所示。

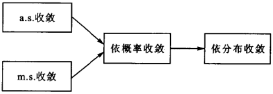


图 6.3　四种收敛形式的关系

从图 6.3 可以看出，几乎必然收敛与均方收敛之间毫无关系，由其中任意一种收敛都不能确定另一种收敛是否成立。通过下面的例 6.3.2 来说明几乎必然收敛不包含均方收敛，至于相反的情形参见习题 6。

例 6.3.2　设$\{X_n,n\geqslant1\}$是相互独立的离散随机变量序列，且$P\{X_n=n\}=\dfrac{1}{n^2}$，$P\{X_n=0\}=1-\dfrac{1}{n^2}$。证明$\{X_n\}$几乎必然收敛于零，但不均方收敛。

证　对$\forall\varepsilon>0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}P\{\bigcup\limits_{k\geqslant n}\{|X_k|>\varepsilon\}\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\{\bigcup\limits_{k\geqslant n}\{X_k=k\}\}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k\geqslant n}\dfrac{1}{k^2}=0$，所以，由定理 6.3.3 之(2)知，$\{X_n\}$几乎必然收敛零。又由于当$m\neq n$时，$\|X_n-X_m\|^2=E(X_n^2-2X_nX_m+X_m^2)=2\left(1-\dfrac{1}{nm}\right)$，所以，当$n,m\to\infty$时，$\|X_n-X_m\|^2\to2$。由定理 6.3.6 知，$\{X_n\}$不均方收敛。证毕。

6.3.3　均方连续

从本节开始讨论随机过程$\{X(t),t\in T\}$的均方连续、均方导数和均方积分，并假定参数集T是连续的，可取为有限区间$[a,b]$或无穷区间。

定义 6.3.5　若随机过程$\{X(t),t\in T\}$，对固定的$t_0\in T$，有$\lim\limits_{t\to t_0}\|X(t)-X(t_0)\|=0$，则称$X(t)$在$t_0$处**均方连续**。若$X(t)$在$T$中每一点处都均方连续，则称$X(t)$在$T$上均方连续。

定理 6.3.11(均方连续准则)　随机过程$\{X(t),t\in T\}$在T上均方连续的充分必要条件为其相关函数$R_X(t_1,t_2)$在$\{(t,t),t\in T\}$上连续。

证　只要证明在T中任意固定点t_0处定理成立即可。

必要性。若$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{t\to t_0} X(t)=X(t_0)$，则由定理 6.3.9 的(4)可得$\lim\limits_{\substack{t_1\to t_0\\ t_2\to t_0}} R_X(t_1,t_2)=\lim\limits_{\substack{t_1\to t_0\\ t_2\to t_0}} E(X(t_1)X(t_2))=E(X(t_0)X(t_0))=R_X(t_0,t_0)$。

充分性。若 $R_X(t_1,t_2)$在(t_0,t_0)处连续，则当 $t\to t_0$ 时 $E|X(t)-X(t_0)|^2=E(X^2(t))-2E(X(t)X(t_0))+E(X^2(t_0))=R_X(t,t)-2R_X(t,t_0)+R_X(t_0,t_0)\to 0$，故 $X(t)$在 t_0 点均方连续。证毕。

均方连续准则说明要判断随机过程$\{X(t),t\in T\}$在 T 上的均方连续性，只要判断其相关函数$R_X(t_1,t_2)$在正方形区域 $T\times T$ 的对角线$\{(t,t),t\in T\}$上所有点处连续即可(如图 6.4 所示，$T=[0,b]$)，而不需要判断相关函数在整个正方形区域 $T\times T$ 中每个点处连续。更有趣的是由相关函数在对角线上连续性可得其在正方形区域上的连续性，这就是下面的推论。

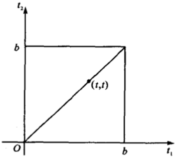


图 6.4 区域$[0,b]\times[0,b]$

推论 6.3.5 若随机过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数 $R_X(t_1,t_2)$在$\{(t,t),t\in T\}$上连续，则 $R_X(t_1,t_2)$在 $T\times T$ 上连续。

证 若随机过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数 $R_X(t_1,t_2)$在$\{(t,t),t\in T\}$上连续，则根据定理 6.3.11 可得 $X(t)$在 T 上均方连续，因而对任意$(t_1,t_2)\in T\times T$，有$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{s\to t_1} X(s)=X(t_1)$，$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{t\to t_2} X(t)=X(t_2)$。再根据定理 6.3.9 的(4)可得$\lim\limits_{\substack{s\to t_1\\ t\to t_2}} E(X(s)X(t))=E(X(t_1)X(t_2))$，即$\lim\limits_{\substack{s\to t_1\\ t\to t_2}} R_X(s,t)=R_X(t_1,t_2)$，故 $R_X(t_1,t_2)$在 $T\times T$ 上连续。证毕。

6.3.4 均方导数

定义 6.3.6 若随机过程$\{X(t),t\in T\}$在点 t 的均方极限$\mathop{\mathrm{l.i.m}}\limits_{h\to 0}\dfrac{X(t+h)-X(t)}{h}$存在，则称此极限值为 $X(t)$在点 t 的均方导数，记为 $X'(t)$或$\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$，并称 $X(t)$在点 t **均方可微或均方可导**。若 $X(t)$在 T 上每一点都均方可微，则称 $X(t)$在 T 上均方可微，且其均方导数$\{X'(t),t\in T\}$是一个新的随机过程。

从定义 6.3.6 可知，均方导数与普通函数导数的定义相似，只不过这里的极限是在均方极限意义下而已。类似地，可以定义高阶均方导数。

例 6.3.3 设随机过程 $X(t)=Yf(t),t\in\mathbf{R}$，其中 $Y\in L_2$，$f(t)$是可微函数。求 $X(t)$的均方导数 $X'(t)$。

解 由于$\lim\limits_{h\to 0}E\left|\dfrac{Yf(t+h)-Yf(t)}{h}-Yf'(t)\right|^2=E(Y^2)\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)\right)^2=0$，所以，由均方导数的定义知 $X'(t)=Yf'(t)$。

与普通函数的求导相比，一般要求出一个具体随机过程的均方导数是比较困难的，但往往需要知道随机过程的均方可微性，关于这一点的判断，有如下的均方可微准则。

定理 6.3.12(均方可微性准则) 随机过程$\{X(t),t\in T\}$在 t 处均方可微的充分必要条件

是相关函数 $R_X(t,s)$ 的广义二阶导数

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\h_2\to 0}}\frac{R_X(s+h_1,t+h_2)-R_X(s+h_1,t)-R_X(s,t+h_2)+R_X(s,t)}{h_1h_2}$$

在点 (t,t) 存在。进一步，$X(t)$ 在 T 上均方可微的充分必要条件是相关函数 $R_X(t,s)$ 的广义二阶导数在 $T\times T$ 中的任一点 (t,t) 都存在。

证　必要性。设 $X(t)$ 在点 t 可微。由于

$$E\left(\frac{X(t+h_1)-X(t)}{h_1}\cdot\frac{X(t+h_2)-X(t)}{h_2}\right)=\frac{R_X(t+h_1,t+h_2)-R_X(t+h_1,t)-R_X(t,t+h_2)+R_X(t,t)}{h_1h_2}$$

根据定理 6.3.9 的(4)知，当 $h_1,h_2\to 0$ 时，上式的左端的极限存在，即就是右端的极限存在。

充分性。设广义二阶导数在点 (t,t) 存在。由于

$$E\left|\frac{X(t+h_1)-X(t)}{h_1}-\frac{X(t+h_2)-X(t)}{h_2}\right|^2=$$

$$\frac{R_X(t+h_1,t+h_1)-R_X(t+h_1,t)-R_X(t,t+h_1)+R_X(t,t)}{h_1h_1}+$$

$$\frac{R_X(t+h_2,t+h_2)-R_X(t+h_2,t)-R_X(t,t+h_2)+R_X(t,t)}{h_2h_2}-$$

$$2\frac{R_X(t+h_1,t+h_2)-R_X(t+h_1,t)-R_X(t,t+h_2)+R_X(t,t)}{h_1h_2}$$

所以根据定理 6.3.6，要证明 X_t 在 t 点可微，只要证明当 $h_1,h_2\to 0$ 时，上式左端的极限为零，也即只要证明上式右端的极限为零。因为广义二阶导数在点 (t,t) 存在，因此在其定义中，无论取 $h_1=h_2$ 还是 $h_1\neq h_2$，广义二阶导数不变。这样当 $h_1,h_2\to 0$ 时，上式右端的极限为零。证毕。

如果用图 6.5 表示区域 $[a,b]\times[a,b]$，则定理 6.3.12 表明，要证明过程 $X(t)$ 在 $T=[a,b]$ 上的均方可微，只要证明相关函数 $R_X(t,s)$ 的广义二阶导数在正方形的对角线 AB 上存在即可。

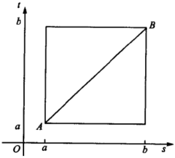


图 6.5　区域 $[a,b]\times[a,b]$

例 6.3.4　设 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 是一维 Brown 运动，证明 $B(t)$ 处处均方不可微。

证　对任意固定的 $t\geqslant 0$，为了证明相关函数 $R_B(s,t)$ 的广义二阶导数在点 (t,t) 的不存在性，不妨假设 $h_1>0,h_2=kh_1$，其中常数 $k\geqslant 1$。根据性质 6.2.5 知，$\{B(t),t\geqslant 0\}$ 的相关函数为 $R_B(s,t)=s\wedge t$。由于

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\h_2\to 0}}\frac{R_B(t+h_1,t+h_2)-R_B(t+h_1,t)-R_B(t,t+h_2)+R_B(t,t)}{h_1h_2}=$$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{R_B(t+h_1,t+kh_1)-R_B(t+h_1,t)-R_B(t,t+kh_1)+R_B(t,t)}{kh_1^2}=$$

$$\lim_{h_1\to0}\frac{(t+h_1)\wedge(t+kh_1)-(t+h_1)\wedge t-t\wedge(t+kh_1)+t\wedge t}{kh_1^2}=$$

$$\lim_{h_1\to0}\frac{1}{kh_1}=\infty$$

所以，$R_B(s,t)$广义二阶导数在点(t,t)不存在。根据定理 6.3.12 知，$B(t)$在$[0,+\infty)$上处处均方不可微。证毕。

随机过程均方导数具有与通常函数导数一样的性质，叙述如下。

性质 6.3.1 均方导数有下列性质：

(1) 若随机过程 $X(t)$在点 t 均方可微，则在等价的意义下 $X(t)$的均方导数惟一；

(2) 若随机过程 $X(t)$在点 t 均方可微，则 $X(t)$在点 t 均方连续；

(3) 设 X 是随机变量，则 $X'=0$，即随机变量的均方导数为零；

(4) 若随机过程 $X(t)$和 $Y(t)$在点 t 都均方可微，则 $aX(t)+bY(t)$在点 t 均方可微，且 $(aX(t)+bY(t))'=aX'(t)+bY'(t)$，其中 a 和 b 为常数；

(5) 若随机过程 $X(t)$在点 t 均方可微，而 $f(t)$在点 t 可微，则 $f(t)X(t)$在点 t 均方可微，且$(f(t)X(t))'=f'(t)X(t)+f(t)X'(t)$。特别地，$(Yf(t))'=Yf'(t)$，其中 $Y(Y\in L_2)$是随机变量。

利用均方导数的定义和均方极限的性质很容易证明均方导数的这些性质，具体证明留给读者自己完成。需要说明的是，由定理 6.3.7 知，在均方收敛的意义下，极限是几乎必然惟一，因此上述性质中等式都是几乎必然成立的。今后，凡涉及到随机变量或随机过程间的相等，均按几乎必然成立理解。

若随机过程 $X(t)$是均方可微的，则 $X'(t)$也是随机过程，其均值函数由 $X(t)$的均值函数来确定，而 $X(t)$和 $X'(t)$的相关函数和互相关函数可由 $X(t)$的相关函数来确定，这些可归结为如下两个定理。

定理 6.3.13 若随机过程 $X(t)$在 T 上有 n 阶均方导数，则 $X^{(n)}(t)$的均值函数存在，且 $EX^{(n)}(t)=(EX(t))^{(n)}=m_X^{(n)}(t)$。

证明留给读者自己完成。这个定理说明随机过程的 n 阶均方导数的均值函数等于其均值函数的 n 阶导数，即随机过程的均方求导与求均值函数是可以交换次序的。

定理 6.3.14 若随机过程$\{X(t),t\in T\}$的相关函数 $R_X(s,t)$在$\{(t,t)\mid t\in T\}$上所有点的二阶广义导数都存在，则相关函数 $R_X(s,t)$的偏导数$\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}$，$\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}$及$\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}$在 $T\times T$ 上都存在，且

$$E(X(s)X'(t))=\frac{\partial}{\partial t}E(X(s)X(t))=\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}$$

$$E(X'(s)X(t))=\frac{\partial}{\partial s}E(X(s)X(t))=\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial s}$$

$$E(X'(s)X'(t))=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}E(X(s)X(t))=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial t\partial s}$$

证 仅证最后一个结论。根据定理 6.3.12，$X(t)$在 T 上均方可微，即 $X'(t)$在 T 上存在。再根据定理 6.3.9 的(4)，有

$$
\begin{aligned}
R_{X'}(s,t) = & E(X'(s)X'(t)) = \\
& \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} E\left(\left(\frac{X(s+h_1)-X(s)}{h_1}\right)\left(\frac{X(t+h_2)-X(t)}{h_2}\right)\right)= \\
& \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{1}{h_1} E\left(\frac{X(s+h_1)X(t+h_2)-X(s+h_1)X(t)}{h_2} - \right. \\
& \left.\frac{X(s)X(t+h_2)-X(s)X(t)}{h_2}\right)= \\
& \lim_{h_1\to 0}\left(\frac{1}{h_1}\lim_{h_2\to 0}\left(\frac{R_X(s+h_1,t+h_2)-R_X(s+h_1,t)}{h_2} - \right.\right. \\
& \left.\left.\frac{R_X(s,t+h_2)-R_X(s,t)}{h_2}\right)\right)= \\
& \lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial R_X(s+h_1,t)}{\partial t}-\frac{\partial R_X(s,t)}{\partial t}\right)= \\
& \frac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial t\partial s}
\end{aligned}
$$

同理可证其他两个结论。证毕。

例 6.3.5　设随机过程 $X(t)$ 在 T 上均方可微，且其协方差函数为 $C_X(s,t)$。求随机过程 $\{X'(t),t\in T\}$ 的协方差函数 $C_{X'}(s,t)$。

解　根据定理 6.3.13 和定理 6.3.14，可得 $m_{X'}(t)=m'_X(t)$，$R_{X'}(s,t)=E(X'(s)X'(t))=\dfrac{\partial^2 R_X(s,t)}{\partial s\partial t}$，因此，有

$$
\begin{aligned}
C_{X'}(s,t) = & E((X'(s)-m_{X'}(s))(X'(t)-m_{X'}(t))) = \\
& R_{X'}(s,t)-m_{X'}(s)m_{X'}(t) = \\
& \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)) = \\
& \frac{\partial^2 C_X(s,t)}{\partial s\partial t}
\end{aligned}
$$

6.3.5　均方积分

定义 6.3.7　设 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是随机过程，$f(s,t)$ 是定义在 $S\times[a,b]$ 上普通函数，且对每个固定的 $s\in S$ 是可积的，其中 S 是参数集。将区间 $[a,b]$ 划分成 n 个区间，其分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，这一分法记为 Δ。在每个部分区间 $[t_{i-1},t_i]$ 中任取一点 ξ_i，作和式

$$
Y_n(s)=\sum_{i=1}^{n} f(s,\xi_i)X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})
$$

令 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}$。如果对每个固定的 $s\in S$，当 $\lambda(\Delta)\to 0$ 时，$Y_n(s)$ 均方收敛，且此均方极限值不依赖于对区间 $[a,b]$ 的分法 Δ，也不依赖于 ξ_i 的选择，则称 $f(s,t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上（**Riemann**）**均方可积**，其均方极限称为 $f(s,t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的（**Riemann**）**均方积分**，记为

$$
Y(s)=\int_a^b f(s,t)X(t)\mathrm{d}t=\underset{\lambda(\Delta)\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{i=1}^{n} f(s,\xi_i)X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})
$$

由于 L_2 是完备的赋范线性空间，因而 $Y_n(s)$ 是 L_2 的函数。进一步，若对任一 $s\in S$，$Y_n(s)$ 的均方极限 $Y(s)$ 都存在，则 $\{Y(s),s\in S\}$ 是一个新的二阶矩过程。关于 $\{Y(s),s\in S\}$ 的存在性，即 $f(s,t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上的均方可积性有如下的均方可积性准则。

定理 6.3.15(均方可积性准则) $f(s,t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可积的充分条件是对任意固定的 $s\in S$，二重积分 $\int_a^b\int_a^b f(s,u)f(s,v)R_X(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 存在。

证 由均方积分的定义知，要证明 $f(s,t)X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积，只要证明均方极限 $\underset{\lambda(\Delta)\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{i=1}^n f(s,\xi_i)X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$ 存在。又由定理 6.3.10 知，上述均方极限存在的充分条件是

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}E\Big(\sum_{i=1}^n f(s,\xi_i)X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\sum_{j=1}^n f(s,\xi_j)X(\xi_j)(t_j-t_{j-1})\Big)=$$

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(s,\xi_i)f(s,\xi_j)E(X(\xi_i)X(\xi_j))(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})=$$

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f(s,\xi_i)f(s,\xi_j)R_X(\xi_i,\xi_j)(t_i-t_{i-1})(t_j-t_{j-1})$$

存在，即就是二重积分 $\int_a^b\int_a^b f(s,u)f(s,v)R_X(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 存在。证毕。

在定理 6.3.15 中，若令 $f(s,t)\equiv 1$，则可获得判断 $X(t)$ 均方可积性的如下推论。

推论 6.3.6 随机过程 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方可积的充分必要条件是 $R_X(s,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上可积。

随机过程的均方可积性取决于它的相关函数的可积性，这样就使得均方可积性的判断相对来说变得较容易。下面考察一个简单的例子。

例 6.3.6 设 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 是一维 Brown 运动，定义均方积分 $Y(s)=\int_0^s B(t)\mathrm{d}t$。证明 $Y(s)(s\geqslant 0)$ 存在。

证 根据性质 6.2.5 知，Brown 运动 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 的相关函数为 $R_B(s,t)=\mathrm{Cov}(B(s),B(t))=s\wedge t$，所以，对任意固定的 $s\geqslant 0$，二重积分

$$\int_0^s\int_0^s R_B(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^s\int_0^s u\wedge v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$\int_0^s\mathrm{d}u\int_0^u v\mathrm{d}v+\int_0^s\mathrm{d}u\int_u^s u\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{3}s^3$$

存在。根据推论 6.3.6，对一切 $s\geqslant 0$，$Y(s)$ 存在。证毕。

如果 $f(s,t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上是均方可积的，关于它的均方积分，即随机过程 $\{Y(s),s\in S\}$ 的均值函数和相关函数有如下定理。

定理 6.3.16 若 $f(s,t)X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的均方积分 $Y(s)=\int_a^b f(s,t)X(t)\mathrm{d}t$ 存在，则有

(1) 随机过程 $\{Y(s),s\in S\}$ 的均值函数为 $E(Y(s))=\int_a^b f(s,t)E(X(t))\mathrm{d}t$；

(2) 随机过程$\{Y(s),s\in S\}$的相关函数为$R_Y(s,t) = E(Y(s)Y(t)) = \int_a^b\int_a^b f(s,u)f(t,v)R_X(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$。

利用均方积分的定义和定理 6.3.9 容易证明此定理，具体证明留给读者自己完成。

例 6.3.7　在例 6.3.6 中已经证明了一维 Brown 运动$\{B(t),t\geqslant 0\}$的均方积分$\{Y(s),s\geqslant 0\}$是存在的，求随机过程$\{Y(s),s\geqslant 0\}$的均值函数$m_Y(s)$和相关函数$R_Y(s,t)$。

解　由定理 6.3.16，有$m_Y(s) = E(Y(s)) = \int_0^s E(B(t))\mathrm{d}t = 0$。当$0\leqslant s\leqslant t$时，有

$$R_Y(s,t) = \int_0^s\int_0^t u\wedge v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^s \mathrm{d}u\int_0^u v\mathrm{d}v + \int_0^s \mathrm{d}u\int_u^t u\mathrm{d}v = \frac{1}{6}(3t-s)s^2$$

对于无穷区间$[a,+\infty)$，仿通常广义积分的定义，若均方极限$\underset{b\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(s,t)X(t)\mathrm{d}t$存在，则$f(s,t)X(t)$在区间$[a,+\infty)$上的广义(Riemann)均方积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(s,t)X(t)\mathrm{d}t = \underset{b\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^b f(s,t)X(t)\mathrm{d}t$$

此时，广义均方积分存在的充分必要条件为广义二重积分$\int_a^{+\infty}\int_a^{+\infty} f(s,u)f(s,v)R_X(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$存在。

类似地，还可以定义均方积分$\int_{-\infty}^b f(s,t)X(t)\mathrm{d}t$和$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)X(t)\mathrm{d}t$，不再赘述。

性质 6.3.2　均方积分具有类似于普通积分的下列性质：

(1) 若随机过程$X(t)$在区间$[a,b]$上均方连续，则$X(t)$在$[a,b]$上均方可积。

(2) 若随机过程$X(t)$在$[a,b]$上均方可积，则在等价的意义下其均方积分惟一。

(3) 若随机过程$X(t)$和$Y(t)$在$[a,b]$上均方可积，α和β是常数，则

$$\int_a^b (\alpha X(t) + \beta Y(t))\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b X(t)\mathrm{d}t + \beta\int_a^b Y(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}t = \int_a^c X(t)\mathrm{d}t + \int_c^b X(t)\mathrm{d}t \qquad (a\leqslant c\leqslant b)$$

(4) 若X是随机变量及对任意给定的$s\in S$，$f(s,t)$在区间$[a,b]$上关于t可积，则

$$\int_a^b f(s,t)X\mathrm{d}t = X\int_a^b f(s,t)\mathrm{d}t$$

与普通分析中的证明相似，利用均方极限的性质、均方积分的定义及均方可积性准则，可以证明均方积分的这些性质，故略去证明。

在积分学中，利用积分上限的函数的导数证明了微积分基本公式。类似地，均方积分上限的函数的导数是否存在呢？为此，需要下面的定理。

定理 6.3.17　设随机过程$X(t)$在区间$[a,b]$上均方连续，则$\left\|\int_a^b X(t)\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \| X(t)\|\mathrm{d}t$。

证 由性质 6.3.2 之(1)知，上式左端的均方积分存在；再由定理 6.3.11 知，$R_X(t,t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，即 $\| X(t) \| = \sqrt{R_X(t,t)}$ 在 $[a,b]$ 上连续，于是上式右端的积分存在。

对区间 $[a,b]$ 的任一划分：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，根据范数的三角不等式，有

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} X(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| X(\xi_i) \| (t_i - t_{i-1})$$

一方面由定积分的定义，有 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \| X(\xi_i) \| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \| X(t) \| \mathrm{d}t$；另一方面由定理 6.3.9 之(4)和均方积分的定义，有 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} X(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| = \left\| \int_a^b X(t)\mathrm{d}t \right\|$。因此定理的结论成立。证毕。

定理 6.3.18 设随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方连续，则 $Y(t) = \int_a^t X(s)\mathrm{d}s \ (a \leqslant t \leqslant b)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可微，且有 $Y'(t) = X(t)$。

证 由性质 6.3.2 之(3)和定理 6.3.17 知，当 $h>0$ 时，有

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{Y(t+h)-Y(t)}{h} - X(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} X(s)\mathrm{d}s - X(t) \right\| = \\
&\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (X(s)-X(t))\mathrm{d}s \right\| \leqslant \\
&\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \| X(s)-X(t) \| \mathrm{d}s \leqslant \\
&\max_{s\in[t,t+h]} \| X(s)-X(t) \|
\end{aligned}$$

再由 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的均方连续性，当 $h\to 0$ 时，上述不等式的右端趋于零，因而左端也趋于零，故定理的结论成立。

同理可证，当 $h<0$ 时，定理的结论也成立。证毕。

由定理 6.3.18 可得均方微积分基本定理和含参变量均方积分的微分公式，这相当于普通积分中的 Newton-Leibniz 公式和含参变量积分的微分公式。将这两个结论作为定理 6.3.18 的推论，罗列如下，证明留给读者自己完成。

推论 6.3.7 设随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可微，且 $X'(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方连续，则当 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，有 $X(t) - X(a) = \int_a^t X'(t)\mathrm{d}t$。特别地，当 $t=b$ 时，有 $X(b) - X(a) = \int_a^b X'(t)\mathrm{d}t$。

推论 6.3.8 设随机过程 $X(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可积，普通函数 $f(s,t)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续且偏导数 $f_t(s,t)$ 有界，则 $Y(t) = \int_a^t f(s,t)X(s)\mathrm{d}s$ 在区间 $[a,b]$ 上均方可微，且 $Y'(t) = \int_a^t \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}X(s)\mathrm{d}s + f(t,t)X(t)$。

6.4 Ito 随机积分

考虑随机积分 $\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)$，其中 $\{X(t), t\in[a,b]\}$ 是属于 L_2 空间的实随机过程，$\{B(t),$

$t\geqslant0\}$是 Brown 运动，$0\leqslant a<b$。由于日本学者 Ito 首先研究了此类积分，所以就称其为 Ito 随机积分。它在近代滤波、通信、控制、经济学和生物学等领域中都有广泛的应用。

定义 6.4.1　设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是随机过程，$\{B(t),t\geqslant0\}$是 Brown 运动。将区间$[a,b]$划分成 n 个区间，其分点为 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，令 $\Delta_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{t_k-t_{k-1}\}$。作和式 $I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1}))$。如果当 $\Delta_n\to0$ 时，I_n 均方收敛，且此均方极限值不依赖于对区间$[a,b]$的分法，则其极限称为随机过程 $X(t)$关于 Brown 运动 $B(t)$在区间$[a,b]$上的 **Ito 随机积分**或简称 **Ito 积分**，记为

$$\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)=\mathop{\mathrm{l.i.m}}_{\Delta_n\to0}\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1}))$$

注意 Ito 积分和式中 $X(t)$的是在区间$[t_{k-1},t_k]$的左端点 t_{k-1} 上取值，而不是在区间上任意一点取值的，因此，这个定义有别于通常意义下的均方积分。在例 6.4.1 之后，将说明如果积分和式中 $X(t)$的值是在区间$[t_{k-1},t_k]$上任意一点选取的，则 $X(t)$关于 $B(t)$是均方不可积的。

顺便指出，1966 年原苏联学者 Stratonovich 考虑和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}X\left(\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)(B(t_k)-B(t_{k-1}))$，即 $X(t)$ 在区间$[t_{k-1},t_k]$ 的中点取值。当 $\Delta_n\to0$ 时，若该和式的均方极限存在，则称其极限为 $X(t)$ 关于 $B(t)$ 在区间$[a,b]$ 上的 **Stratonovich 随机积分**，记为$(\mathrm{Strat})\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)$。

Ito 随机积分和 Stratonovich 随机积分的定义十分相似。由于 Ito 随机积分具有良好的分析性质，且在实际问题中应用广泛，所以今后仅限于讨论 Ito 随机积分及其应用。

定理 6.4.1　设$\{X(t),t\in[a,b]\}$是均方连续的二阶矩过程，$\{B(t),t\geqslant0\}$是 Brown 运动，且对任何 $t\in[a,b]$及一切满足 $a\leqslant t\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k\leqslant b$ 的 t_{k-1} 和 t_k，$X(t)$与 $B(t)$的增量 $B(t_k)-B(t_{k-1})$相互独立，则 $X(t)$关于 $B(t)$在区间$[a,b]$上的 Ito 积分存在且惟一。

证　先证 Ito 积分的存在性。设区间$[a,b]$的两个任意划分为 $a=s_0<s_1<\cdots<s_m=b$ 和 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，对应的积分和式分别为

$$I_m=\sum_{i=1}^{m}X(s_{i-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))\text{ 和 }I_n=\sum_{j=1}^{n}X(t_{j-1})(B(t_j)-B(t_{j-1}))$$

根据定理 6.3.10，只要证明下式

$$E(I_mI_n)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))(B(t_j)-B(t_{j-1})))$$

的极限存在即可。上述求和中的每一项在矩形$[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j]$上计算，而这些矩形可根据其是否包含对角线 $t=s$ 的一段分为两类：一类是包含对角线一段的矩形 R_1，另一类是至多与对角线相交于一点的矩形 R_2，如图 6.6 所示。

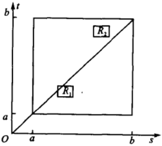


图 6.6　区域$[a,b]\times[a,b]$

对第二类矩形，当 $s_{i-1}<s_i\leqslant t_{j-1}<t_j$ 时，由已知条件知 $X(s_{i-1})$，$X(t_{j-1})$和 $B(s_i)-B(s_{i-1})$与 $B(t_j)-B(t_{j-1})$相互独立，因此有

$$E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))(B(t_j)-B(t_{j-1})))=$$
$$E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1})))E(B(t_j)-B(t_{j-1}))=0$$

而当 $t_{j-1}<t_j\leqslant s_{i-1}<s_i$ 时，易知上式亦成立。这样，对第二类矩形，求和中的每一项都是零。

对第一类矩形，区间$[s_{i-1},s_i]$与$[t_{j-1},t_j]$相交，其中一种典型的情形是 $s_{i-1}<t_{j-1}<s_i<t_j$。此时，求和中的项为

$$\begin{aligned}
&E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))(B(t_j)-B(t_{j-1})))=\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})((B(s_i)-B(t_{j-1}))+(B(t_{j-1})-B(s_{i-1})))\\
&\quad ((B(t_j)-B(s_i))+(B(s_i)-B(t_{j-1}))))=\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(t_{j-1}))(B(t_j)-B(s_i)))+\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(t_{j-1}))(B(s_i)-B(t_{j-1})))+\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(t_{j-1})-B(s_{i-1}))(B(t_j)-B(s_i)))+\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(t_{j-1})-B(s_{i-1}))(B(s_i)-B(t_{j-1})))
\end{aligned}$$

类似于对第二类矩形的讨论，可知上式中除第二项以外，其余三项都等于零。根据 $X(t)$ 与 $B(t)$的增量是独立的及性质 6.2.3 知，有

$$\begin{aligned}
&E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})(B(s_i)-B(s_{i-1}))(B(t_j)-B(t_{j-1})))=\\
&\quad E(X(s_{i-1})X(t_{j-1})E(B(s_i)-B(t_{j-1}))^2)=\\
&\quad (s_i-t_{j-1})R(s_{i-1},t_{j-1})
\end{aligned}$$

其中 $R(s,t)$是过程 $X(t)$的相关函数，s_i-t_{j-1}是$[s_{i-1},s_i]$与$[t_{j-1},t_j]$重叠部分的区间长度。同理，对第一类矩形的其他情形，即 $t_{j-1}<s_{i-1}<t_j<s_i$ 和 $s_{i-1}=t_{j-1}<s_i=t_j$，也可以获得类似的结果。

若把对区间$[a,b]$的两组划分合并成一组，并记为 $a=u_0<u_1<\cdots<u_{m+n-1}=b$(当两组划分的分点有重合时，$u_k$ 的个数就小于 $m+n$)。根据上面的讨论有

$$E(I_mI_n)=\sum_{k=1}^{m+n-1}(R(u_{k-1},u_{k-1})(u_k-u_{k-1})+o(u_k-u_{k-1}))$$

由于 $R(t,t)$是连续的，因而是可积的，所以有 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}E(I_mI_n)=\int_a^b R(t,t)\mathrm{d}t$。于是存在性得证。惟一性由定理 6.3.7 直接得到。证毕。

推论 6.4.1 若 $X(t)$，$Y(t)$和 $B(t)$满足定理 6.4.1 的条件，则 $E\left(\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)\right)=0$，$E\left(\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)\int_a^b Y(t)\mathrm{d}B(t)\right)=\int_a^b E(X(t)Y(t))\mathrm{d}t$， 特别地 $E\left(\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)\right)^2=\int_a^b E(X^2(t))\mathrm{d}t$。

例 6.4.1 试证明 $\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t)=\frac{1}{2}(B^2(b)-B^2(a))-\frac{1}{2}(b-a)$。

证 由于过程 $B(t)$满足定理 6.4.1 中关于 $X(t)$的假设条件，因此所讨论的 Ito 积分存在。对区间$[a,b]$的任一划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$\Delta_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$，作下列和式

$$\sum_{k=1}^n B(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1}))=$$
$$-\sum_{k=1}^n B(t_{k-1})(B(t_{k-1})-B(t_k))=$$

$$-(B^2(t_0)-B(t_0)B(t_1)+B^2(t_1)-B(t_1)B(t_2)+\cdots+$$
$$B^2(t_{n-1})-B(t_{n-1})B(t_n))=$$
$$-\frac{1}{2}(B^2(t_0)+\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))^2-B^2(t_n))=$$
$$\frac{1}{2}(B^2(b)-B^2(a))-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))^2$$

由 Ito 积分的定义有

$$\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t)=\frac{1}{2}(B^2(b)-B^2(a))-\frac{1}{2}\underset{\Delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))^2$$

因此只要证明 $\underset{\Delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))^2=b-a$ 即可。为简单起见，令 $t_k-t_{k-1}=\Delta t_k$，$B(t_k)-B(t_{k-1})=\Delta B_k$，则有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2-(b-a)\right\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{n}((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right\|^2=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\|(\Delta B_k)^2-\Delta t_k\|^2+2\sum_{\substack{i,j\\i<j}}E((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\|(\Delta B_k)^2-\Delta t_k\|^2+2\sum_{\substack{i,j\\i<j}}E((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)E((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\|(\Delta B_k)^2-\Delta t_k\|^2=$$
$$\sum_{k=1}^{n}E((\Delta B_k)^4-2(\Delta B_k)^2\Delta t_k+(\Delta t_k)^2)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}(3(\Delta t_k)^2-2(\Delta t_k)^2+(\Delta t_k)^2)=$$
$$2\sum_{k=1}^{n}(\Delta t_k)^2\leqslant 2\Delta_n\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=2\Delta_n(b-a)$$

所以，当 $\Delta_n\to 0$ 时，有 $\left\|\sum_{k=1}^{n}(\Delta B_k)^2-(b-a)\right\|^2\to 0$，故结论成立。证毕。

从这个例子可以看出 Ito 随机积分与普通的积分不一样。根据普通的积分法则，等式右边中只有第一项，没有第二项 $(b-a)/2$。这一点在计算 Ito 积分时应需要特别注意。Ito 积分结果中的项 $\frac{1}{2}(b-a)$ 称为"修正项"，它的出现是为了保证等式 $E\left(\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t)\right)=0$ 成立。

利用例 6.4.1 证明中的结论 $\underset{\Delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=1}^{n}(B(t_k)-B(t_{k-1}))^2=b-a$，可以说明 Ito 随机积分与前面讨论的均方积分不同，即积分和式中的 ξ_k 不能任意选取。事实上，设 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，$\Delta_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$ 是区间 $[a,b]$ 的一个划分，考虑和式 $I_n=\sum_{k=1}^{n}B(t_{k-1})(B(t_k)-B(t_{k-1}))$ 和 $J_n=\sum_{k=1}^{n}B(t_k)(B(t_k)-B(t_{k-1}))$，它们形式上都是 $\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t)$ 的积分和式，分别

相应于 $\xi_k = t_{k-1}$ 和 $\xi_k = t_k$。当 $\Delta_n \to 0$ 时有 $J_n - I_n = \sum_{k=1}^{n}(B(t_k) - B(t_{k-1}))^2 \to b - a$，因此 I_n 和 J_n 有不同的均方极限，即积分和式中的 ξ_k 是不能任意选取的，于是通常意义下的均方积分不存在。

上面已经解释了 Ito 积分不具有通常的积分法则，而 ξ_k 的选择又直接影响到积分的定义，那么是否存在 ξ_k 的特殊取法使得定义的积分具有通常的积分法则呢？可以证明 Stratonovich 积分具有通常的积分法则，即 $(\mathrm{Strat})\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t) = \frac{1}{2}(B^2(b) - B^2(a))$。有关此结论的详细讨论，读者可以参见参考文献[10]。

下面给出 Ito 积分的一些性质。

性质 6.4.1 设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 关于 Brown 运动 $B(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Ito 积分都存在，则

(1) 对任意常数 α,β 有 $\int_a^b(\alpha X(t) + \beta Y(t))\mathrm{d}B(t) = \alpha\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t) + \beta\int_a^b Y(t)\mathrm{d}B(t)$；

(2) 若 $a \leqslant c \leqslant b$，则 $\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t) = \int_a^c X(t)\mathrm{d}B(t) + \int_c^b X(t)\mathrm{d}B(t)$。

Ito 积分的这个性质与普通积分相应的性质类似，其证明留给读者自己完成。

性质 6.4.2 设随机过程 $X(t)$ 关于 Brown 运动 $B(t)$ 的 Ito 积分 $\int_a^b X(t)\mathrm{d}B(t)$ 存在，则对任意 $t \in [a,b]$，Ito 积分 $Y(t) = \int_a^t X(s)\mathrm{d}B(s)$ 存在，且是均方连续的。

利用推论 6.4.1 和性质 6.4.1 可以证明此性质。

定理 6.4.2 设随机过程序列 $\{X_n(t), t\in[a,b]\}$ 满足条件：

(1) $X_n(t)$ 是均方连续的二阶矩过程；

(2) 对任何 $t\in[a,b]$ 及一切满足 $a \leqslant t \leqslant t_{k-1} \leqslant t_k \leqslant b$ 的 t_{k-1} 和 t_k，$X(t)$ 与 $B(t)$ 的增量 $B(t_k) - B(t_{k-1})$ 相互独立。

如果在 $[a,b]$ 上 $X_n(t)$ 一致地均方收敛于 $X(t)$，则 $X(t)$ 也满足上述两个条件，且对一切 $a \leqslant t \leqslant b$ 一致地有

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\int_a^t X_n(s)\mathrm{d}B(s) = \int_a^t X(s)\mathrm{d}B(s)$$

证 由于 $X_n(t)$ 均方连续且一致地均方收敛于 $X(t)$，易证 $X(t)$ 满足条件(1)和(2)。因此，根据定理 6.4.1 可知 Ito 积分 $Y_n(t) = \int_a^t X_n(s)\mathrm{d}B(s)$ 和 $Y(t) = \int_a^t X(s)\mathrm{d}B(s)$ 都存在。又根据性质 6.4.1 和推论 6.4.1，有

$$\begin{aligned}\| Y_n(t) - Y(t) \|^2 = &\left\| \int_a^t (X_n(s) - X(s))\mathrm{d}B(s) \right\|^2 = \\ &\int_a^t \| X_n(s) - X(s) \|^2 \mathrm{d}s \leqslant \\ &\int_a^b \| X_n(s) - X(s) \|^2 \mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中最后一项与 t 无关。因此，$n\to\infty$ 时，由 $\| X_n(s) - X(s) \|^2$ 在 $[a,b]$ 上一致地趋于零可知 $\| Y_n(t) - Y(t) \|^2$ 在 $[a,b]$ 上也一致地趋于零，即在 $[a,b]$ 上 $Y_n(t)$ 一致地均方收敛于 $Y(t)$。

证毕。

6.5　Ito微分公式

设$\{X(t),t\in T=[a,b]\}$是一维随机过程，$0\leqslant a<b$，$\{B(t),t\geqslant 0\}$是一维 Brown 运动，若对任意$a\leqslant t_0<t\leqslant b$，都有

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}B(s) \tag{6.5.1}$$

几乎确定成立，则称$\{X(t),t\in T=[a,b]\}$有**随机微分**

$$\mathrm{d}X(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B(t) \tag{6.5.2}$$

一般称(6.5.1)式为 **Ito 积分方程**，其第一个积分为均方积分，第二个积分为 Ito 积分，并假设这些积分是存在的。而相应的微分式(6.5.2)称为 **Ito 随机微分方程**，它仅仅是$X(t)$微分的形式表示。实际上这个等式在均方意义下并不存在，因为 Brown 运动$B(t)$是处处均方不可微的。今后，将 Ito 积分方程和 Ito 随机微分方程看成是等价的。有关 Ito 随机微分方程解的存在性和惟一性的讨论参见 6.6.1。本节将介绍 Ito 随机微分的复合函数微分公式，一般称之为 Ito 微分公式。

定理 6.5.1　设一维随机过程$\{X(t),T=[a,b]\}$具有随机微分

$$\mathrm{d}X(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}B(t) \tag{6.5.3}$$

又设$u(x,t)$及其导数u_t,u_x,u_{xx}关于$(x,t)\in \mathbf{R}\times T$连续，那么$Y(t)=u(X(t),t)$有随机微分

$$\mathrm{d}Y(t) = \left[u_t(X(t),t) + u_x(X(t),t)f(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(X(t),t)g^2(t)\right]\mathrm{d}t + u_x(X(t),t)g(t)\mathrm{d}B(t) \tag{6.5.4}$$

若规定$\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}B(t)=0$，$\mathrm{d}B(t)\cdot\mathrm{d}B(t)=\mathrm{d}t$，则 Ito 微分公式可变形为

$$\mathrm{d}Y(t) = u_t(X(t),t)\mathrm{d}t + u_x(X(t),t)\mathrm{d}X(t) + \frac{1}{2}u_{xx}(X(t),t)(\mathrm{d}X(t))^2$$

从这个公式可知，Ito 微分公式与普通多元函数全微分公式有较大的区别，多出了第三项，在应用时应特别注意。Ito 微分公式是研究 Ito 微分方程的典型工具，有重要的应用。本节仅利用它来证明一些 Ito 积分公式，至于它在求解简单的 Ito 微分方程方面的应用，则留在 6.6.1 讨论。

例 6.5.1　证明$\int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t) = \frac{1}{2}(B^2(b)-B^2(a)) - \frac{1}{2}(b-a)$，$0\leqslant a<b$。

证　在式(6.5.3)中取$X(t)=B(t)$，$f(t)=0$及$g(t)=1$，则$\mathrm{d}B(t)=0\mathrm{d}t+\mathrm{d}B(t)$。令$u(x,t)=\frac{1}{2}x^2$，那么$Y(t)=u(B(t),t)=\frac{1}{2}B^2(t)$。由 Ito 微分公式(6.5.4)有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}B^2(t)\right) = \left[u_t + u_x f(t) + \frac{1}{2}u_{xx}g^2(t)\right]\mathrm{d}t + u_x g(t)\mathrm{d}B(t) = \frac{1}{2}\mathrm{d}t + B(t)\mathrm{d}B(t)$$

所以，对应的积分方程为

$$\frac{1}{2}B^2(b) = \frac{1}{2}B^2(a) + \frac{1}{2}(b-a) + \int_a^b B(t)\mathrm{d}B(t)$$

移项后可得结论。证毕。

在例 6.4.1 中，曾利用 Ito 积分的定义证明了上述结论，相当繁琐，而利用 Ito 微分公式证明就变得非常简明。

例 6.5.2 证明 $\int_a^b t\mathrm{d}B(t) = bB(b) - aB(a) - \int_a^b B(t)\mathrm{d}t,\ 0 \leqslant a < b$。

证 同上例，令 $u(x,t)=tx$，则 $Y(t)=u(B(t),t)=tB(t)$。由 Ito 微分公式(6.5.4)有 $\mathrm{d}(tB(t))=B(t)\mathrm{d}t+t\mathrm{d}B(t)$，等价的 Ito 积分方程为

$$bB(b) = aB(a) + \int_a^b B(t)\mathrm{d}t + \int_a^b t\mathrm{d}B(t)$$

移项后可得结论。证毕。

更一般地，如果实函数 $h(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$\int_a^b h(t)\mathrm{d}B(t) = h(t)B(t)\Big|_a^b - \int_a^b h'(t)B(t)\mathrm{d}t \tag{6.5.5}$$

其中 $0\leqslant a<b$。它的证明留作习题，这个公式与普通积分的分部积分公式相同。

对于 n 维 Brown 运动 $\{\boldsymbol{B}(t),t\geqslant 0\}$，有如下推广的 Ito 微分公式。

定理 6.5.2 设 m 维随机过程 $\{\boldsymbol{X}(t),t\in T=[a,b]\}$ 具有随机微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t)$，其中 $\boldsymbol{f}(t)$ 为 m 维向量，$\boldsymbol{g}(t)$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}(t)$ 是 n 维 Brown 运动。如果 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 是 $\mathbf{R}^m\times T$ 到 $\mathbf{R}^k$ 上的实函数，且 $\boldsymbol{u}(x,t)$ 及其导数 $\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}_{x_i},\boldsymbol{u}_{x_ix_j}$ 关于 (x,t) 连续，那么 $\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(t),t)$ 有随机微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t) = \Big[\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{X}(t),t) + \sum_{i=1}^m \boldsymbol{u}_{x_i}(\boldsymbol{X}(t),t)f_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n \sum_{i,j=1}^m \boldsymbol{u}_{x_ix_j}(\boldsymbol{X}(t),t)g_{il}(t)g_{jl}(t)\Big]\mathrm{d}t + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m \boldsymbol{u}_{x_i}(\boldsymbol{X}(t),t)g_{il}(t)\mathrm{d}B_l(t) \tag{6.5.6}$$

其中 $\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}_{x_i}$ 和 $\boldsymbol{u}_{x_ix_j}$ 是 k 维列向量。

如果用 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$ 表示 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，即 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^n a_{ii}$，则 Ito 微分公式可用矩阵表示成简单的形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t) = (\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{X}(t),t) + \boldsymbol{u}_x(\boldsymbol{X}(t),t)\boldsymbol{f}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{g}(t)\boldsymbol{g}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{xx}(\boldsymbol{X}(t),t)))\mathrm{d}t + \boldsymbol{u}_x(\boldsymbol{X}(t),t)\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t)$$

其中 $\boldsymbol{u}_x=(\boldsymbol{u}_{x_1},\boldsymbol{u}_{x_2},\cdots,\boldsymbol{u}_{x_m})$ 是 $k\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{u}_{xx}=(\boldsymbol{u}_{x_ix_j})$ 是 $m\times m$ 矩阵，它的每个元素 $\boldsymbol{u}_{x_ix_j}$ 是 k 维列向量。有关这个公式的应用参见例 6.6.2。

6.6 Ito 随机微分方程

考虑一维 Ito 随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = f(X(t),t)\mathrm{d}t + g(X(t),t)\mathrm{d}B(t),\ t\in T=[a,b] \tag{6.6.1}$$

$$X(t_0) = X_0 \tag{6.6.2}$$

其中 $B(t)$ 是一维 Brown 运动，$f(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 是 $\mathbf{R}\times T$ 上的实函数，X_0 与 $B(t)$ 独立。它所对应的 Ito 积分方程为

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}f(X(s),s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(X(s),s)\mathrm{d}B(s) \tag{6.6.3}$$

如果在 L_2 空间中存在随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 使得式(6.6.1)和式(6.6.2)成立,则称 $\{X(t),t\in T\}$ 是满足 Ito 随机微分方程(6.6.1)和初始条件(6.6.2)的**均方解**。

在介绍 Ito 微分公式时,曾提到方程(6.6.1)是 Ito 积分方程(6.6.3)形式上的微分表示式,实际上并不成立,但仍这样记的主要原因如下:

首先,从纯数学角度看,无论是普通微积分,还是均方微积分,这两种形式的方程是等价的。因此,方程(6.6.1)作为方程(6.6.3)的等价形式符合人们的习惯。其次,在工程技术中,经常会遇到一类微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=f(X(t),t)+g(X(t),t)W(t),\qquad t\in T \tag{6.6.4}$$

其中 $W(t)$ 为白噪声。如例 6.1.1 和例 6.1.2 中的方程就属于这一类型。白噪声是一种随机过程,它在物理上是不能实现的,但是,由于它在数学上的简单性,人们常常用它来作为许多物理现象的一种近似描述。

如果没有 $g(X(t),t)W(t)$ 这一项,方程(6.6.4)就可看作是普通的常微分方程。但由于外界许多不可知随机因素的影响,需增加这一项,于是这种形式的方程从应用观点看也是合理的。又由于 Brown 运动 $\{B(t),t\geqslant 0\}$ 是正态过程,它的均值是零,协方差函数是 $C_B(s,t)=\mathrm{Cov}(B(s),B(t))=s\wedge t,s,t\geqslant 0$。由例 6.3.4 知,Brown 运动是处处均方不可微的,但就它的形式均方导数 $B'(t)$ 而言,仍有 $C_{B'}(s,t)=\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}C_B(s,t)=\delta(s-t)$。当 $s\neq t$ 时,它形式上表示 $B'(s)$ 和 $B'(t)$ 不相关,这些正是白噪声具有的特性。由于 $B(t)$ 是正态过程,因此一般称这种随机过程 $\{B'(t),t\geqslant 0\}$ 为正态白噪声。因此,形式上有 $\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}=W(t)$, $t\geqslant 0$。这样,积分方程(6.6.4)形式上也可以写成大家所熟悉的微分方程(6.6.1)的形式。

6.6.1 解过程的存在性和惟一性

为了方便起见,在无特别声明的情况下今后均假设过程 $X(t)$ 和 $B(t)$ 满足定理 6.4.1 的所有条件,而且仅在 $X(t)$ 和 $B(t)$ 是一维随机过程的情况下,给出 Ito 微分方程解的存在性和惟一性及解过程的一些其他性质,容易把这些结果推广到 n 维方程组的情形。下面先举两个 Ito 微分方程的例子。

例 6.6.1 求 Ito 微分方程 $\mathrm{d}X(t)=-\frac{1}{2}X(t)\mathrm{d}t+X(t)\mathrm{d}B(t)$, $t\geqslant 0$ 满足初始条件 $X(0)=1$ 的特解。

解 令 $u(x,t)=\ln x$,则由 Ito 微分公式(6.5.4)有

$$\mathrm{d}u(X(t),t)=\left(\frac{1}{X(t)}\left(-\frac{1}{2}X(t)\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{X^2(t)}X^2(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{X(t)}X(t)\mathrm{d}B(t)=$$
$$-\mathrm{d}t+\mathrm{d}B(t)$$

积分并由初始条件可得 $\ln X(t)=-t+B(t)$,即 $X(t)=\exp\{-t+B(t)\}$。

对例 6.6.1,如果按常微分方程求解,应该有 $X(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}t+B(t)\right\}$。但这个结果是错的,也就是说对 Ito 微分方程不能用 Riemann 积分的法则来求解。

例 6.6.2 求解例 6.1.2 的随机微分方程

$$\begin{cases} LQ''(t)+RQ'(t)+\frac{1}{C}Q(t)=G(t)+\alpha W(t),\ t\geqslant 0 \\ Q(0)=Q_0, Q'(0)=I_0 \end{cases}$$

解 先把二阶方程化为方程组，令 $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(t,\omega)=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q(t)\\Q'(t)\end{pmatrix}$，这样，所要求解的二阶随机微分方程就化成如下的二元随机微分方程组

$$\begin{cases} X_1'=X_2 \\ LX_2'=-RX_2-\frac{1}{C}X_1+G(t)+\alpha W(t) \end{cases}$$

其初始条件为 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}Q_0\\I_0\end{pmatrix}$。用矩阵表示这个方程组，其形式上等价于 Ito 微分方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{K}\mathrm{d}B(t),\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$$

其中 $B(t)$ 是一维 Brown 运动，$\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}X_1\\\mathrm{d}X_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{H}(t)=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{L}G(t)\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0\\\frac{\alpha}{L}\end{pmatrix}$。

为了求解需要，先引进矩阵函数 $\exp\{\boldsymbol{A}\}$。设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义 $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ 为

$$\exp\{\boldsymbol{A}\}=\boldsymbol{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \tag{6.6.5}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^k$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂。这个级数对所有的 $\boldsymbol{A}$ 都是收敛的，因此 $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ 的定义是有意义的。

令 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{x}$，由 Ito 微分公式(6.5.6)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t)&=\mathrm{d}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(t),t)=\\&(-\boldsymbol{A}\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{X}(t)+\exp\{-\boldsymbol{A}t\}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{H}(t)))\mathrm{d}t+\\&\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{K}\mathrm{d}B(t)=\\&\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t+\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{K}\mathrm{d}B(t)\end{aligned}$$

因此，上述方程的解可用积分表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(t)&=\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{X}(t)=\\&\boldsymbol{X}_0+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}s\}\boldsymbol{H}(s)\mathrm{d}s+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}s\}\boldsymbol{K}\mathrm{d}B(s)\end{aligned}$$

或由 Ito 分部积分公式(6.5.5)，有

$$\boldsymbol{X}(t)=\exp\{\boldsymbol{A}t\}(\boldsymbol{X}_0+\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{K}B(t)+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}s\}(\boldsymbol{H}(s)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}B(s))\mathrm{d}s)$$

定理 6.6.1 设 $f(x,t)$ 和 $g(x,t)$($x\in(-\infty,+\infty)$，$t\in T$)是满足下列条件的实二元函数：

(1) 它们在 $(-\infty,+\infty)\times T$ 上连续，且对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 关于 t 是一致连续，

(2) 增长条件 $|f(x,t)|^2\leqslant K^2(1+x^2)$，$|g(x,t)|^2\leqslant K^2(1+x^2)$，

(3) Lipschitz 条件 $|f(x_2,t)-f(x_1,t)|\leqslant K|x_2-x_1|$，$|g(x_2,t)-g(x_1,t)|\leqslant K|x_2-x_1|$，其中 $K>0$ 是有限常数，

则方程(6.6.1)有满足初始条件(6.6.2)的惟一均方解。

与相应常微分方程解的存在性和惟一性定理的证明类似，利用逐次逼近法和定理 6.4.2 等可以证明此定理，详细证明过程可参见参考文献[1]。

对 Ito 随机微分方程，特别关心的是求得解过程的显式表示，因为从这个显式表示可以确定解过程的统计特性。例如，由例 6.6.1 中方程的均方解的显式表示，可获得其概率密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\dfrac{(t+\ln x)^2}{2t}\right\} & \text{当 } x>0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } x\leqslant 0 \text{ 时}\end{cases}$$

事实上，当 $x\leqslant 0$ 时，由于 $F_X(x)=P\{X(t)\leqslant x\}=P\{\exp\{-t+B(t)\}\leqslant x\}=0$，所以 $p_X(x)=0$。当 $x>0$ 时，由 $B(t)\sim N(0,t)$，有

$$F_X(x)=P\{X(t)\leqslant x\}=P\{B(t)\leqslant t+\ln x\}=\int_{-\infty}^{t+\ln x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2t}\right\}\mathrm{d}y$$

两端对 x 求导，有 $p_X(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\dfrac{(t+\ln x)^2}{2t}\right\}$。

然而，只有对少数简单的 Ito 微分方程可获得解的显式表示，大部分情况下要做到这一点是非常困难的，因而需要探寻能获得解过程统计特性的方法。为此，需要 Ito 微分方程解过程的如下性质。

定理 6.6.2　设 Ito 微分方程为 $\mathrm{d}X(t)=f(X(t),t)\mathrm{d}t+g(X(t),t)\mathrm{d}B(t)$，$t\in[a,b]$，$X(t_0)=X_0\in L_2$。在满足定理 6.6.1 的全部条件下，Ito 方程的惟一解过程 $X(t)$ 是 Markov 过程。

证　设 $a\leqslant t_0<s<t\leqslant b$，只需证明 $X(t)$ 在 $X(s)$ 已知时，其条件概率分布与 $X(u),t_0\leqslant u<s$ 无关，即

$$P\{X(t)\leqslant x(t)\mid X(s)=x(s),X(u)=x(u);t_0\leqslant u<s\}=$$
$$P\{X(t)\leqslant x(t)\mid X(s)=x(s)\}$$

由积分的可加性知，可以把方程(6.6.3)写成

$$X(t)=X(s)+\int_s^t f(X(v),v)\mathrm{d}v+\int_s^t g(X(v),v)\mathrm{d}B(v)$$

因此，$X(t)$ 只依赖于 $X(s)$，$\{X(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 和 $\{\Delta B(v),s\leqslant v\leqslant t\}$，其中 $\Delta B(v)=B(v+\Delta v)-B(v)$ 是 $B(v)$ 的增量，而 $\{X(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 也只依赖于 $X(s)$ 和 $\{\Delta B(v),s\leqslant v\leqslant t\}$。这样当 $t>s$ 时，$X(t)$ 只依赖 $X(s)$ 和 $\{\Delta B(v),s\leqslant v\leqslant t\}$。

类似地，由 $X(u)=X_0+\int_{t_0}^u f(X(v),v)\mathrm{d}v+\int_{t_0}^u g(X(v),v)\mathrm{d}B(v)$ 可知，$\{X(u),t_0\leqslant u\leqslant s\}$ 只依赖于 X_0 和 $\{\Delta B(v),t_0\leqslant v\leqslant s\}$。

由于初值 X_0 与 $\{B(t),t\in[a,b]\}$ 独立及 $\{B(t),t\in[a,b]\}$ 具有独立增量，因而 $\{\Delta B(v),s\leqslant v\leqslant t\}$ 与 X_0，$\{\Delta B(v),t_0\leqslant v\leqslant s\}$ 独立。因此，若 $X(s)$ 已知，当 $t>s$ 时，$X(t)$ 与 $\{X(u),t_0\leqslant u\leqslant s\}$ 独立。证毕。

因为解过程的 Markov 性，存在研究 Ito 随机微分方程的解过程的有效数学工具，特别是

当解过程还是扩散过程时，就可获得解过程的转移概率密度所满足的 Fokker－Planck 方程或 Kolmogorov 方程。由这些方程就可以得到解过程的一些统计特性，有关这方面的讨论将在 6.6.2 中进行。

下面给出 Ito 微分方程解过程的二阶矩的估计式，这在实际问题中非常有用，详细证明可参见参考文献[1]。

定理 6.6.3 设 Ito 微分方程为 $\mathrm{d}X(t)=f(X(t),t)\mathrm{d}t+g(X(t),t)\mathrm{d}B(t), t\in[a,b]$，$X(t_0)=X_0\in L_2$。在满足定理 6.6.1 的全部条件下，则微分方程的解过程的二阶矩满足如下估计：

$$\| X(t) \|^2 \leqslant (1+\| X_0 \|^2)\exp\{C(t-t_0)\},\ t\in[a,b]$$

和

$$\| X(t)-X_0 \|^2 \leqslant D(1+\| X_0 \|^2)(t-t_0)\exp\{C(t-t_0)\},\ t\in[a,b]$$

其中 $C=3K^2$ 和 D 是常数，且只依赖于 K 和 $b-t_0$。

6.6.2 解过程的转移概率密度

由于 Ito 随机微分方程的解过程是 Markov 过程，因此只要知道其转移概率密度，就可获得解过程的统计规律。求转移概率密度的方法有几种，现通过简单例子加以叙述。

考虑比较简单的 Ito 随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B(t),\qquad t\geqslant 0 \tag{6.6.6}$$

初始条件是 $X(0)=X_0$，$f(t)$ 和 $g(t)$ 是满足定理 6.6.1 条件的实函数。方程的解可用 Ito 积分表示为

$$X(t)=X_0+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}B(s)$$

根据定理 6.6.2，$X(t)$ 是 Markov 过程。因此，只要求出 $X(t)$ 的转移概率密度 $p(s,x;t,y)$，就完全确定了 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的统计规律。

根据积分的可加性，有 $X(t)=X(s)+\int_s^t f(u)\mathrm{d}u+\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)$。令 $\xi(t)=\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)$，$s<t$，则对区间 $[s,t]$ 任一划分 $s=u_0<u_1<\cdots<u_n=t$，根据 Ito 积分的定义可知 $\sum_{i=0}^{n-1}g(u_i)(B(u_{i+1})-B(u_i))\xrightarrow{\text{m. s.}}\xi(t)$。由推论 6.3.4 可知 $\sum_{i=0}^{n-1}g(u_i)(B(u_{i+1})-B(u_i))\xrightarrow{\text{d}}\xi(t)$。由于 $B(u_{i+1})-B(u_i), i=0,1,\cdots,n-1$ 是相互独立的，且服从正态分布，因此根据独立正态随机变量的线性组合仍为正态随机变量，有 $\sum_{i=0}^{n-1}g(u_i)(B(u_{i+1})-B(u_i))$ 是正态随机变量。这样它的均方极限 $\xi(t)=X(t)-X(s)-\int_s^t f(u)\mathrm{d}u$ 也是正态随机变量，从而在给定 $X(s)=x$ 的条件下，$X(t)$ 的条件概率密度，即转移概率密度 $p(s,x;t,y)$ 为

$$p(s,x;t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

其中 $\mu=E(X(t)\mid X(s)=x)$，$\sigma^2=\mathrm{Var}(X(t)\mid X(s)=x)$。

下面求 μ 和 σ^2。由推论 6.4.1 可得 $E(\xi(t))=E\left(\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)\right)=0$ 及 $\mathrm{Var}(\xi(t))=E\left(\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)\right)^2=\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u$。因此，$\mu=E(X(t)\mid X(s)=x)=x+\int_s^t f(u)\mathrm{d}u$，$\sigma^2=$

$\mathrm{Var}(X(t)\mid X(s)=x)=E\Big(\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)\Big)^2=\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u$。故解过程的转移概率密度为

$$p(s,x;t,y)=\Big(2\pi\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u\Big)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{-\Big(y-x-\int_s^t f(u)\mathrm{d}u\Big)^2}{2\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u}\right\}$$

对任意给定 t，$\xi(t)$的正态性也可以用特征函数法进行证明，具体过程如下。由于

$$\phi_\xi(t,v)=E(\exp\{\mathrm{i}v\xi(t)\})=E\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}v\ \underset{\Delta_n\to 0}{\mathrm{l.i.m}}\sum_{k=0}^{n-1}g(u_k)(B(u_{k+1})-B(u_k))\Big\}\Big)$$

根据定理 6.3.9 之(3)和 Brown 运动的独立增量性，有

$$\phi_\xi(t,v)=\lim_{\Delta_n\to 0}E\Big(\exp\Big\{\mathrm{i}v\sum_{k=0}^{n-1}g(u_k)(B(u_{k+1})-B(u_k))\Big\}\Big)=$$

$$\lim_{\Delta_n\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}E(\exp\{\mathrm{i}vg(u_k)(B(u_{k+1})-B(u_k))\})$$

又由于 $B(u_{k+1})-B(u_k)\sim N(0,u_{k-1}-u_k)$，那么它的特征函数为 $E(\exp\{\mathrm{i}w(B(u_{k+1})-B(u_k))\})=\exp\Big\{-\dfrac{1}{2}w^2(u_{k+1}-u_k)\Big\}$。因此有

$$\phi_\xi(t,v)=\lim_{\Delta_n\to 0}\prod_{k=0}^{n-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}v^2g^2(u_k)(u_{k+1}-u_k)\Big\}=$$

$$\lim_{\Delta_n\to 0}\exp\Big\{-\frac{1}{2}v^2\sum_{k=0}^{n-1}g^2(u_k)(u_{k+1}-u_k)\Big\}=$$

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2}v^2\lim_{\Delta_n\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}g^2(u_k)(u_{k+1}-u_k)\Big\}=$$

$$\exp\Big\{-\frac{1}{2}v^2\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u\Big\}$$

这正是数学期望为 0，方差为 $\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u$ 的正态随机变量的特征函数，因此 $\xi(t)$服从正态分布，且

$$E(\xi(t))=E\Big(\int_s^t g(u)\mathrm{d}B(u)\Big)=0,\ \mathrm{Var}(\xi(t))=\int_s^t g^2(u)\mathrm{d}u$$

再由解过程的表达式，可获得转移概率密度。

当 $s<t$ 时，可以验证过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$的转移概率密度 $p(s,x;t,y)$满足偏微分方程 $\dfrac{\partial p}{\partial t}=\dfrac{1}{2}g^2(t)\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}-f(t)\dfrac{\partial p}{\partial y}$，且当 $t\downarrow s$ 时 $p(s,x;t,y)\to\delta(y-x)$。

由定理 6.2.4 知，这恰好是扩散过程的转移概率密度满足的 Fokker-PLanck 方程。因此，只要知道偏移系数 $a(t,x)$和扩散系数 $b(t,x)$，就可以通过求解 Fokker-Planck 方程或 Kolmogorov方程获得 Ito 方程(6.6.6)的解过程的转换概率密度。这就为研究 Ito 方程解过程的统计规律提供了一种有效的方法。

对一般的 Ito 随机微分方程 $\mathrm{d}X(t)=f(X(t),t)\mathrm{d}t+g(X(t),t)\mathrm{d}B(t)$，可以证明 $f(x,t)$ 和 $g(x,t)$满足一定条件时，解过程是扩散过程，且转移概率密度满足 Forkker-Planck 方程，可参见参考文献[8]。所以问题的关键转化为给定 Ito 微分方程时，如何求出偏移系数 $a(t,x)$和

扩散系数 $b(t,x)$，以确定转移概率密度满足的 Fokker-Planck 方程。求偏移系数和扩散系数的方法有条件特征函数法或直接平均的方法[1]等。在此，利用判断过程是否满足扩散过程的条件(1*)和(2*)求出。

因为

$$\frac{1}{h}E(X(t+h)-X(t)\mid X(t)=x)=$$

$$\frac{1}{h}E(X(t+h)-x\mid X(t)=x)=$$

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E(f(X(s),s)\mid X(t)=x)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1 E(f(X(t+sh),t+sh)\mid X(t)=x)\mathrm{d}s$$

而

$$\lim_{h\to0}\int_0^1 E(f(X(t+sh),t+sh)\mid X(t)=x)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1 E(f(X(t),t)\mid X(t)=x)\mathrm{d}s=f(x,t)$$

所以，有 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}E(X(t+h)-X(t)\mid X(t)=x)=f(x,t)$，即 $a(t,x)=f(x,t)$ 为要求的偏移系数。

其次，令 $\psi(u)=u^2$，由 Ito 微分公式有

$$E((X(t+h)-X(t))^2\mid X(t)=x)=$$

$$E(X^2(t+h)\mid X(t)=x)-x^2-2xE(X(t+h)-x\mid X(t)=x)=$$

$$E\Big(\int_t^{t+h}(2X(s)f(X(s),s)+g^2(X(s),s))\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}2X(s)g(X(s),s)\mathrm{d}B(s)\Big)-$$

$$2xf(x,t)h+o(h)$$

因此，有

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}E((X(t+h)-X(t))^2\mid X(t)=x)=$$

$$\lim_{h\to0}\int_0^1 2E(X(t+sh)f(X(t+sh),t+sh)+g^2(X(t+sh),t+sh))\mathrm{d}s-2xf(x,t)=$$

$$g^2(x,t)$$

即 $b(t,x)=g^2(x,t)$ 为扩散系数。这样，对应于 Ito 微分方程的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}p(s,x;t,y)=-\frac{\partial}{\partial y}(f(y,t)p(s,x;t,y))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(g^2(y,t)p(s,x;t,y))\quad(6.6.7)$$

其中 $t>s$，转移概率密度满足的初始条件为 $\lim\limits_{t\downarrow s}p(s,x;t,y)=\delta(y-x)$。

然而，由一般的 Ito 随机微分方程得到的 Fokker-Planck 方程的求解是非常困难的，但对线性常系数的情况，Fokker-Planck 方程可用通常的分离变量法求解，或用 Fourier 变换法。尤其是对多维 Fokker-Planck 方程，有效的方法是先把抛物型方程转化为一阶线性偏微分方程。然后，求解一阶线性偏微分方程获得转移概率密度 $p(s,x;,t,y)$ 相应的条件特征函数 $\phi(s,x;t,y)$。下面举例仅说明用 Fourier 变换方法求解一阶线性偏微分方程。

例 6.6.3 考虑著名的 Langevin 方程

$$\mathrm{d}X(t)=-\beta X(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B(t),\qquad X(0)=X_0,\ t\geqslant0$$

这时，Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial p(s,x;t,y)}{\partial t}=\beta\frac{\partial}{\partial y}(yp(s,x;t,y))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(s,x;t,y)}{\partial y^2}$$

要求它的解满足条件 $\lim_{t\downarrow s}p(s,x;t,y)=\delta(y-x)$ 和边界条件 $\lim_{y\to\pm\infty}p(s,x;t,y)=0$。考虑转移概率密度 $p(s,x;t,y)$ 的 Fourier 变换得到的条件特征函数 $\phi(t,u\mid s,x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{iuy\}p(s,x;t,y)\mathrm{d}y$。

容易证明 Fokker-Planck 方程的 Fourier 变换导出的条件特征函数 $\phi(t,u|s,x)$ 所满足的一阶偏微分方程为$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\beta u\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{1}{2}u^2\phi$。它可以化为常微分方程组$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{\beta u}=-2\frac{\mathrm{d}\phi}{u^2\phi}$。对方程$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{\beta u}$积分，有 $u\exp\{-\beta t\}=c_1$（常数），或 $u=c_1\exp\{\beta t\}$。代入方程组的第二个等式，有 $\frac{\mathrm{d}t}{1}=-2\frac{\mathrm{d}\phi}{c_1^2\phi\exp\{2\beta t\}}$。积分后，有 $\ln(c_2\phi)=-\frac{c_1^2}{4\beta}\exp\{2\beta t\}=-\frac{u^2}{4\beta}$，或 $\phi\exp\left\{\frac{u^2}{4\beta}\right\}=c_3$。所以，一阶偏微分方程的一般解为

$$\phi(t,u\mid s,x)=\psi(u\exp\{-\beta t\})\exp\left\{-\frac{u^2}{4\beta}\right\}$$

其中 ψ 为任意函数。代入初始条件，可得 $\phi(s,u|s,x)=\exp\{iux\}$。因此，函数 ψ 必取形式$\psi(u)=\exp\left\{iux+\frac{u^2}{4\beta}\right\}$。故条件特征函数为

$$\phi(t,u\mid s,x)=\exp\left\{iux\exp\{-\beta t\}-\frac{u^2}{4\beta}(1-\exp\{-2\beta t\})\right\}$$

从 $\phi(t,u|s,x)$的表达式可以看出它恰是正态分布的特征函数，因此转移概率密度 $p(s,x;t,y)$ 为 $p(s,x;t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$，其中均值 μ 和 σ^2 分别为 $\mu=x\exp\{-\beta t\}$，$\sigma^2=\frac{1}{2\beta}(1-\exp\{-2\beta t\})$。

6.6.3　解过程的矩

解过程的矩是解过程的重要性质，在许多情况下仅能获得解过程的矩或只要知道解过程的矩即可，特别是解过程的均值函数和相关函数。

转移概率密度所满足的 Fokker-Planck 方程可用于确定解过程的矩满足的微分方程组。但这个方程组有无穷多个方程，不能构成一个闭合方程组，使得方程组的求解变得很困难。为了使矩方程组变成闭合的，需要选择一些截断方案。由于这些方案选择的不确定性以及缺乏严密的数学根据，不再详述，有兴趣的读者可参见参考文献[1]。下面仅举例说明如何从解过程的显式表示求均值函数和相关函数。

例 6.6.4　考虑 Langevin 方程 $\mathrm{d}X(t)=-\beta X(t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B(t)$，$t>0$，其中 $\beta>0$，初始条件为 $X(0)=X_0$，X_0 与 $B(t)$独立。这个方程惟一的均方解可表示为

$$X(t)=\exp\{-\beta t\}X_0+\int_0^t\exp\{-\beta(t-s)\}\mathrm{d}B(s)$$

由推论 6.4.1，有 $E\left(\int_0^t\exp\{-\beta(t-s)\}\mathrm{d}B(s)\right)=0$。所以当 $X_0\in L_2$ 时，均值函数为$E(X(t))=$

$\exp\{-\beta t\}E(X_0)$。

下面求 $X(t)$ 的协方差。由于

$$X(t)-E(X(t))=\exp\{-\beta t\}(X_0-E(X_0))+\int_0^t\exp\{-\beta(t-u)\}\mathrm{d}B(u)$$

$$X(s)-E(X(s))=\exp\{-\beta s\}(X_0-E(X_0))+\int_0^s\exp\{-\beta(s-v)\}\mathrm{d}B(v)$$

所以

$$E((X(s)-E(X(s)))(X(t)-E(X(t))))=$$
$$\exp\{-\beta(t+s)\}\Big(E(X_0-E(X_0))^2+E\Big((X_0-E(X_0))\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\Big)+$$
$$E\Big((X_0-E(X_0))\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)+E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)\Big)$$

又由于 $X_0-E(X_0)$ 与 $\mathrm{d}B(t)$ 独立，因而 $E\Big((X_0-E(X_0))\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)=0$。同理 $E\Big((X_0-E(X_0))\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\Big)=0$。

当 $t\geqslant s$ 时，由 $B(t)$ 的独立增量性及推论 6.4.1，有

$$E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)=$$
$$E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\Big)^2+E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\int_s^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)=$$
$$\int_0^s\exp\{2\beta v\}\mathrm{d}v=$$
$$\frac{1}{2\beta}(\exp\{2\beta s\}-1)$$

同理，当 $t\leqslant s$ 时，有

$$E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)=\frac{1}{2\beta}(\exp\{2\beta t\}-1)$$

所以

$$E\Big(\int_0^s\exp\{\beta v\}\mathrm{d}B(v)\int_0^t\exp\{\beta u\}\mathrm{d}B(u)\Big)=\frac{1}{2\beta}(\exp\{2\beta s\wedge t\}-1)$$

故 $X(t)$ 协方差函数为

$$C(s,t)=E(X(s)-E(X(s)))(X(t)-E(X(t)))=$$
$$\exp\{-\beta(t+s)\}\Big(\sigma_{X_0}^2+\frac{1}{2\beta}(\exp\{2\beta s\wedge t\}-1)\Big)$$

6.7 随机微分方程的一些应用

本节讨论 Ito 随机微分方程的两个简单应用，有关它在控制论、滤波和通信理论等方面的应用可参见文献[1,11,12]。

例 6.7.1 求解例 6.1.1 的种群数量增长模型 $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=a(t)N(t)$，$N(0)=N_0$，其中 $a(t)=r(t)+\alpha W(t)$，$W(t)$ 是白噪声，α 是常数。

解 种群数量增长模型等价于 Ito 微分方程 $dN(t)=r(t)N(t)dt+\alpha N(t)dB(t)$，$N(0)=N_0$。为了简单起见，设 $r(t)=r$，r 是常数，并令 $u(x,t)=\ln x$，$x>0$。由 Ito 微分公式(6.5.4)可得

$$\mathrm{d}\ln N(t)=\left(\frac{1}{N(t)}rN(t)-\frac{1}{2}\frac{1}{N^2(t)}\alpha^2N^2(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{N(t)}\alpha N(t)\mathrm{d}B(t)=$$

$$\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)\mathrm{d}t+\alpha\mathrm{d}B(t)$$

积分并由初始条件可得 $\ln\dfrac{N(t)}{N_0}=\left(r-\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)t+\alpha B(t)$，或 $N(t)=N_0\exp\left\{\left(r-\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)t+\alpha B(t)\right\}$，即为所求的种群数量过程。

下面求解过程 $N(t)$ 的均值。由于 N_0 与 $B(t)$ 独立，因而 $E(N(t))=\exp\left\{\left(r-\dfrac{1}{2}\alpha^2\right)t\right\}E(N_0)E(\exp\{\alpha B(t)\})$。故只要求得 $E(\exp\{\alpha B(t)\})$即可。为此，令 $Y(t)=\exp\{\alpha B(t)\}$，根据 Ito 微分公式(6.5.4)有

$$\mathrm{d}Y(t)=\frac{1}{2}\alpha^2\exp\{\alpha B(t)\}\mathrm{d}t+\alpha\exp\{\alpha B(t)\}\mathrm{d}B(t)$$

或等价的 Ito 积分方程

$$Y(t)=Y_0+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^t\exp\{\alpha B(s)\}\mathrm{d}s+\alpha\int_0^t\exp\{\alpha B(s)\}\mathrm{d}B(s)=$$

$$Y_0+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^tY(s)\mathrm{d}s+\alpha\int_0^tY(s)\mathrm{d}B(s)$$

由推论 6.4.1 可知 $E\left(\int_0^tY(s)\mathrm{d}B(s)\right)=0$，所以有

$$E(Y(t))=E(Y_0)+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^tE(Y(s))\mathrm{d}s$$

两边对 t 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(Y(t))=\frac{1}{2}\alpha^2E(Y(t))$$

这是均值函数 $E(Y(t))$满足的常微分方程，其满足初始条件 $E(Y_0)=1$ 解为 $E(Y(t))=\exp\left\{\dfrac{1}{2}\alpha^2t\right\}$。因此，解过程$\{N(t),t\geqslant0\}$的均值函数为

$$E(N(t))=E(N_0)\exp\{rt\}$$

由 $E(N(t))$的表达式可知，种群数量的平均值是以指数形式变化，即当增长率 $r>0$，且 $t\to+\infty$时，$E(N(t))\to+\infty$；而当增长率 $r<0$，且 $t\to+\infty$时，$E(N(t))\to0$。

最后讨论当 $t\to+\infty$时，解过程 $N(t)$的收敛性。对 Brown 运动，有 $P\{\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|B(t)|>b\}=2P\{|B(t)|>b\}$。有关这个等式的证明可参见参考文献[13]。由于 $B(t)\sim N(0,t)$，因而对任何有限常数 $c>0$，有

$$P\{\max_{0\leqslant s\leqslant t}|B(t)|>ct\}=2P\{|B(t)|>ct\}=$$

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi t}}\int_{ct}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{u^2}{2t}\right\}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_{c\sqrt{t}}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv =$$
$$4(1-\Phi(c\sqrt{t})$$

其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数。由 $\Phi(+\infty)=1$ 可知，当 $t\to+\infty$ 时，有 $P\{\max\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|B(t)|>ct\}\to 0$，对所有的 $c>0$ 都成立。因此，如果 $r<\frac{1}{2}\alpha^2$，则当 $t\to+\infty$，$N(t)$ 几乎必然收敛于零；如果 $r>\frac{1}{2}\alpha^2$，则当 $t\to+\infty$，$N(t)$ 几乎必然收敛于无穷。

从上述讨论可知，当增长率 $r>0$，且 $t\to+\infty$ 时，$E(N(t))\to+\infty$ 或当 $r>\frac{1}{2}\alpha^2$，且 $t\to+\infty$ 时，$N(t)$ 几乎必然收敛于无穷。这与客观现实不符，其主要原因是模型未能考虑"密度制约"因素。因为现实环境对无论哪种种群都有一个容纳度，这由资源的丰富程度确定。种群生活在一定的环境中，在资源给定的情况下，个体数目越多，每一个体所获得的资源就越少，这将抑制个体的生育率，而增加了死亡率。因此，可考虑类似于 Verhulst 提出的 Logistic 模型

$$\frac{dN(t)}{dt}=a(t)N(t)\left(1-\frac{N(t)}{k}\right),\qquad N(0)=N_0$$

其中 k 是种群生存的环境对该种群的最大容纳量，称为环境容纳量。有关这个方程解过程的讨论略去。

例 6.7.2 参考文献[14]研究了随机激发过程对地极移动(Chandler 摆动)作用。长期的观察证实，地球自转轴的位置相对于地球本体并非固定不变，极点(北极或南极)在地球表面作随机飘移，构成所谓"地极移动"。大致地可将它分解为三种分量：长期极移、周年分量与 Chandler 摆动。在这里地极移动主要是指 Chandler 摆动。参考文献[15]提出了 Chandler 摆动所满足的随机微分方程组，它是二维线性 Ito 微分方程组。

以 $(X_1(t),X_2(t))$ 表示 t 时刻地极的坐标，地极作 Chandler 摆动的方程为

$$\begin{cases}dX_1(t)=-\lambda X_1(t)dt-\omega X_2(t)dt+\alpha dB_1(t)\\ dX_2(t)=\omega X_1(t)dt-\lambda X_2(t)dt+\alpha dB_2(t)\end{cases}$$

其中 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 是时间 t 的随机过程，称为激发函数。假定 $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 是相互独立的 Brown 运动，$\alpha>0$ 是常数，它表示激发的强度，ω 是 Chandler 摆动的角速度，而 λ 为阻尼系数。

令 $\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),X_2(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}(t)=(B_1(t),B_2(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\lambda & -\omega\\ \omega & -\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$，则方程组可用矩阵表示为

$$d\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)dt+\boldsymbol{D}d\boldsymbol{B}(t)\tag{6.7.1}$$

它是二维常系数线性 Ito 随机微分方程组。为求解此方程，需先给出初始条件

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0=(X_{10},X_{20})^{\mathrm{T}}\tag{6.7.2}$$

其中，t_0 是起始时间，$\boldsymbol{X}_0$ 是已知的二维随机向量。假定 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)(t_0\leqslant s\leqslant t)$ 独立。若令 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{x}$，由 Ito 微分公式(6.5.6)，有

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{Y}(t)&=d\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(t),t)=\\&(-\boldsymbol{A}\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{X}(t)+\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t))dt+\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{D}d\boldsymbol{B}(t)=\\&\exp\{-\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{D}d\boldsymbol{B}(t)\end{aligned}$$

则方程组(6.7.1)满足初始条件惟一的解为

$$X(t) = \exp\{A(t-t_0)\}\left(X_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\{-A(s-t_0)\}D\mathrm{d}B(s)\right) \tag{6.7.3}$$

为了讨论解的性质，需要求出 $\exp\{At\}$。由于 $At = \begin{pmatrix} -\lambda t & -\omega t \\ \omega t & -\lambda t \end{pmatrix} = -\lambda t I + \omega t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 令 $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，由 $\exp\{At\}$ 的定义式(6.6.5)，有

$$\exp\{At\} = \exp\{-\lambda t I\}\exp\{\omega t H\} = \exp\{-\lambda t\}\left(I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n}{n!} H^n\right)$$

但容易看出，当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，有 $H^{4n}=I, H^{4n+1}=H, H^{4n+2}=-I, H^{4n+3}=-H$，所以

$$\exp\{At\} = \exp\{-\lambda t\}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(\omega t)^{4n}}{(4n)!}I + \frac{(\omega t)^{4n+1}}{(4n+1)!}H - \frac{(\omega t)^{4n+2}}{(4n+2)!}I - \frac{(\omega t)^{4n+3}}{(4n+3)!}H\right) =$$

$$\exp\{-\lambda t\}\begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} \end{vmatrix} =$$

$$\exp\{-\lambda t\}\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

由上式可得下列各式

$$\exp\{A^{\mathrm{T}}t\} = (\exp\{At\})^{\mathrm{T}} = \exp\{-\lambda t\}\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\exp\{(A + A^{\mathrm{T}})t\} = \exp\{-2\lambda t I\} = \exp\{-2\lambda t\} I$$

$$\exp\{-At\} = \exp\{\lambda t\}\begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$$

将这些结果代入式(6.7.3)，可得微分方程组(6.7.1)满足初始条件(6.7.2)的解为

$$X_1(t) = \exp\{-\lambda(t-t_0)\}(X_{10}\cos \omega(t-t_0) - X_{20}\sin \omega(t-t_0)) +$$
$$\alpha\int_{t_0}^{t} \exp\{-\lambda(t-s)\}(\cos \omega(t-s)\mathrm{d}B_1(s) - \sin \omega(t-s)\mathrm{d}B_2(s))$$

$$X_2(t) = \exp\{-\lambda(t-t_0)\}(X_{10}\sin \omega(t-t_0) + X_{20}\cos \omega(t-t_0)) +$$
$$\alpha\int_{t_0}^{t} \exp\{-\lambda(t-s)\}(\sin \omega(t-s)\mathrm{d}B_1(s) + \cos \omega(t-s)\mathrm{d}B_2(s))$$

根据解过程的表达式，就可以讨论解过程的一些性质。

(1) 解(6.7.3)由两部分组成，第一部分 $\exp\{A(t-t_0)\}X_0$ 是由初值 X_0 所引起的，当 $t\to\infty$ 时，它以指数型地趋于 0，即 X_0 的影响逐渐消失；第二部分 $\exp\{A(t-t_0)\}\int_{t_0}^{t}\exp\{-A(s-t_0)\}D\mathrm{d}B(s)$ 是由 $[t_0,t]$ 上的 Brown 运动 $B(t)$ 所激励而产生的。由于 X_0 与 $B(t)-B(s)$ $(t_0\leqslant s<t)$ 独立，故解的这两部分也是相互独立的。

(2) 由于方程组(6.7.1)是常系数线性方程组，它的解只依赖于 $t=t_0$ 的位置 X_0，而不依赖于 t_0 时刻以前地极的位置。因而地极的 Chandler 摆动模型是无后效性的，即 $X(t)$ 是二维齐次 Markov 过程。这个结论也可以从定理 6.6.2 得出。

(3) 若取 X_0 有二维正态分布，或取 X_0 为非随机的二维常数向量(可视 X_0 为有退化的二

维正态分布),则解的第一部分是正态分布。由于 $\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)(t_0\leqslant s<t)$ 服从正态分布,作为它们的线性组合的极限,第二部分也服从正态分布。由于解的两部分相互独立,故此时解 $\boldsymbol{X}(t)$ 也服从正态分布。此过程的分布显然依赖于 $\boldsymbol{X}_0$ 的分布。下面指出应如何合理地选取 $\boldsymbol{X}_0$ 的分布。

(4) $\boldsymbol{X}(t)$ 的转移概率分布。设 $t_0=0$,$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 是常数向量。在此条件下,由式(6.7.3)知,$\boldsymbol{X}(t)$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}(t)=\exp\{\boldsymbol{A}t\}\left(\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}s\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)\tag{6.7.4}$$

为求出 $\boldsymbol{X}(t)$ 的分布,只要求出数学期望和协方差矩阵即可。由推论 6.4.1 和上式,可得

$$E(\boldsymbol{X}(t))=\exp\{\boldsymbol{A}t\}\boldsymbol{x}_0$$

或 $E(X_1(t))=\mathrm{e}^{-\lambda t}(x_{10}\cos\omega t-x_{20}\sin\omega t)$, $\quad E(X_2(t))=\mathrm{e}^{-\lambda t}(x_{10}\sin\omega t+x_{20}\cos\omega t)$

且

$$\begin{aligned}&E((\boldsymbol{X}(t)-E(\boldsymbol{X}(t)))(\boldsymbol{X}(t)-E(\boldsymbol{X}(t)))^{\mathrm{T}})=\\&E\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}\right)=\\&E\left(\int_0^t\exp\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(t-s)\}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\right)=\\&\alpha^2\int_0^t\exp\{-2\lambda(t-s)\boldsymbol{I}\}\mathrm{d}s=\alpha^2\int_0^t\exp\{-2\lambda(t-s)\}\mathrm{d}s\cdot\boldsymbol{I}=\\&\alpha^2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda t}}{2\lambda}\boldsymbol{I}\end{aligned}\tag{6.7.5}$$

故自 $\boldsymbol{x}_0=(x_{10},x_{20})^{\mathrm{T}}$ 出发,经时间 t 后,地极转移到点 (y_1,y_2) 附近的转移概率密度为

$$\begin{aligned}&p(0,x_{10},x_{20};t,y_1,y_2)=\\&\quad\frac{\lambda}{\pi\alpha^2(1-\mathrm{e}^{-2\lambda t})}\exp\left\{\frac{-\lambda}{\alpha^2(1-\mathrm{e}^{-2\lambda t})}((y_1-\mathrm{e}^{-\lambda t}(x_{10}\cos\omega t-x_{20}\sin\omega t))^2+\right.\\&\quad\left.(y_2-\mathrm{e}^{-\lambda t}(x_{10}\sin\omega t+x_{20}\cos\omega t))^2)\right\}\end{aligned}\tag{6.7.6}$$

从 $\boldsymbol{X}(t)$ 的两个分量来看 $\mathrm{Var}(X_1(t))=\mathrm{Var}(X_2(t))=\alpha^2\,\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda t}}{2\lambda}$。而 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 的相关系数等于 0,故在 $X_{10}=x_{10}$,$X_{20}=x_{20}$ 的条件下,两个分量 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 在同一 t 时刻上是相互独立的。

(5) 在式(6.7.6)中,令 $t\to\infty$,得

$$\lim_{t\to\infty}p(0,x_{10},x_{20};t,y_1,y_2)=\frac{\lambda}{\pi\alpha^2}\exp\left\{-\frac{\lambda(y_1^2+y_2^2)}{\alpha^2}\right\}\tag{6.7.7}$$

右方与起点 (x_{10},x_{20}) 无关,这说明 Chandler 摆动模型具有遍历性:当 $t\to\infty$ 时,它来到 (y_1,y_2) 附近的概率,与开始时从那一点出发是无关的。在工程技术中,当 Markov 过程的极限分布存在时,它的遍历性表示一个系统经过相当长的时间以后达到平稳状态,此时系统各状态的概率分布称为平稳分布,它既不随时间而变,也不依赖于初始状态。从式(6.7.7)中的极限分布可知,平稳分布是均值为 $\boldsymbol{0}$,协方差矩阵为 $\frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}$ 的二维正态分布,即为 $N\left(\boldsymbol{0},\frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}\right)$。

(6) 由于地极移动已进行了漫长的时间,故可认为已到达此平稳分布状态。因此,为研究今后地极的移动,可合理地取 $\boldsymbol{X}(t)$ 的初始分布为 $N\left(\boldsymbol{0},\frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}\right)$。

今证明：如设 $\boldsymbol{X}_0 \sim N\left(\boldsymbol{0}, \frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}\right)$，且 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)(0\leqslant s<t)$ 独立，则 Chandler 摆动模型的解过程是平稳过程。称二阶矩过程 $\{\boldsymbol{X}(t), t\in T\}$ 为平稳过程，如果它满足如下两个条件：(1) 对任意的 $t\in T$，$\boldsymbol{m}_X(t)=E(\boldsymbol{X}(t))$ 是常数；(2) 对任意的 $s,t\in T$，$\boldsymbol{R}_X(s,t)=E(\boldsymbol{X}(s)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{R}_X(t-s)$。为此，只要证明 $\boldsymbol{X}(t)$ 的均值函数 $\boldsymbol{m}_X(t)$ 和相关函数矩阵 $\boldsymbol{R}_X(t,t+\tau)$ 与 t 无关。事实上，由式(6.7.3)得 $E(\boldsymbol{X}(t))=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}E(\boldsymbol{X}_0)=0$。

其次，对 $\tau>0$，由式(6.7.3)得 $\boldsymbol{X}(t+\tau)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\left(\boldsymbol{X}(t)+\int_t^{t+\tau}\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)$，因此

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t+\tau)^{\mathrm{T}}) =& E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tau}+\\
& E\left(\boldsymbol{X}(t)\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\int_t^{t+\tau}\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}\right)
\end{aligned}
$$

但 $\boldsymbol{X}(t)$ 与 $\int_t^{t+\tau}\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)$ 独立，而且由推论 6.4.1 知 $E\left(\int_t^{t+\tau}\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)=0$，故

$$
E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t+\tau)^{\mathrm{T}}) = E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tau}
$$

下面求 $E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})$。由式(6.7.3)得

$$
\begin{aligned}
&E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}}) =\\
&\quad E\left(\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0+\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}\right)=\\
&\quad \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4 \qquad (6.7.8)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1 =& E((\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0)(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}E(\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}=\\
& \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\cdot\frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}\cdot\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}=\frac{\alpha^2}{2\lambda}\mathrm{e}^{-2\lambda t}\boldsymbol{I}\\
\boldsymbol{E}_2 =& E\left((\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0)\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}\right)=\\
& \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}E(\boldsymbol{X}_0)E\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

这可由 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}(s)(0\leqslant s<t)$ 独立，及 $E(\boldsymbol{X}_0)=0$ 得到；同理

$$
\boldsymbol{E}_3 = E\left(\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{0}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_4 =& E\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\left(\int_0^t\exp\{-\boldsymbol{A}(s-t)\}\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{B}(s)\right)^{\mathrm{T}}\right)=\\
& \alpha^2\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda t}}{2\lambda}\boldsymbol{I}
\end{aligned}
$$

由式(6.7.5)知上式成立。将 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 及 $\boldsymbol{E}_4$ 的值代入式(6.7.8)可得 $E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})=\frac{\alpha^2}{2\lambda}\boldsymbol{I}$。这样，对 $\tau>0$，有

$$
E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t+\tau)^{\mathrm{T}}) = E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tau}=\frac{\alpha^2}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix}\cos\omega\tau & \sin\omega\tau\\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau\end{pmatrix}
$$

两边取转置矩阵，得

$$E(\boldsymbol{X}(t+\tau)\boldsymbol{X}(t)^{\mathrm{T}})=\frac{\alpha^2}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\begin{pmatrix}\cos\omega\tau & -\sin\omega\tau\\ \sin\omega\tau & \cos\omega\tau\end{pmatrix}=E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t-\tau)^{\mathrm{T}})$$

综合此二式知，不论 τ 的正负，恒有

$$E(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(t+\tau)^{\mathrm{T}})=\frac{\alpha^2}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda|\tau|}\begin{pmatrix}\cos\omega\tau & \sin\omega\tau\\ -\sin\omega\tau & \cos\omega\tau\end{pmatrix}$$

右端与 t 无关，故 $\{\boldsymbol{X}(t),t\geqslant 0\}$ 是平稳过程。

此外，参考文献[14]在研究相关函数后，获得了 $\boldsymbol{X}(t)$ 的两坐标之间的关系，例如强相关性或独立性。最后得到了地极移动模型 $\boldsymbol{X}(t)$ 的最佳预测公式和预测误差。

在应用中，除了讨论解过程的统计特性外，有时可能需要讨论与解过程有关的某种随机变量的性质。例如在工程和生物系统的某种事故的研究中，重要的是研究表示解过程在一给定时间区间上跨越的数目的随机变量的性质，这个问题称为跨越门槛问题；其他有重要价值的问题还有极值的性质，零点间的区间长度，初次到达零点的时间等。在这些方面的研究已经取得了较大的进展，详细介绍可参见参考文献[1]。

习　题

1. 设 X 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机变量，证明：$X^{-1}(\mathscr{B})=\{X^{-1}(B):B\in\mathscr{B}\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数。

2. 证明扩散过程定义中条件 (1^*) 和 (2^*) 蕴涵条件 (1) 和 (2)。

3. 证明 Brown 运动 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 Markov 过程。

4. 证明 Brown 运动 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是正态过程。

5. 设 $\{\boldsymbol{B}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正交矩阵，令 $W_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}B_j(t)$。证明：$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{W}(t),t\in[0,b)\}$ 是 n 维 Brown 运动。

6. 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是相互独立的离散随机变量序列，且 $P\{X_n=1\}=\dfrac{1}{n}$，$P\{X_n=0\}=1-\dfrac{1}{n}$。证明：$\{X_n\}$ 均方收敛于零，但不几乎确定收敛于零。

7. 设 $\{X(t),t\in[a,b]\}$ 是均方可微的随机过程。函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续。证明：过程 $\{f(t)X(t),t\in[a,b]\}$ 在区间 $[a,b]$ 上均方连续。

8. 设随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的定义为 $X(t)=Yt^2$，其中 $Y\in L_2$，且 $E(Y)=0$，$\mathrm{Var}(Y)=\sigma^2$。试证明 $X(t)$ 在 T 上是处处可微的，并求 $X'(t)$ 的均值函数和相关函数。

9. 证明定理 6.3.14 的前两个结论。

10. 证明推论 6.4.1。

11. 设实函数 $h(t)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，证明 $\int_a^b h(t)\mathrm{d}B(t)=h(t)B(t)\Big|_a^b-\int_a^b h'(t)B(t)\mathrm{d}t$，并求积分的概率密度。

12. 设 n 维 Ito 微分方程为 $\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{f}(t))\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{B}(t),t>0$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶常数矩阵，$\boldsymbol{f}(t)$ 是 n 维实向量函数，$\boldsymbol{G}(t)$ 是 $n\times m$ 实矩阵函数，且它们是连续的，$\{\boldsymbol{B}(t),t\geqslant 0\}$ 是 m 维 Brown 运动，证明：方程满足初始条件 $\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$ 的均方解为 $\boldsymbol{X}(t)=\exp\{\boldsymbol{A}(t-t_0)\}$

$X_0+\int_{t_0}^{t}\exp\{A(t-s)\}(f(s)\mathrm{d}s+G(s)\mathrm{d}B(s))$，并求 $X(t)$的数学期望。

13. 设 Ito 微分方程为 $\mathrm{d}X(t)=X(t)(f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B(t)),t>0$,其中 f 和 g 是不依赖于 ω 的连续函数,证明方程满足初始条件 $X(0)=X_0$ 的均方解为

$$X(t)=X_0\exp\left\{\int_0^t\left(f(s)-\frac{g^2(s)}{2}\right)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}B(s)\right\}$$

参考文献

[1] 张炳根,赵玉芝. 科学与工程中的随机微分方程. 北京：海洋出版社,1980

[2] 汪荣鑫. 随机过程. 西安：西安交通大学出版社,1987

[3] 胡迪鹤. 随机过程概论. 武汉：武汉大学出版社,1986

[4] Chow Y S, Teicher H. Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1988

[5] 胡迪鹤. 可数状态的 Markov 过程理论. 武汉：武汉大学出版社,1983

[6] Durrett R. Brownian Motion and Martingales in Analysis. Belmont: Wadsworth, 1984

[7] 王寿仁. 概率论基础和随机过程. 北京：科学出版社,2000

[8] Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications. New York: Academic Press, 1976

[9] 严士健,王隽骧,刘秀芳. 概率论基础. 北京：科学出版社,1983

[10] 复旦大学. 概率论第三册—随机过程. 北京：人民教育出版社,1981

[11] Schuss Z. Theory and Applications of Stochastic Differential Equation. New York: John Wiley, 1980

[12] Øksendal B. Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1985

[13] Karlin S, Taylor H. A First Couse in Stochastic Processes. 2nd ed. New York: Academic Press, 1975

[14] 王梓坤. 随机激发过程对地极移动的作用. 地球物理学报,1978,21(3):225～233

[15] Sekiguchi N. On some Natures of the Exitation and Damping of the Polar Motion, Rotation of the Earth,1972,221～223

[16] Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley, 1974

[17] 龚光鲁. 随机微分方程引论. 北京：北京大学出版社,1995

附录　中英文名词索引

第一章

第二章

第三章

第四章

第五章

第六章